Quadriche in forma canonica

Per generalizzazione dalle quadriche di rotazione otteniamo facilmente le seguenti equazioni di quadriche

- $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (ellissoide)
- $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (iperboloide ellittico o a due falde)
- $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (iperboloide iperbolico o a una falda)
- $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2pz$ (paraboloide ellittico)

ed inoltre

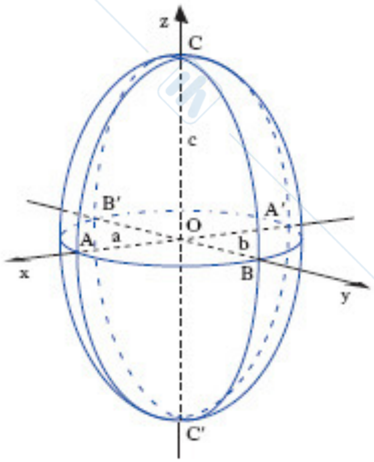
- $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2pz$ (paraboloide iperbolico o a sella)

Sono quadriche anche

- i coni e i cilindri che hanno per direttrice una conica,
- le coppie di piani.

Ellissoide

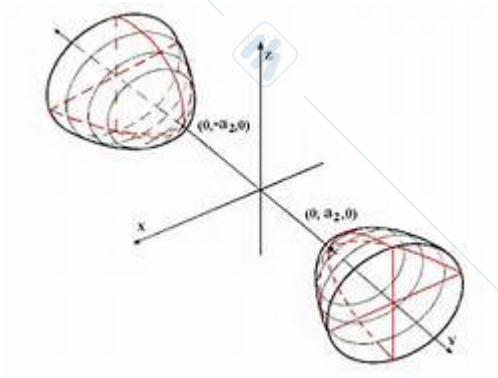
Il luogo dei punti dello spazio che soddisfano l'equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (ellissoide) ha la seguente immagine



- L'ellissoide incontra l'asse x nei punti A_1 e A_2 di coordinate ($\pm$a,0,0), l'asse y nei punti B_1 e B_2 di coordinate (0, $\pm$ b,0) e l'asse z nei punti C_1 e C_2 di coordinate (0,0, $\pm$ c), detti *vertici* dell'ellissoide, tutti i suoi punti reali hanno coordinate (x,y,z) che soddisfano le limitazioni $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$, $-c \leq z \leq c$.
- L''ellissoide è simmetrico rispetto ai tre piani coordinati, ai tre assi cartesiani e all'origine.

Iperboloide ellittico o a due falde

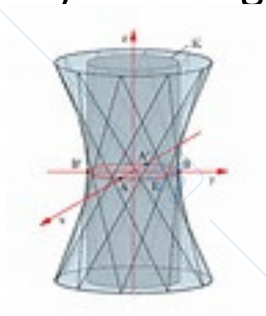
Il luogo dei punti dello spazio che soddisfano l'equazione $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (iperboloide ellittico o a due falde) ha la seguente immagine



- L'iperboloide a due falde incontra l'asse x nei punti A_1 e A_2 di coordinate ($\pm$ a,0,0), detti *vertici* dell'iperboloide, e non ha intersezioni reali con gli altri assi. Tutti i punti reali dell'iperboloide a due falde hanno coordinate (x,y,z) che soddisfano le limitazioni $x \leq -a$, $x \geq a$.
- L'iperboloide a due falde è simmetrico rispetto ai tre piani coordinati, ai tre assi cartesiani e all'origine

Iperboloide iperbolico o a una falda

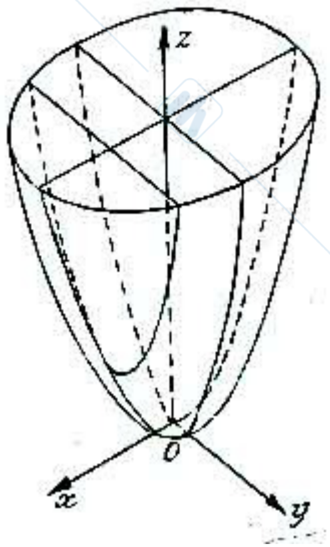
Il luogo dei punti dello spazio che soddisfano l'equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (iperboloide iperbolico o a una falda) ha la seguente immagine



- L'iperboloide a una falda incontra l'asse x nei punti A_1 e A_2 di coordinate ($\pm$ a,0,0), e l'asse y nei punti B_1 e B_2 di coordinate (0,$\pm$ b,0) e non ha intersezioni reali l'asse z.
- L'iperboloide a una falda è simmetrico rispetto ai tre piani coordinati, ai tre assi cartesiani e all'origine
- Ogni retta appartenente ad uno dei due sistemi $\begin{cases} \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=k(1-\frac{y}{b}) \\ k(\frac{x}{a}+\frac{z}{c})=1+\frac{y}{b} \end{cases}$, $\begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=h(1-\frac{y}{b}) \\ h(\frac{x}{a}-\frac{z}{c})=1+\frac{y}{b} \end{cases}$ giace per intero sull'iperboloide a una falda

Paraboloide ellittico

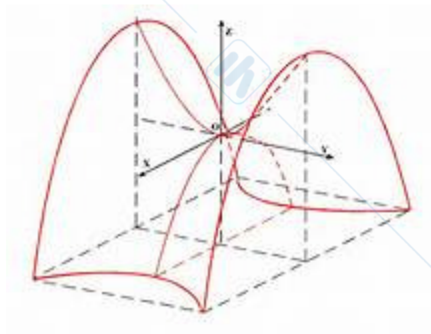
Il luogo dei punti dello spazio che soddisfano l'equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2pz$ (paraboloide ellittico) ha la seguente immagine



- Il paraboloide ellittico incontra l'asse z nell'origine ed in O è tangente al piano z=0. L'origine è detto *vertice* del paraboloide.
- I punti reali del paraboloide ellittico hanno coordinate (x,y,z) che soddisfano le limitazioni $z \geq 0$ se $p>0$, $z \leq 0$ se $p<0$.
- Il paraboloide ellittico è simmetrico rispetto all'asse z e ai due piani x=0 e y=0

Paraboloide iperbolico o a sella

Il luogo dei punti dello spazio che soddisfano l'equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz$ (paraboloide iperbolico o a sella) ha la seguente immagine



- Il paraboloide iperbolico o a sella incontra l'asse z in O ed ivi è tangente a z=0.
- E' simmetrico rispetto ai piani x=0, y=0.
- Ogni retta appartenente ad uno dei due sistemi $\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 2kpz \\ k(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}) = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2hpz \\ h(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}) = 1 \end{cases}$ giace per intero sul paraboloide iperbolico.

Terminologia

- Siano Q una quadrica, P un suo punto e π il piano tangente in P a Q. Il punto P si dice
  - *ellittico* se π ha come unica intersezione reale con Q il punto P,
  - *parabolico* se π interseca Q secondo due rette reali coincidenti,
  - *iperbolico* se π interseca Q secondo due rette reali distinte.
- Tutti i punti
  - di cilindri e dei coni (vertice escluso) quadrici sono parabolici,
  - di ellissoidi, iperboloidi ellittici, paraboloidi ellittici sono ellittici,
  - di iperboloidi iperbolici e paraboloidi iperbolici sono iperbolici.
- Coni, cilindri, paraboloidi iperbolici e iperboloidi iperbolici sono *quadriche rigate*
- Ellissoidi e iperboloidi sono coniche a centro. Anche il cono viene considerato una conica a centro il cui centro è il vertice.

Problemi

1. Ogni quadrica è un ellissoide, un iperboloide, un paraboloide , un cono o un cilindro quadrico, una coppia di piani?
2. Data una equazione di secondo grado nelle variabili x,y,z come facciamo a riconoscere di che quadrica si tratta?

- Come nel caso delle coniche nel piano, per classificare le quadriche dobbiamo studiare le forme a cui con rototraslazione possiamo portare le loro equazioni
- Ogni rototraslazione dello spazio è rappresentata dalla isometria $\underline{x}=U\underline{X}+\underline{v}$ con U matrice ortogonale di ordine 3 con det U=1
- Siamo quindi interessati alle trasformazione dei polinomi di secondo grado in 3 variabili, e utilizzeremo le forme canoniche di un polinomio di secondo grado in n variabili, che abbiamo già considerato.

Dalle forme canoniche dei polinomi….

Il polinomio

$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}xz+2a_{23}yz+a_{33}z^2+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}$

può essere rappresentato in modo compatto come $\underline{x}^T A\underline{x}+2\underline{b}^T\underline{x}+a_{44}$ ove

$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$, $\underline{x}^T=[x \quad y \quad z]$, $\underline{b}^T=[a_{14} \quad a_{24} \quad a_{34}]$

o come $z^T Bz$ ove B è la matrice $\begin{bmatrix} A & \underline{b} \\ \underline{b}^T & a_{44} \end{bmatrix}$ e $\underline{z}^T=[x \quad y \quad z \quad 1]$.

Una opportuna isometria $\underline{x}=U\underline{X}+\underline{v}$ (dove si può assumere det U=1) porta il polinomio ad una delle forme

- $\lambda_1 X_1^2+\ldots+\lambda_r X_r^2$, se rk A=rkB=r≤3,
- $\lambda_1 X_1^2+\ldots+\lambda_r X_r^2+c'$, se rk A=r, rkB=r+1≤4,
- $\lambda_1 X_1^2+\ldots+\lambda_r X_r^2+2pX_{r+1}$ se rk A=r, rkB=r+2≤4,

dove $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sono gli autovalori non nulli di A.

Invarianti di una quadrica

Sia C la quadrica di equazione

$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}xz+2a_{23}yz+a_{33}z^2+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0$

I valori det A, det B e gli autovalori di A (e quindi il segno della forma quadratica $\underline{x}^T A \underline{x}$) non sono modificati da rototraslazioni .

- Se si moltiplica per $k \neq 0$, l'equazione della quadrica (ottenendo quindi ancora una equazione della quadrica), det A viene a sua volta moltiplicato per k^3, e det B viene moltiplicato per k^4.
- Moltiplicando per uno scalare non nullo l'equazione di una quadrica non vengono modificati il fatto che det A e det B siano o non siano nulli e il segno di det B

Classificazione delle quadriche

Consideriamo la quadrica C e utilizziamo la precedente notazione, chaimando X_1,X_2, X_3 rispettivamente X,Y,Z

- Sia rk B=rk A=r
  - Se r=1 (detA=detB=0), l'equazione precedente con una opportuna rototraslazione (ed eventuale semplificazione) diventa $X^2=0$ e quindi rappresenta una *quadrica spezzata* in due piani reali coincidenti
  - Se r=2 (detA=detB=0) l'equazione di C diventa $\lambda_1 X^2+\lambda_2 Y^2=0$, ovvero la quadrica C è *spezzata* in due piani che sono
    - reali distinti se la forma quadratica $\underline{x}^T A \underline{x}$ è indefinita,
    - immaginari coniugati se la forma quadratica $\underline{x}^T A \underline{x}$ è semidefinita.
  - Se r=3 (detA≠0, detB=0) l'equazione di C diventa $\lambda_1 X^2+\lambda_2 Y^2+\lambda_3 Z^2=0$ e la quadrica C rappresenta un *cono*
    - reale se la forma quadratica $\underline{x}^T A \underline{x}$ è indefinita,
    - immaginario con un solo punto reale se la forma quadratica $\underline{x}^T A \underline{x}$ è definita

Classificazione delle quadriche (2)

- Sia rk A=r, rk B=r+1
  - Se r=1 (det A=det B=0) l'equazione di C diventa $\lambda_1 X^2+c=0$, ovvero C è *spezzata* in due piani paralleli e distinti (eventualmente immaginari coniugati)
  - Se r=2 (det A=det B=0) l'equazione di C diventa $\lambda_1 X^2+\lambda_2 Y^2+c=0$ con $c\neq 0$ e la quadrica rappresenta un *cilindro* la cui direttrice è
    - un'ellisse (eventualmente immaginaria) se la forma quadratica $\underline{x}^T A \underline{x}$ è semidefinita (cilindro ellittico),
    - un'iperbole se la forma quadratica $\underline{x}^T A \underline{x}$ è indefinita (cilindro iperbolico).
  - Se r=3 (det $A\neq 0$, det $B\neq 0$) l'equazione di C diventa $\lambda_1 X^2+\lambda_2 Y^2+\lambda_3 Z^2+c=0$ con c = det B/detA, che rappresenta
    - un *ellissoide* se la forma quadratica $\underline{x}^T A \underline{x}$ è definita positiva
      - *reale* se det B<0
      - *immaginario* se det B>0
    - un *iperboloide* se la forma quadratica $\underline{x}^T A \underline{x}$ è indefinita
      - *ellittico* se det B<0
      - *iperbolico* se det B>0

Classificazione delle quadriche (3)

- Sia rk A=r, rk B=r+2
  - Se r=1 (det A=det B=0) l'equazione di C diventa $\lambda_1 X^2+2pY=0$ con $p\neq 0$ e la quadrica rappresenta un *cilindro* la cui direttrice è una parabola (cilindro parabolico).
  - Se r=2 (det A=0 , det B≠0) l'equazione di C diventa $\lambda_1 X^2+\lambda_2 Y^2+2pY=0$ con $p\neq 0$ e la quadrica rappresenta un *paraboloide*
    - *ellittico* se la forma quadratica $\underline{x}^T A \underline{x}$ è semidefinita
    - *iperbolico* se la forma quadratica $\underline{x}^T A \underline{x}$ è indefinita
- Le *coordinate del centro* di una quadrica a centro (del vertice per i coni) sono la soluzione del sistema lineare $A\underline{x}=-\underline{b}$
- Gli assi di ellissoidi e iperboloidi hanno la direzione degli autovettori associati agli autovalori di A
- L'asse di un paraboloide ha la direzione dell'autovettore associato all'autovalore nullo di A
- Un quadrica è di rotazione se ha due autovalori non nulli coincidenti

Concludendo....

- Una quadrica può essere solo un ellissoide, un iperboloide (ellittico o iperbolico), un paraboloide (ellittico o iperbolico), un cono o un cilindro quadrico, una quadrica spezzata in due piani
- Per riconoscere una quadrica si usa il seguente schema

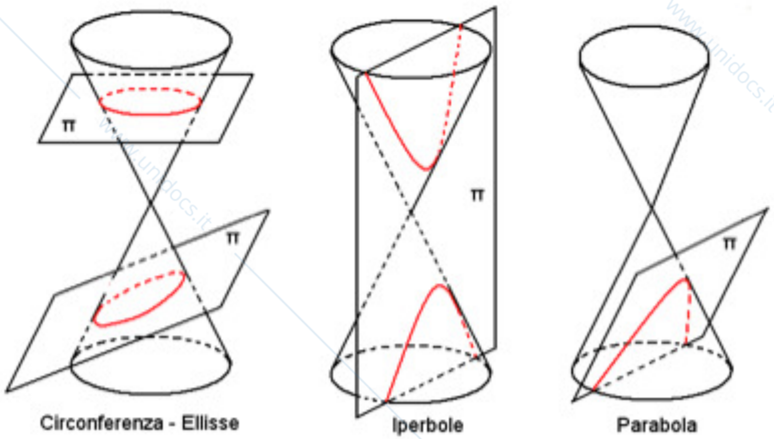
$$\det B \begin{cases} > 0 \Rightarrow \det A \begin{cases} \neq 0 \Rightarrow \underline{x}^T A \underline{x} \begin{cases} \text{definita} \Rightarrow \text{ellissoide immaginario} \\ \text{indefinita} \Rightarrow \text{iperboloide iperbolico} \end{cases} \\ =0 \Rightarrow \text{paraboloide iperbolico} \end{cases} \\ = 0 \Rightarrow \det A \begin{cases} \neq 0 \Rightarrow \text{cono} \Rightarrow \underline{x}^T A \underline{x} \begin{cases} \text{definita} \Rightarrow \text{immaginario} \\ \text{indefinita} \Rightarrow \text{reale} \end{cases} \\ =0 \Rightarrow \text{rk } A \begin{cases} =2 \Rightarrow \text{rk } B \begin{cases} = 2 \Rightarrow \text{spezzata in piani} \\ = 3 \Rightarrow \text{cilindro} \Rightarrow \underline{x}^T A \underline{x} \begin{cases} \text{indefinita} \Rightarrow \text{iperbolico} \\ \text{semidefinita} \Rightarrow \text{ellittico} \end{cases} \end{cases} \\ = 1 \Rightarrow \text{rk } B \begin{cases} = 3 \Rightarrow \text{cilindro parabolico} \\ < 3 \Rightarrow \text{spezzata in piani} \end{cases} \end{cases} \end{cases} \\ < 0 \Rightarrow \det A \begin{cases} \neq 0 \Rightarrow \underline{x}^T A \underline{x} \begin{cases} \text{definita} \Rightarrow \text{ellissoide reale} \\ \text{indefinita} \Rightarrow \text{iperboloide ellittico} \end{cases} \\ =0 \Rightarrow \text{paraboloide ellittico} \end{cases} \end{cases}$$

Coniche nello spazio

- Una conica γ nello spazio ha come equazioni cartesiane un sistema lineare costituito dall'equazione di una quadrica Q e dall'equazione di un piano π.
- Tale sistema si può sempre scrivere in una forma equivalente come intersezione del piano π e di un cilindro C con generatrici parallele ad un asse cartesiano e direttrice γ.
- Il sistema formato dalla equazione del cilindro C e del piano coordinato perpendicolare alle generatrici di C rappresenta la proiezione ortogonale γ' di γ su tale piano.
- La conica γ' (che sappiamo riconoscere) è dello stesso tipo della conica γ, ma in generale non ne conserva le proprietà metriche (ovvero se γ è una circonferenza γ' in generale non lo è, se γ è un'iperbole equilatera γ' in generale non lo è, e viceversa)

Coniche nello spazio (2)

- Le intersezioni di un cilindro quadrico con due piani qualsiasi (purché non paralleli alle generatrici) rappresentano due coniche dello stesso tipo
- Le intersezioni di un cono quadrico con due piani qualsiasi non rappresentano in genere due coniche dello stesso tipo
- Come si vede dall'immagine le intersezioni di un cono circolare retto con un piano può essere una qualsiasi conica, infatti oltre le coniche non degeneri rappresentate in figura se si interseca il cono con un piano per il vertice si ottengono anche i tre tipi di coniche degeneri.



Riassumendo

Abbiamo visto

- come si rappresentano nello spazio curve e superfici in forma cartesiana e/o parametrica, in particolare abbiamo esaminato
  - Sfere e circonferenze,
  - Coni,
  - Cilindri,
  - Superfici di rotazione,
  - Quadriche e coniche. Per quadriche e coniche abbiamo imparato
    - quali quadriche sono a centro,
    - cosa si intende per quadrica rigata,
    - I tipi di punti di una quadrica,
    - come si classificano e riconoscono le quadriche e come si trovano i loro assi e il loro eventuale centro,
    - come si riconoscono le quadriche di rotazione,
    - come si riconoscono le coniche .