Data per l'orale: | 7/9 | 14/9 |

Esame di Geometria e Algebra Lineare

Politecnico di Milano – Ingegneria informatica e delle telecomunicazioni – 4 settembre 2017

Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. I compiti privi di indicazione leggibile di nome e cognome non verranno corretti.

1. Si considerino i piani

$$\alpha:\ x-y+hz=0, \qquad \beta:\ x-hz+1=0, \qquad \gamma:\ y-z-2h=0,$$

dove h è un parametro reale.

(a) Determinare gli eventuali valori di $h \in \mathbb{R}$ per cui i tre piani hanno una retta in comune.

(b) Trovare gli eventuali valori di $h \in \mathbb{R}$ per cui la retta $r = \alpha \cap \beta$ e la retta $s:\ x-y=y+z-2=0$ sono incidenti.

(c) Stabilire se esistono valori di $h \in \mathbb{R}$ per cui le rette r ed s sono sghembe.

Soluzione.

(a) I piani

$$\alpha:\ x-y+hz=0, \qquad \beta:\ x-hz+1=0, \qquad \gamma:\ y-z-2h=0,$$

hanno una retta in comune se e solo se il sistema formato dalle tre equazioni dei piani è possibile ed ammette ∞^1 soluzioni, ovvero se e solo se il rango della matrice dei coefficienti è uguale al rango della matrice completa ed è 2.
Applichiamo quindi le mosse di Gauss alla matrice completa del sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & h & 0 \\ 1 & 0 & -h & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2h \end{array}\right)$$

Aggiungiamo alla seconda riga la prima moltiplicata per -1 ed abbiamo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & h & 0 \\ 0 & 1 & -2h & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2h \end{array}\right)$$

e aggiungendo alla terza riga la seconda moltiplicata per -1 abbiamo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & h & 0 \\ 0 & 1 & -2h & -1 \\ 0 & 0 & -1+2h & 2h+1 \end{array}\right).$$

Perché il sistema sia possibile ed ammetta ∞^1 soluzioni dovrebbe quindi essere $1-2h = 1+2h = 0$ che è impossibile, quindi i tre piani non hanno mai una retta comune.

(b) Soluzione A. Affinché le due rette r ed s siano incidenti, il sistema formato dalle loro equazioni deve essere possibile. Consideriamo la matrice completa del sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & h & 0 \\ 1 & 0 & -h & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

togliendo sia dalla seconda sia dalla terza riga la prima, abbiamo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & h & 0 \\ 0 & 1 & -2h & -1 \\ 0 & 0 & -h & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right),$$

da cui togliendo alla quarta riga la seconda abbiamo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & h & 0 \\ 0 & 1 & -2h & -1 \\ 0 & 0 & -h & 0 \\ 0 & 0 & 1+2h & 3 \end{array}\right).$$

Ora se $h = 0$ il sistema ha una ed una sola soluzione e le rette sono incidenti, se $h \neq 0$, togliendo alla quarta riga la terza moltiplicata per $\frac{1+2h}{h}$ si ottiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & h & 0 \\ 0 & 1 & -2h & -1 \\ 0 & 0 & -h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right),$$

ed il sistema è impossibile.
Soluzione B. In forma parametrica la retta s ha equazioni

$$s: \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases}.$$

Sostituendo questi valori (che rappresentano le coordinate del generico punto di s) nelle equazioni di r si ottiene il sistema

$$\begin{cases} t - t + h(2-t) = 0 \\ t - h(t-2) + 1 = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} h(2-t) = 0 \\ t(1-h) + 2h + 1 = 0 \end{cases}$$

Questo sistema per $h = 0$ ammette la soluzione $t = -1$, mentre per $h \neq 0$ non ha soluzioni, quindi le rette sono incidenti solo per $h = 0$.

(c) Le rette r ed s non sono incidenti per $h \neq 0$. Vediamo se per qualche valore di h sono parallele. I parametri direttori di s sono $(1, 1, -1)$, quelli di r sono $(h, 2h, 1)$ e le due terne non sono mai proporzionali, per cui le due rette non sono mai parallele, dunque sono sghembe per ogni $h \neq 0$.

2. In $\mathbb{R}^4$ siano dati i sottospazi vettoriali $V = \langle(1,0,0,-1),(0,1,2,1),(1,1,2,0)\rangle$ ed $U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + kt = 0\}$, dove k è un parametro reale.

   (a) Determinare la dimensione ed una base di V.

   (b) Scrivere le equazioni cartesiane di V.

   (c) Trovare gli eventuali valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $V \cap U = V$.

Soluzione.

(a) Soluzione A. Si vede facilmente che il terzo vettore è somma dei primi due, dunque V ha dimensione 2 e una sua base è $\mathcal{B}_V = \{(1,0,0,-1),(0,1,2,1)\}$.
Soluzione B. Per vedere se i tre generatori di V sono linearmente indipendenti, si considera il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aggiungendo alla quarta riga la prima, togliendo alla terza la prima moltiplicata per 2, abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ed ancora togliendo alla quarta riga la seconda abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

per cui la matrice ha rango 2, il terzo vettore è combinazione lineare dei primi due e V ha dimensione 2 e una sua base è $\mathcal{B}_V = \{(1,0,0,-1),(0,1,2,1)\}$.

(b) Le equazioni parametriche di V sono

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \nu \\ z = 2\nu \\ t = -\lambda + \nu \end{cases}.$$

Eliminando i parametri λ, ν otteniamo le equazioni cartesiane di V

$$\begin{cases} y - 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}.$$

(c) Soluzione A. Affinché sia $V \cap U = V$, deve essere $V \subseteq U$, quindi ogni vettore di V deve appartenere ad U e questo accade se ogni vettore di una base di V sta in U. Il primo vettore di $\mathcal{B}_V$ appartiene a V se $1 - k = 0$ ed il secondo vettore di $\mathcal{B}_V$ appartiene a V se $-1 + k = 0$, ovvero deve essere $k = 1$.
Soluzione B. Si ha $V \cap U = V$ se e solo se $dim(V \cap U) = 2$. Calcoliamo $dim(U)$ e $dim(U + V)$. Ovviamente $dim(U) = 3$ per ogni valore di k. Il generico vettore di U ha la forma $(a - kb, a, c, b)$, con a, b, c parametri reali e una base di U è $\mathcal{B}_U = \{(0,0,1,0),(1,1,0,0),(-k,0,0,1)\}$. Per calcolare $dim(U + V)$ consideriamo il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -k \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che, sommando alla quarta riga la prima, togliendo alla terza riga la seconda moltiplicata per 2 e togliendo alla quarta la seconda, diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -k \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-k \end{pmatrix}.$$

La matrice ha dunque rango 3 se $k = 1$ e rango 4 se $k \neq 1$. Pertanto $dim(U \cap V) = dim(U) + dim(V) - dim(U + V) = 2$ se e solo se $dim(U + V) = 3$ e quindi se e solo se $k = 1$.

3. Nel piano si considerino i punti $F = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e $V = (0, 0)$.
   (a) Scrivere l'equazione della parabola $\mathcal{C}$ che ha F come fuoco e V come vertice.
   (b) Scrivere l'equazione canonica di tale parabola.
   (c) Determinare le equazioni della trasformazione che riduce $\mathcal{C}$ in forma canonica.

Soluzione.

1. La retta FV è l'asse della parabola ed ha equazione $x = y$, la direttrice della parabola è la perpendicolare all'asse passante per il simmetrico F' di F rispetto a V. F' ha coordinate $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ e la direttrice della parabola ha dunque equazione $x + y + 1 = 0$: la parabola, luogo dei punti equidistanti da fuoco e direttrice ha pertanto equazione $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{(x+y+1)^2}{2}$ quindi $2(x^2 + y^2 - x - y + \frac{1}{2}) = x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y + 1$ ovvero $x^2 + y^2 - 2xy - 4x - 4y = 0$.

2. Soluzione A. La parabola $\mathcal{C}$ ha come matrici associate

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori di A sono le radici di $(\lambda - 1)^2 - 1$ quindi sono $0, 2$. La forma canonica di $\mathcal{C}$ ha allora la forma $2X^2 + 2pY = 0$. Essendo $det(B)$ un invariante deve essere $det(B) = -16 = -2p^2$ da cui $p = \pm 2\sqrt{2}$ e quindi una forma canonica è $X^2 - 2\sqrt{2}Y = 0$.
Soluzione B. Senza usare autovalori e autovettori si può osservare che con una rotazione di $\frac{\pi}{4}$ il fuoco della parabola viene portato nel punto di coordinate $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$, l'asse è portato nell'asse Y e la direttrice nella retta $Y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ e quindi l'equazione diventa $X^2 + (Y - \frac{1}{\sqrt{2}})^2 = (Y + \frac{1}{\sqrt{2}})^2$ ovvero $X^2 - 2\sqrt{2}Y = 0$.

3. Soluzione A. Cerchiamo gli autovettori di A. Gli autovettori relativi all'autovalore 2 sono della forma $(h, -h)$ con $h \neq 0$, quelli relativi all'autovalore 0 hanno la forma $(k, -k)$ con $k \neq 0$, essendo A simmetrica sono fra loro ortogonali e quindi normalizzando si ottiene la matrice di rotazione

$$U = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Soluzione B. La trasformazione che riduce $\mathcal{C}$ in forma canonica è una rotazione di $\frac{\pi}{4}$ e quindi diventa

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}y \end{cases}$$