Esame di Geometria e Algebra Lineare

Politecnico di Milano – Ingegneria informatica – Appello 11 Luglio 2014

Cognome:	Nome:	Matricola:

Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.

1. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ k & k & k \end{pmatrix}.$$

   1. Determinare per quali valori del parametro reale k la matrice A è diagonalizzabile.
   2. Esistono valori di k per cui A è ortogonalmente diagonalizzabile? In caso affermativo trovare una matrice Q ortogonale che diagonalizza A.

Esame di Geometria e Algebra Lineare **Politecnico di Milano – Ingegneria informatica – Appello 11 Luglio 2014**		
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

2. Sia $V = \mathbb{R}^4$ e $U = \{\mathbf{x} = (x\ y\ z\ w)^T | y - z - w = 0\} \subset V$.

   1. Trovare una base ortonormale di U.

   2. Verificare se $\mathbf{v} = (2\ 1\ \ -3\ 1)^T$ appartiene ad U e calcolare la sua proiezione ortogonale su U.

Esame di Geometria e Algebra Lineare **Politecnico di Milano – Ingegneria informatica – Appello 11 Luglio 2014**		
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

3. Fissato un sistema di riferimento ortonormale $\mathcal{B}_O$ nello spazio, sia $\mathcal{C}$ la curva di equazioni:

$$\mathcal{C}|_{\mathcal{B}_O} : \begin{cases} x^2 + y^2 - 6xy + 4x + 4y - 6 = 0 \\ z = 0 \end{cases} .$$

1. Scrivere una forma canonica di $\mathcal{C}$ e trovare la corrispondente rototraslazione.
2. Trovare (se esistono) centro ed assi di simmetria di $\mathcal{C}$ e tracciare un grafico qualitativo di $\mathcal{C}$.
3. Scrivere il sistema di equazioni relativo alla superficie di rotazione $\mathcal{S}$ ottenuta ruotando $\mathcal{C}$ rispetto ad un suo asse di simmetria. Che tipo di superficie è $\mathcal{S}$?

Esame di Geometria e Algebra Lineare		
Politecnico di Milano – Ingegneria informatica – Appello 11 Luglio 2014		
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

4. Dato $V = \mathbb{R}^4$, siano

$$\mathbf{v_1} = (1\ 1\ 1\ 1)\,, \qquad \mathbf{v_2} = (0\ 1\ 1\ 1)\,, \qquad \mathbf{v_3} = (0\ \ -1\ 0\ 1)\,, \qquad \mathbf{v_4} = (0\ 1\ 0\ 1)$$

vettori di V e $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ un'applicazione lineare tale che

$$f(\mathbf{v_1}) = \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2} + 2\mathbf{v_3}, \qquad f(\mathbf{v_2}) = 3\mathbf{v_2} + \mathbf{v_3}, \qquad f(\mathbf{v_3}) = \mathbf{v_1} + \mathbf{v_4}, \qquad f(\mathbf{v_4}) = -2\mathbf{v_2} + \mathbf{v_3} - \mathbf{v_4}.$$

1. Verificare se $\mathcal{B} = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \mathbf{v_4}\}$ è una base di V.
2. L'applicazione f è univocamente determinata? Scrivere una matrice A che rappresenti f.
3. Trovare una base di $\ker(A)$ e dello spazio delle colonne di A.
4. Trovare una base di $\ker(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$.

Soluzioni

1. (a) Il polinomio caratteristico di A è:

$$P_A(\lambda; k) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 0 \\ k & k & k-\lambda \end{vmatrix} = (k-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 8) = (k-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-4).$$

- Se $k \neq 2, 4$ gli autovalori sono distinti e quindi A è diagonalizzabile.
- Se $k = 2$ l'autovalore $\lambda = 2$ ha molteplicità algebrica 2. L'autospazio associato è

$$V_2 = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

  Per il teorema di Rouchè-Capelli si ha $\dim(V_2) = 3 - 1 = 2$, quindi la molteplicità geometrica di $\lambda = 2$ è 2 ed A è diagonalizzabile.
- Se $k = 4$ l'autovalore $\lambda = 4$ ha molteplicità algebrica 2. L'autospazio associato è

$$V_4 = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

  Per il teorema di Rouchè-Capelli si ha $\dim(V_4) = 3 - 2 = 1$, quindi la molteplicità geometrica di $\lambda = 2$ è 1 ed A non è diagonalizzabile.

(b) Per il teorema spettrale, A è ortogonalmente diagonalizzabile ripetto al prodotto scalare canonico se e solo se è simmetrica, ovvero se e solo se $k = 0$. In tal caso si ha:

$$V_0 = \ker \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad V_2 = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right),$$

$$V_4 = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Dopo avere normalizzato gli autovettori si ottiene la matrice ortogonale Q che diagonalizza A:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. (a) Per il teorema di Rouchè-Capelli si ha $\dim(U) = 4 - 1 = 3$. Risolvendo il sistema lineare che definisce $U = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, si ottiene una base $\mathcal{B}_U$ del sottospazio formata da tre vettori:

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Per ottenere una base ortogonale (rispetto al prodotto scalare standard) possiamo applicare l'algoritmo di Gram-Schmidt:

$$\mathbf{v_1'} = \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_2'} = \mathbf{v_2} - \frac{\mathbf{v_1'} \cdot \mathbf{v_2}}{\|\mathbf{v_1'}\|^2}\mathbf{v_1'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{v_3'} = \mathbf{v_3} - \frac{\mathbf{v_1'} \cdot \mathbf{v_3}}{\|\mathbf{v_1'}\|^2}\mathbf{v_1'} - \frac{\mathbf{v_2'} \cdot \mathbf{v_3}}{\|\mathbf{v_2'}\|^2}\mathbf{v_2'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Effettuiamo infine la normalizzazione, ottenendo la base ortonormale $\tilde{\mathcal{B}}_U = \{\tilde{\mathbf{v}}_1, \tilde{\mathbf{v}}_2, \tilde{\mathbf{v}}_3\}$ con

$$\tilde{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{v}}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

(b) Il vettore $\mathbf{v}$ non appartiene ad U perché le sue componenti non soddisfano l'equazione che definisce il sottospazio: $1+3-1 \neq 0$. La proiezione di $\mathbf{v}$ su U è:

$$P_U(\mathbf{v}) = (\tilde{\mathbf{v}}_1 \cdot \mathbf{v})\,\tilde{\mathbf{v}}_1 + (\tilde{\mathbf{v}}_2 \cdot \mathbf{v})\,\tilde{\mathbf{v}}_2 + (\tilde{\mathbf{v}}_3 \cdot \mathbf{v})\,\tilde{\mathbf{v}}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3. (a) La curva è una conica nel piano orizzontale, con matrici associate

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Gli invarianti metrici sono $I_1 = 2,\ I_2 = -8,\ I_3 = 16$, pertando la conica è un'iperbole non equilatera. Il polinomio caratteristico di A è

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 8 = (\lambda+2)(\lambda-4)$$

e gli autovalori sono $\lambda = -2, 4$, mentre $\tilde{a}_{33} = \frac{|B|}{|A|} = -2$. Esiste di conseguenza un sistema di riferimento canonico $\tilde{\mathcal{B}}_O$ in cui la conica ha equazione:

$$\mathcal{C}|_{\tilde{\mathcal{B}}_O} : \begin{cases} X^2 - 2Y^2 + 1 = 0 \\ Z = 0 \end{cases}.$$

I due sistemi di riferimento $\mathcal{B}_{\mathcal{O}}$ e $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{O}}$ sono legati dalla rototraslazione

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \mathbf{v}.$$

L'origine $\tilde{O}$ del nuovo sistema coincide con il centro C della conica. Quest'ultimo è contenuto nel piano $z = 0$ e le sue coordinate x_C, y_C rispetto a $\mathcal{B}_O$ si ottengono risolvendo il sistema lineare:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -2 \\ -3 & 1 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \quad C|_{\mathcal{B}_O} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il vettore di traslazione è quindi

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Due assi di $\tilde{\mathcal{B}}_O$ sono contenuti nel piano $z = 0$ e sono paralleli agli autospazi di A :

$$V_{-2} = \ker \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad V_4 = \ker \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Ne segue che due vettori ortonormali costituenti $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{O}}$ sono:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il rimanente terzo asse è perpendicolare al piano stesso:

$$\mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice di rotazione è di conseguenza:

$$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si noti che $|Q| = 1$, il che implica che $\tilde{\mathcal{B}} = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ è una terna ortonormale destrorsa.

(b) Il centro è stato individuato nel punto precedente. Esistono due assi di simmetria di $\mathcal{C}$, coincidenti con gli assi del sistema di riferimento $\tilde{\mathcal{B}}_O$ contenuti nel piano orizzontale:

$$\begin{array}{l} r_1: \ \mathbf{x}(t) = \mathcal{C} + \mathbf{v_1} \\ r_2: \ \mathbf{x}(t) = \mathcal{C} + \mathbf{v_2} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} r_1|_{\mathcal{B}_O}: \ x - y = 0 \\ r_2|_{\mathcal{B}_O}: \ x + y - 2 = 0 \end{array}.$$

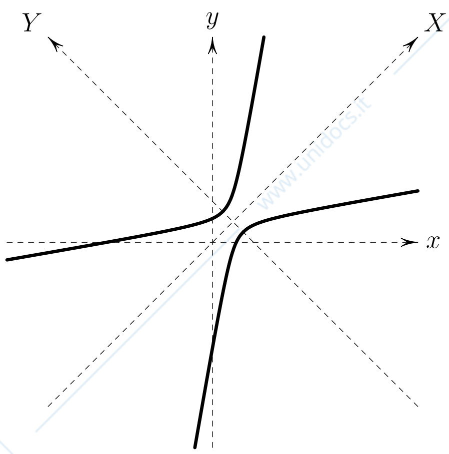

Figure 1: L'iperbole $\mathcal{C}$ ed i due sistemi di riferimento $\mathcal{B}_O$, $\tilde{\mathcal{B}}_O$.

(c) Lavoriamo nel sistema di riferimento $\tilde{\mathcal{B}}_O$. Ruotando $\mathcal{C}$ rispetto all'asse X otteniamo l'iperboloide ad una falda $\mathcal{Q}_1$ descritto dal sistema di equazioni:

$$\begin{cases} X = X_0 \\ Y^2 + Z^2 = Y_0^2 + Z_0^2 \\ X_0^2 - 2Y_0^2 + 1 = 0 \\ Z_0 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{Q}_1|_{\tilde{\mathcal{B}}_O}: \ X^2 - 2Y^2 - 2Z^2 + 1 = 0.$$

Ruotando $\mathcal{C}$ rispetto all'asse Y otteniamo l'iperboloide a due falde $\mathcal{Q}_2$ descritto dal sistema di equazioni:

$$\begin{cases} Y = Y_0 \\ X^2 + Z^2 = X_0^2 + Z_0^2 \\ X_0^2 - 2Y_0^2 + 1 = 0 \\ Z_0 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{Q}_2|_{\tilde{\mathcal{B}}_O}: \ X^2 - 2Y^2 + Z^2 + 1 = 0.$$

4. (a) Calcoliamo il rango della matrice le cui righe sono i vettori $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \mathbf{v_4}$:

$$r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4.$$

Segue che i vettori sono linearmente indipendenti e quindi costituiscono una base di $\mathbb{R}^4$.

(b) L'applicazione è univocamente determinata perché è nota la sua azione sugli elementi di una base. La matrice che rappresenta l'endomorfismo rispetto alla base $\mathcal{B}$ è:

$$A_{f,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} f(\mathbf{v_1})|_{\mathcal{B}} & f(\mathbf{v_2})|_{\mathcal{B}} & f(\mathbf{v_3})|_{\mathcal{B}} & f(\mathbf{v_4})|_{\mathcal{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = A.$$

(c) Riduciamo a scala la matrice A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo $\dim(C(A)) = r(A) = 3$ ed una base di $C(A)$ è costituita dalle prime tre colonne

$$\mathcal{B}_{C(A)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Per il teorema del rango, $\dim(\ker(A)) = n - r(A) = 4 - 3 = 1$. Risolvendo il sistema lineare omogeneo associato ad A, abbiamo:

$$\mathcal{B}_{\ker(A)} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(d) Per l'isomorfismo della mappa delle coordinate, abbiamo $\mathrm{Im}(f) \simeq C(A)$ e $\ker(f) \simeq \ker(A)$ e quindi:

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Im}(f)} = \{f(\mathbf{v_1}), f(\mathbf{v_2}), f(\mathbf{v_3})\} = \{(1\ 0\ 2\ 4), (0\ 2\ 3\ 4), (1\ 2\ 1\ 2)\},$$

$$\mathcal{B}_{\ker(f)} = \{-\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2} + \mathbf{v_3} + \mathbf{v_4}\} = \{(1\ 2\ 2\ 4)\}.$$