NOTA BENE. Questi appunti non sono esaustivi, non contengono tutto quanto detto a lezione/esercitazioni. Non bastano come materiale per preparare l'esame. Possono essere utili per un veloce ripasso.

Spazi Euclidei (vedi capitolo 8 dello Schlesinger o del Bernardi Gimigliano)

Prodotto scalare e norma di un vettore

Def 1. Sia V uno spazio vettoriale su R, diciamo *prodotto scalare* in V una funzione che ad ogni coppia di vettori $\underline{v},\underline{w}\in V$ associa un numero reale $<\underline{v},\underline{w}>$ con le seguenti proprietà

1. Commutatività: $<\underline{v},\underline{w}>=<\underline{w},\underline{v}>$ per ogni $\underline{v},\underline{w}\in V$
2. Linearità (a sinistra): $<\underline{v}_1+\underline{v}_2,\underline{w}>=<\underline{v}_1,\underline{w}>+<\underline{v}_2,\underline{w}>$ e $<t\underline{v}_1,\underline{w}>=t<\underline{v}_1,\underline{w}>$ per ogni $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{w}\in V$, $t\in R$
3. Positività: $<\underline{v},\underline{v}> \geq 0$ per ogni $\underline{v}\in V$ e $<\underline{v},\underline{v}> = 0$ se e solo se $\underline{v}=\underline{0}$.

Uno spazio vettoriale su R in cui sia definito un prodotto scalare si dice *spazio euclideo*.

La seconda proprietà in 2. viene anche chiamata omogeneità.

La 2. può essere sostituita dalla condizione equivalente $<t_1\underline{v}_1+t_2\underline{v}_2,\underline{w}>=t_1<\underline{v}_1,\underline{w}>+t_2<\underline{v}_2,\underline{w}>$ per ogni $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{w}\in V$; $t_1,t_2\in R$

Da 1. e 2. segue anche la linearità a destra, ovvero $<\underline{v},\underline{w}_1+\underline{w}_2>=<\underline{v},\underline{w}_1>+<\underline{v},\underline{w}_2>$ e $<\underline{v},t\underline{w}_1>=t<\underline{v},\underline{w}_1>$ per ogni $\underline{v},\underline{w}_1,\underline{w}_2\in V$, $t\in R$.

Esempi

1) Sia $V=R^n$, allora $<\underline{v},\underline{w}>=\underline{v}^T\underline{w} = \sum_{i=1}^n v_i w_i$ è un prodotto scalare su R^n detto *prodotto scalare standard*.

2) Sia V lo spazio vettoriale delle matrici m,n sul campo reale, $<A,B>=\mathrm{tr}\, A^TB$ è un prodotto scalare in V (che coincide con il prodotto scalare standard di $R^{n\times m}$ quando ogni matrice è identificata con un vettore con $n\times m$ componenti.

3) Sia V lo spazio delle funzioni reali definite e continue in [a,b] allora $<f,g>=\int_a^b f(x)g(x)dx$ è un prodotto scalare in V.

Def.2. Sia V uno spazio euclideo in cui è definito il prodotto scalare <-,- > , si chiama *norma* di un vettore $\underline{v}\in V$ il numero reale non negativo $\|\underline{v}\|=\sqrt{<\underline{v},\underline{v}>}$. Un vettore di norma 1 si chiama *versore*.

La norma gode delle seguenti proprietà:

- Omogeneità: $\|t\underline{v}\|=|t|\,\|\underline{v}\|$
- Annullamento: $\|\underline{v}\|=0$ se e solo se $\underline{v}=\underline{0}$.

Def.3. Due vettori $\underline{v}$, $\underline{w}$ appartenenti ad uno spazio euclideo V con prodotto scalare <-,- > si dicono *ortogonali* se $<\underline{v}, \underline{w}>=0$

Osservazione 1. Il vettore $\underline{0}$ è ortogonale ad ogni vettore. Infatti $<\underline{0},\underline{v}>=<0\underline{0},v>=0<\underline{0},\underline{v}>=0$.

In uno spazio euclideo V con prodotto scalare <-,- >, sussistono i seguenti teoremi.

a. *Teorema di Carnot*: $\|\underline{v}+\underline{w}\|^2= \|\underline{v}\|^2 + \|\underline{w}\|^2+2<v,w>$.
   Dalla definizione di norma e dalle proprietà del prodotto scalare si ha: $\|\underline{v}+\underline{w}\|^2 =$
   $<\underline{v}+\underline{w},\underline{v}+\underline{w}>=<\underline{v},\underline{v}+\underline{w}>+<\underline{w},\underline{v}+\underline{w}>=<\underline{v},\underline{v}>+<\underline{v},\underline{w}>+<\underline{w},\underline{v}>+<\underline{w},\underline{w}>=\|\underline{v}\|^2+2<\underline{v},\underline{w}>+\|\underline{w}\|^2$

b. *Teorema di Pitagora*: Se $\underline{v}$, $\underline{w}$ sono ortogonali $\|\underline{v}+\underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 + \|\underline{w}\|^2$.
   Segue immediatamente dal teorema di Carnot.
c. *Teorema di Pitagora generalizzato*: Se $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_d$ sono a due a due ortogonali,
   $\|\underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \cdots + \underline{v}_d\|^2 = \|\underline{v}_1\|^2 + \cdots + \|\underline{v}_d\|^2$.

Dal Teorema di Carnot si ricava la *formula di polarizzazione*: $<\underline{v},\underline{w}> = (\|\underline{v}+\underline{w}\|^2 - \|\underline{v}\|^2 + \|\underline{w}\|^2)/2$ che esprime il prodotto scalare di due vettori in funzione della norma.

<u>Def 4</u>. In uno spazio euclideo si dice *distanza di due vettori* $\underline{v}$, $\underline{w}$ la norma $\|\underline{v}-\underline{w}\|$ della loro differenza.

<u>Def 5</u>. Sia V uno spazio euclideo e siano $\underline{v},\underline{b} \in V$ con $\underline{b} \neq \underline{0}$. Il vettore $\underline{c} = \frac{<\underline{v},\underline{b}>}{\|\underline{b}\|^2}\underline{b}$ si dice *proiezione ortogonale* di $\underline{v}$ sullo spazio vettoriale $L(\underline{b})$ generato da $\underline{b}$ (o su $\underline{b}$ per brevità). Lo scalare $\frac{<\underline{v},\underline{b}>}{\|\underline{b}\|^2}$ si chiama *coefficiente di Fourier* di $\underline{v}$ rispetto a $\underline{b}$.

Il vettore $\underline{c}$ proiezione ortogonale di $\underline{v}$ su $\underline{b}$ gode delle seguenti proprietà

1. $\underline{c} \in L(\underline{b})$, immediato dalla definizione di $\underline{c}$.
2. $\underline{v}-\underline{c}$ è ortogonale ad ogni vettore di L(b), infatti $< \underline{v}-\underline{c}, k\underline{b}> = k(<\underline{v},\underline{b}> - <c,\underline{b}>) = k(<\underline{v},\underline{b}> - <\frac{<v,b>}{\|b\|^2}\underline{b},\underline{b}>) = k(<\underline{v},\underline{b}> - \frac{<v,b>}{\|b\|^2}<\underline{b},\underline{b}>) = k(<\underline{v},\underline{b}> - <\underline{v},\underline{b}>) = 0$.
3. $\underline{c}$ è il vettore di $L(\underline{b})$ a distanza minima da $\underline{v}$, infatti sia $\underline{w} \in L(\underline{b})$, si ha $\|\underline{w}-\underline{v}\|^2 = \|\underline{w}-\underline{c}+\underline{c}-\underline{v}\|^2 = \|\underline{w}-\underline{c}\|^2 + \|\underline{c}-\underline{v}\|^2$ per il teorema di Pitagora, in quanto abbiamo appena visto che $\underline{c}-\underline{v}$ è ortogonale ad ogni vettore di $L(\underline{b})$ e in particolare a $\underline{w}-\underline{c}$ e quindi $\|\underline{w}-\underline{v}\| \geq \|\underline{c}-\underline{v}\|$.

Possiamo ora provare alcune significative disuguaglianze valide in ogni spazio euclideo:

d. *Disuguaglianza di (Cauchy-)Schwarz*: Per ogni coppia di vettori $\underline{v}$, $\underline{w}$ si ha $|<\underline{v},\underline{w}>| \leq \|\underline{v}\|\,\|\underline{w}\|$ e $|<\underline{v},\underline{w}>| = \|\underline{v}\|\,\|\underline{w}\|$ se e solo se i vettori $\underline{v}$, $\underline{w}$ sono linearmente dipendenti.
   Osserviamo che se $\underline{w}=\underline{0}$, $\underline{w}$ è linearmente dipendente da ogni $\underline{v}$ e $<\underline{v},\underline{w}>=0$, $\|\underline{v}\|\,\|\underline{w}\|=0$ $|\underline{w}| =0|$ Supponiamo allora $\underline{w} \neq \underline{0}$. Sia x il coefficiente di Fourier di $\underline{v}$ rispetto a $\underline{w}$. Poiché $x\underline{w}$ e $\underline{v}-x\underline{w}$ sono ortogonali, dal teorema di Pitagora abbiamo $\|\underline{v}\|^2 = \|x\underline{w}\|^2 + \|\underline{v}-x\underline{w}\|^2$ e pertanto $\|\underline{v}\|^2 \geq \|x\underline{w}\|^2 = x^2\|\underline{w}\|^2$ cioè $\|\underline{v}\| \geq |x|\,\|\underline{w}\| = \frac{|<v,w>|}{\|w\|^2}\|\underline{w}\|$, da cui si ottiene la disuguaglianza cercata moltiplicando per $\|\underline{w}\|$ entrambi i membri. Nella relazione precedente il $\geq$ diventa un'uguaglianza se e solo se $\underline{v}=x\underline{w}$ o equivalentemente se e solo se $\underline{v} \in L(\underline{w})$ e quindi se e solo se $\underline{v},\underline{w}$ sono linearmente dipendenti.
e. *Disuguaglianza triangolare*: $\|\underline{v}+\underline{w}\| \leq \|\underline{v}\| + \|\underline{w}\|$, per ogni $\underline{v}$, $\underline{w} \in V$, dove l'uguaglianza vale se e solo se $\underline{v}$, $\underline{w}$ sono linearmente dipendenti ed equiversi
   Infatti $\|\underline{v}+\underline{w}\|^2 = <v+w,v+w> = \|v\|^2 + <v,w> + <w,v> + \|w\|^2 \leq \|v\|^2 + 2|<v,w>| + \|w\|^2$ e usando la disuguaglianza di Schwarz si ha allora $\|\underline{v}+\underline{w}\|^2 \leq \|\underline{v}\|^2 + 2\|\underline{v}\|\,\|\underline{w}\| + \|\underline{w}\|^2 = (\|\underline{v}\| + \|\underline{w}\|)^2$ da cui segue la tesi. L'uguaglianza si ha se solo se la disuguaglianza di Schwarz diventa una uguaglianza e $|<v,w>| = <v,w>$.

La disuguaglianza di Schwarz dice che $-1 \leq \frac{<\underline{v},\underline{w}>}{\|\underline{v}\|\|\underline{w}\|} \leq 1$, dunque possiamo introdurre la seguente

<u>Def.6.</u> Siano $\underline{v}$,w due vettori non nulli di uno spazio euclideo V con prodotto scalare <-,->, il coseno dell'*angolo* formato da $\underline{v},\underline{w}$ è $\cos\theta = \frac{<\underline{v},\underline{w}>}{\|\underline{v}\|\|\underline{w}\|}$.

.

Osservate che si è così ottenuto effettivamente il coseno dell'angolo che due vettori paralleli ed equiversi a $\underline{v}$ e $\underline{w}$ applicati in uno stesso punto formano nel piano o nello spazio ordinario.

Osserviamo inoltre che se V è uno spazio vettoriale di dimensione n e $B=\{\underline{b}_1,\underline{b}_2,....,\underline{b}_n\}$ è una sua base, il prodotto scalare $<\underline{v},\underline{w}>$ si può sempre scrivere nella forma $\underline{v}|_B{}^T G\underline{w}|_B$ dove $\underline{v}|_B,\underline{w}|_B$ rappresentano i vettori di R^n i cui elementi sono le componenti dei vettori $\underline{v}$ e $\underline{w}$ rispetto alla base B e G è una matrice quadrata di ordine n il cui elemento di posto (i,j) è $<\underline{b}_i,\underline{b}_j>$. Infatti sia $\underline{v}=v_1\underline{b}_1+\ldots+v_n\underline{b}_n$, $\underline{w}=w_1\underline{b}_1+\ldots+w_n\underline{b}_n$, allora per linearità $<\underline{v},\underline{w}>=<v_1\underline{b}_1+\ldots+v_n\underline{b}_n, w_1\underline{b}_1+\ldots+w_n\underline{b}_n>=v_1w_1<\underline{b}_1,\underline{b}_1>+ v_1w_2<\underline{b}_1,\underline{b}_2>+\ldots+ v_1w_n<\underline{b}_1,\underline{b}_n>+ v_2w_1<\underline{b}_2,\underline{b}_1>+\ldots+ v_nw_n<\underline{b}_n,\underline{b}_n>$.

La matrice G si chiama *matrice di Gram* del prodotto scalare rispetto a B ed è reale simmetrica con gli elementi diagonali tutti positivi. Osservate che non ogni matrice reale simmetrica con gli elementi diagonali maggiori di zero è la matrice di Gram di un prodotto scalare, le condizioni imposte su G non garantiscono infatti che $\underline{v}|_B{}^T G\underline{v}|_B$ sia positivo.

Basi ortogonali e ortonormali

Def.7. Una base $\{\underline{b}_1,\underline{b}_2,....,\underline{b}_n\}$ di uno spazio euclideo V si dice *base ortogonale* se i suoi elementi sono a due a due ortogonali; una base ortogonale i cui vettori hanno tutti norma 1 si dice *base ortonormale*.

La base canonica di R^n è una base ortonormale.

Ovviamente da una base ortogonale si ricava una base ortogonale dividendo ogni vettore della base per la sua norma.

Osserviamo che:

- Un insieme di vettori non nulli a due a due ortogonali è un insieme di vettori linearmente indipendenti.

Infatti sia $\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_m\}$ un insieme di vettori a due a due ortogonali e sia $\alpha_1\underline{v}_1+\alpha_2\underline{v}_2+\ldots+\alpha_m\underline{v}_m=\underline{0}$, (con $\alpha_i\in R$), per ogni vettore $\underline{v}_i$ (i=1,2,…,m) si ha $0=<\underline{0},\underline{v}_i>=< \alpha_1\underline{v}_1+\alpha_2\underline{v}_2+\ldots+\alpha_m\underline{v}_m,\underline{v}_i>= \alpha_1<\underline{v}_1,\underline{v}_i>+\alpha_2<\underline{v}_2,\underline{v}_i>+\ldots+\alpha_m<\underline{v}_m,\underline{v}_i>=\alpha_1 0 +\ldots+\alpha_i<\underline{v}_i,\underline{v}_i>+\ldots+\alpha_m 0$, da cui $\alpha_i=0$.

Inoltre possiamo osservare che

- Sia $B=\{\underline{b}_1,\underline{b}_2,....,\underline{b}_n\}$ una base ortogonale di uno spazio euclideo V. Le componenti di un vettore $\underline{v}\in V$ rispetto alla base B sono i coefficienti di Fourier di $\underline{v}$ rispetto a $\underline{b}_i$ ($1\leq i\leq n$). La matrice di Gram rispetto a B di un prodotto scalare è una matrice diagonale che ha come elemento diagonali le norme dei vettori della base
- Sia $B=\{\underline{q}_1,\underline{q}_2,....,\underline{q}_n\}$ una base ortonormale di V, allora
  - $\underline{v}=[<\underline{v},\underline{q}_1>,<\underline{v},\underline{q}_2>,...,<\underline{v},\underline{q}_n>]^T$,
  - $\|\underline{v}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ dove $x_i=<\underline{v},\underline{q}_i>$ per ogni $1\leq i\leq n$,
  - $<\underline{v},\underline{w}>=\underline{v}^T\underline{w}=x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n$ dove $x_i=<\underline{v},\underline{q}_i>$, $y_i=<\underline{w},\underline{q}_i>$ per ogni $1\leq i\leq n$.

Da questo abbiamo che uno spazio euclideo di dimensione n riferito ad una base ortonormale può essere identificato con R^n col prodotto scalare standard.

Def.8. Sia H un sottospazio di uno spazio euclideo V con prodotto scalare <-,->, un vettore $\underline{v}$ si dice *ortogonale ad* H se è ortogonale ad ogni vettore di H. L'insieme dei vettori ortogonali ad H si denota col simbolo $H^\perp$.

Si dimostra facilmente che

- $H^\perp$ è un sottospazio di V,
- $\underline{v}\in H^\perp$ se e solo se è ortogonale ad ogni generatore di H.

Def.9. Sia H un sottospazio di uno spazio euclideo V con prodotto scalare <-,-> e sia $\underline{v}\in V$. Si dice *proiezione ortogonale* di $\underline{v}$ su H un vettore $\underline{v}_H$ tale che $\underline{v}-\underline{v}_H$ sia ortogonale ad H.

Siano V uno spazio euclideo ed H un suo sottospazio:

- Se $\underline{v}=\underline{v}_1+\underline{v}_2$ con $\underline{v}_1\in H$, $\underline{v}_2\in H^\perp$, allora $\underline{v}_1$ è l'unico vettore di H a distanza minima da V ed è l'unico vettore di H tale che $\underline{v}-\underline{v}_1$ è ortogonale ad H, dunque $\underline{v}_1=\underline{v}_H$.

Infatti sia $\underline{w}\in H$, allora $\|\underline{v}-\underline{w}\|^2=\|\underline{v}-\underline{v}_1\|^2+\|\underline{v}_1-\underline{w}\|^2$, quindi se $\underline{w}\neq\underline{v}_1$ si ha $\|\underline{v}-\underline{w}\| \geq \|\underline{v}_1-\underline{w}\|$. Ovviamente $\underline{v}-\underline{v}_1$ è ortogonale ad e $\underline{v}_1$ è l'unico vettore di H tale che $\underline{v}-\underline{v}_1$ è ortogonale ad H perché se ci fosse un altro vettore $\underline{u}\in H$ con $\underline{v}-\underline{u}$ ortogonale ad H si avrebbe $\underline{v}=\underline{u}+(\underline{v}-\underline{u})$ ed $\underline{u}$ sarebbe un altro vettore a distanza minima da $\underline{v}$.

- Se H ammette una base ortogonale $B=\{\underline{b}_1,\underline{b}_2,....,\underline{b}_d\}$ allora ogni vettore $\underline{v}$ di V ha una proiezione ortogonale $\underline{v}_H$ su H la cui componente i-esima per $1\leq i\leq d$ è il coefficiente di Fourier di $\underline{v}$ rispetto a $\underline{b}_i$.

Basta verificare che il vettore la cui componente i-esima per $1\leq i\leq d$ è il coefficiente di Fourier di $\underline{v}$ rispetto a $\underline{b}_i$ soddisfa le condizioni della proiezione ortogonale su H.

Mostriamo ora che un qualsiasi sottospazio di dimensione finita di uno spazio V ammette una base ortogonale e quindi una base ortonormale.

Teorema 1 (Algoritmo di Gram Schmidt). Dato un insieme $\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,....,\underline{v}_d\}$ di vettori linearmente indipendenti di V è possibile costruire iterativamente un insieme di vettori $\{\underline{b}_1,\underline{b}_2,....,\underline{b}_d\}$ a due a due ortogonali, tali che per ogni $k\leq d$, $L(\underline{v}_1,\underline{v}_2,....,\underline{v}_k)=L(\underline{b}_1,\underline{b}_2,....,\underline{b}_k)$. La procedura iterativa è la seguente:

$\underline{b}_1=\underline{v}_1$,
$\underline{b}_2=\underline{v}_2-x_2^1\underline{b}_1$,
$\underline{b}_3=\underline{v}_3-(x_3^1\underline{b}_1+x_3^2\underline{b}_2)$,
... ,
$\underline{b}_d=\underline{v}_d-(x_d^1\underline{b}_1+x_d^2\underline{b}_2+...+x_d^{d-1}\underline{b}_{d-1})$

dove x_i^j è il coefficiente di Fourier di $\underline{v}_i$ rispetto a $\underline{b}_j$. In particolare se $\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,....,\underline{v}_d\}$ è una base per H allora $\{\underline{b}_1,\underline{b}_2,....,\underline{b}_d\}$ è una base ortogonale di H.

Dim. Il procedimento è sostanzialmente il seguente: nel sottospazio generato da $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ si prende un vettore $\underline{b}_2$ ortogonale a $\underline{v}_1$ che si trova come differenza fra $\underline{v}_2$ e la proiezione ortogonale di $\underline{v}_2$ su $\underline{v}_1$. Nel sottospazio generato da $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$ (che coincide con quello generato da $\underline{v}_1$, $\underline{b}_2$, $\underline{v}_3$) si prende un vettore $\underline{b}_3$ ortogonale a $\underline{v}_1$, $\underline{b}_2$ che si trova come differenza fra $\underline{v}_3$ e la proiezione ortogonale di $\underline{v}_3$ sullo spazio generato da $\underline{v}_1$ e $\underline{b}_2$ (che ha $\underline{v}_1$, $\underline{b}_2$ come base ortogonale) e si continua così fino a trovare un vettore $\underline{b}_d$ ortogonale a $\underline{v}_1$, $\underline{b}_2$,…, $\underline{b}_{d-1}$. I vettori così trovati sono a due a due ortogonali e quindi linearmente indipendenti; inoltre essendo dim $L(\underline{v}_1,\underline{v}_2,....,\underline{v}_k)=k$ (per ogni $k\leq d$) ed essendo ogni $\underline{b}_i\in L(\underline{v}_1,\underline{v}_2,....,\underline{v}_k)$, si ottiene $L(\underline{v}_1,\underline{v}_2,....,\underline{v}_k)=L(\underline{b}_1,\underline{b}_2,....,\underline{b}_k)$.

Come corollari del Teorema 1 si trova che

- Uno spazio euclideo di dimensione finita ha sempre una base ortogonale
- Sia V uno spazio euclideo. Esiste sempre la proiezione ortogonale di un vettore $\underline{v}\in V$ su un sottospazio di V di dimensione finita.
- Se V è uno spazio euclideo di dimensione finita, ed H è un suo sottospazio, V è somma diretta di H e $H^\perp$ e $(H^\perp)^\perp=H$.

Esempio 1

A partire dalla base di R^3 data da $\underline{v}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$, $\underline{v}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$, $\underline{v}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$, trovare una base ortonormale di R^3.

La base canonica è una base ortonormale di R3, ma l'esempio chiede di costruirne una applicando l'algoritmo di Gram Schmidt, che va sempre applicato per trovare una base ortonormale di un sottospazio di R^n. Abbiamo che $\underline{b}_1 = \underline{v}_1$, $\underline{b}_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix}$, $\underline{b}_3 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} - \frac{2}{3}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}$ è una base ortogonale di R^3. Per trovare una base ortonormale basta moltiplicare ogni $\underline{b}_i$ per $\frac{1}{\|\underline{b}_i\|}$.

Quindi $\underline{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{b}_1 = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{bmatrix}$, $\underline{q}_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\underline{b}_2 = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\sqrt{\frac{2}{3}}\end{bmatrix}$, $\underline{q}_3 = \sqrt{3}\,\underline{b}_3 = \begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$ è una base ortonormale di R^3.

Matrici ortogonali e isometrie

Def 10. Una matrice quadrata U di ordine n a coefficienti reali si dice *ortogonale* se $U^TU=I_n$.

E' facile verificare che

- U è una matrice ortogonale se e solo se le sue colonne sono verspri a due a due ortogonali (e quindi formano una base ortonormale di R^n).
- Una matrice ortogonale è non singolare e la sua inversa è U^T
- Se U è una matrice ortogonale anche U^T è ortogonale
- Se U e V sono ortogonali anche UV è ortogonale.
- Se U è ortogonale allora det U=±1.
- Sono equivalenti
  - i. U è ortogonale,
  - ii. per ogni $\underline{v} \in R^n$ si ha $\|U\underline{v}\|=\|\underline{v}\|$.
  - iii. per ogni $\underline{v},\underline{w} \in R^n$ si ha $(U\underline{v})^TU\underline{w}=\underline{v}^T\underline{w}$.

i.⇒ii. $\|U\underline{v}\|^2=(U\underline{v})^T(U\underline{v})=\underline{v}^T(U^TU)\underline{v}=\underline{v}^T\underline{v}=\|\underline{v}\|^2$ da cui essendo la norma non negativa si ricava l'asserto.

ii.⇒iii. Segue dalla formula di polarizzazione

iii.⇒i. Essendo $\underline{v}^TU^TU\underline{w}=\underline{v}^TI_n\underline{w}$ per ogni $\underline{v},\underline{w}$ si ha subito $U^TU=I_n$.

- Ogni autovalore reale di una matrice ortogonale U vale 1 o -1.

Infatti se $\underline{v}$ è un autovettore di U associato all'autovalore λ si ha $U\underline{v}=\lambda\underline{v}$, quindi $\|\underline{v}\|=\|U\underline{v}\|=\|\lambda\underline{v}\|=|\lambda|\|\underline{v}\|$, da cui $|\lambda|=1$.

Le matrici ortogonali di ordine 2 sono del tipo $U_1=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\text{sen}\,\theta\\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$, $U_2=\begin{bmatrix}\cos\theta & \text{sen}\,\theta\\ \text{sen}\,\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}$. Il determinante di U_1 è 1 quello di U_2 è -1. La matrice U_1 non ha autovalori reali e la applicazione lineare ad essa associata rappresenta la rotazione del piano attorno all'origine di un angolo θ. La matrice U_2 ha autovalori 1 e -1, l'autospazio relativo all'autovalore 1 è la retta r_1: $(\cos\theta-1)x + y\,\text{sen}\,\theta=0$, che usando le formule di duplicazione diventa $-x\,\text{sen}(\theta/2)+y\cos(\theta/2)=0$; l'autospazio relativo all'autovalore -1 è la retta r_2: $(\cos\theta+1)x+y\,\text{sen}\,\theta=0$ che diventa $x\cos(\theta/2)+y\,\text{sen}(\theta/2)=0$; la applicazione lineare ad essa associata tiene quindi fermi tutti i punti di r_1 e tiene ferma la retta r_2 mandando ogni suo punto nel simmetrico rispetto all'origine, quindi la applicazione lineare associata ad U_2 rappresenta una riflessione ortogonale (simmetria) rispetto ad r_1.

Una matrice ortogonale U di ordine 3 ha sempre almeno un autovalore reale λ che è 1 o -1, e l'applicazione lineare associata ad U quando si riferisce R^3 ad una base ortogonale il cui primo vettore è un autovettore $\underline{q}$ associato a λ è rappresentata da una matrice di uno dei seguenti tipi $U_1= \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ 0 & \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, $U_2= \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \mathrm{sen}\,\theta \\ 0 & \mathrm{sen}\,\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$. Il determinante di U_1 è λ quello di U_2 è -λ. La matrice U_1 ha il solo autovalore reale λ e l'applicazione lineare ad essa associata rappresenta una rotazione di un angolo θ attorno alla retta rappresentata dall'autovettore $\underline{q}$ se λ=1, altrimenti una rotazione più un ribaltamento. La matrice U_2 ha autovalori λ, 1 e -1, si verifica facilmente che gli autovalori sono tutti regolari e che gli autovettori relativi all'autovalore 1 sono ortogonali a quelli relativi all'autovalore -1. Se λ=1 l'autospazio di 1 ha dimensione 2 e quindi è un piano π perpendicolare alla retta r autospazio relativo all'autovalore -1, i punti di π rimangono fermi, mentre i punti di r vanno nei punto della stessa retta simmetrici rispetto ad O, ogni vettore (punto) può essere visto come somma della sua proiezione ortogonale su π e della sua proiezione ortogonale su r e dunque dall'applicazione lineare viene mandato nel vettore simmetrico rispetto a π, pertanto l'applicazione lineare associata ad U_2 rappresenta una riflessione ortogonale (simmetria) rispetto a π. all'autospazio relativo all'autovalore 1. Se λ=-1 l'autospazio di 1 ha dimensione 1 e quindi è una retta r perpendicolare al piano π autospazio relativo all'autovalore -1, i punti di r rimangono fermi, mentre i punti di π vanno nei punto dello stesso piano simmetrici rispetto ad O, ogni vettore (punto) può essere visto come somma della sua proiezione ortogonale su π e della sua proiezione ortogonale su r e dunque dall'applicazione lineare viene mandato nel vettore simmetrico rispetto ad r, pertanto l'applicazione lineare associata ad U_2 rappresenta una riflessione ortogonale (simmetria) rispetto a r. In conclusione ogni applicazione lineare associata ad una matrice di tipo U2 rappresenta una riflessione ortogonale rispetto all'autospazio relativo all'autovalore 1.

Def.11. Siano V_1,V_2 due spazi euclidei le cui norme denotiamo rispettivamente $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$, un'applicazione f: $V_1 \to V_2$ si dice *isometria* se preserva le distanze, ovvero se per ogni $\underline{v},\underline{w} \in V_1$ si ha $\|f(\underline{v})-f(\underline{w})\|_2=\|\underline{v}-\underline{w}\|_1$. Se f è un'isometria che è anche un'applicazione lineare f si chiama *isometria lineare*.

- Un'applicazione lineare è un'isometria se e solo se preserva la norma dei vettori. Infatti se f è un'applicazione lineare, detti $\underline{0}_1$ e $\underline{0}_2$ i vettori nulli di V_1 e V_2 abbiamo $f(0_1)=0_2$, quindi $\|f(\underline{v})\|_2 = \|f(\underline{v})-\underline{0}_2\|_2 = \|f(\underline{v})-f(\underline{0}_1)\|_2=\|\underline{v}-\underline{0}_1\|_1 = \|\underline{v}\|_1$. Viceversa dalla formula di polarizzazione si ha che f conserva il prodotto scalare, inoltre per linearità $f(\underline{v})-f(\underline{w})=f(\underline{v}-\underline{w})$, quindi $\|f(\underline{v})-f(\underline{w})\|_2=\|f(\underline{v}-\underline{w})\|_2 = \sqrt{< f(\underline{v}-\underline{w}),f(\underline{v}-\underline{w})>} = \sqrt{< \underline{v}-\underline{w},\underline{v}-\underline{w} >}\ \|\underline{v}-\underline{w}\|_1$.

Nel piano e nello spazio le rototraslazioni sono isometrie, le rototraslazioni che sono isometrie lineari sono rotazioni o simmetrie ortogonali.

- Le applicazioni lineari associate a matrici ortogonali sono isometrie lineari.

Matrici delle proiezioni ortogonali

Sia H un suo sottospazio di R^n, la funzione $f:R^n \to R^n$ che associa ad un vettore $\underline{v}$ la sua proiezione ortogonale $\underline{v}_H$ su H, è lineare. Cerchiamo di determinare una matrice P tale che $P\underline{v}= \underline{v}_H$ in R^n.

Proposizione 1. Sia $\{\underline{q}_1,\underline{q}_2,\dots,\underline{q}_d\}$ una base ortonormale di H allora detta A la matrice formata dall'accostamento dei vettori $\{\underline{q}_1,\underline{q}_2,\dots,\underline{q}_d\}$ si ha $P=AA^T=\underline{q}_1\underline{q}_1^T+\underline{q}_2\underline{q}_2^T+\dots+\underline{q}_d\underline{q}_d^T$.

Dim. Completiamo $\{\underline{q}_1,\underline{q}_2,\dots,\underline{q}_d\}$ ad una base ortonormale $B=\{\underline{q}_1,\underline{q}_2,\dots,\underline{q}_d,\underline{q}_{d+1},\dots,\underline{q}_n\}$ di R^n. L'applicazione lineare f che manda v in v_H ha rispetto alla base *B* è $D= \left[\begin{array}{c|c} I_d & 0_{(d,n-d)} \\ \hline 0_{(n-d,d)} & 0_{(n-d,n-d)} \end{array}\right]$ in quanto f porta i primi d vettori di *B* in se stessi e i restanti (che sono tutti ortogonali ad H) nel vettore nullo. La matrice P che rappresenta f rispetto alla base canonica è simile a D e la matrice di passaggio è $U=[\underline{q}_1|\underline{q}_2|\ldots|\underline{q}_n]=[A|A']$, quindi $P=UDU^T=[A|A']\left[\begin{array}{c|c} I_d & \underline{0}_{(d,n-d)} \\ \hline \underline{0}_{(n-d,d)} & \underline{0}_{(n-d,n-d)} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} A^T \\ \hline (A')^T \end{array}\right]$ da cui $P=AA^T$. tenuto poi conto che *B* è una base ortonormale $P=AA^T$,Da qui, tenuto conto che B è una base ortonormale si trova l'ultima uguaglianza.

Le matrici di proiezione sono caratterizzate dalla seguente

<u>Proposizione 2</u>. Una matrice P quadrata reale di ordine n è la matrice della proiezione ortogonale su un sottospazio H di R^n se e solo se

- $P^2=P$ (P idempotente),
- $P^T=P$ (P simmatrica),

Se le precedenti condizioni sono verificate, H =Col(P) ed $H^\perp$ =ker P.

Dim. Supponiamo che P sia la matrice di proiezione su un sottospazio H di V. Per ogni vettore $\underline{v}\in V$, $P\underline{v}\in H$ e quindi $P(P\underline{v})=P\underline{v}$, da cui per l'arbitrarietà di $\underline{v}$, si ha $P^2=P$. Poiché $P=AA^T$, si ha subito che $P^T=P$. Viceversa supponiamo che $P^2=P$ e $P^T=P$. $P\underline{v}$ appartiene allo spazio delle colonne di P essendo una combinazione lineare delle colonne di P. Mostriamo che $\underline{v}$-Pv è ortogonale allo spazio Col(P) delle colonne di P, questo significa mostrare che $\underline{v}-P\underline{v}\in Col(P)^\perp=(Row\ P)^\perp=\ker P$, perché P è simmetrica. Infatti $P(\underline{v}-P\underline{v})=\underline{0}$ perché $P^2=P$. Dunque $P\underline{v}$ è la proiezione di $\underline{v}$ sullo spazio H=Col(P) ed abbiamo già visto che $Col(P)^\perp$=ker P.

<u>Proposizione 3</u>. Sia H un sottospazio di uno spazio Euclideo V, la matrice della riflessione (simmetria) ortogonale rispetto ad H è I-2P , dove P' è la matrice proiezione ortogonale su $H^\perp$.

Dim. Sia $\underline{v}\in V$ poiché V è somma diretta di H e $H^\perp$ il vettore $\underline{v}$ si scrive in uno e un sol modo nella forma $\underline{v}=\underline{v}_1+\underline{v}_2$ con $\underline{v}_1\in H$, $\underline{v}_2\in H^\perp$. Sia Q la matrice della riflessione (simmetria) ortogonale rispetto ad H, si ha $Q\underline{v}=Q(\underline{v}_1+\underline{v}_2)=Q\underline{v}_1+Q\underline{v}_2$, ma $Q\underline{v}_1=\underline{v}_1=\underline{v}-\underline{v}_2$, $Q\underline{v}_2=-\underline{v}_2=-\underline{v}P'$, dove P' è la matrice proiezione ortogonale su $H^\perp$.