

Soluzione esercizi proposti su sottospazi e applicazioni lineari

Esercizio 1

Si consideri il sistema lineare $Ax=b$ dove la matrice completa del sistema è $[A|b]=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & b \\ a & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & a & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$

con a, b parametri reali.

- (1) Stabilire se e quante soluzioni ammette il sistema, al variare di a, b .
- (2) Determinare se esistono valori di a, b per i quali il sistema ammette $X = (-4, -4, 5)_T$ tra le soluzioni.
- (3) Posto $a = 1$ e $b = 0$, ed interpretando $[A|b]$ come matrice rappresentativa, rispetto alle basi canoniche, di un' applicazione lineare $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, determinare due matrici C , di tipo 3×2 , e D , di tipo 2×4 , che verificano l'uguaglianza $CD = [A|b]$. Le matrici C e D esistono anche se poniamo $a = b = 0$?

Traccia di soluzione

Punto (1). Effettuiamo le operazioni elementari di aggiungere alla seconda e alla terza riga della matrice

$[A|b]$ la prima moltiplicata per -1 ed otteniamo la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & b \\ a-1 & 0 & 0 & | & 1-b \\ 0 & a-1 & 0 & | & 1-b \end{pmatrix}$.

Se $a-1 \neq 0$, le matrici A ed $[A|b]$ risultano entrambe di rango 3.

Se $a = 1$; la matrice A è ridotta per righe, ed ha rango 1; mentre la matrice $[A|b]$ risulta avere rango 2 se $1-b \neq 0$, mentre risulta avere rango 1 se $1-b = 0$. In conclusione, $\text{rk}(A)=\text{rk}([A|b])=3$ se $a \neq 1$ ed in tal caso, per il teorema di Rouché Capelli, il sistema ha una ed una sola soluzione.

Se $a=1$ allora: se $b=1$ $\text{rk}(A)=\text{rk}([A|b])=1$ ed in tal caso, per il teorema di Rouché Capelli, il sistema ammette ∞^2 soluzioni, se invece $b \neq 1$ allora $\text{rk}(A)=1$ e $\text{rk}([A|b])=2$ per cui il sistema è impossibile.

Punto (2). Sostituendo alle incognite i valori proposti, otteniamo le seguenti equazioni in a e b :
$$\begin{cases} -3=b \\ -4a+1=1 \\ -4a+1=1 \end{cases}$$

ed è evidente che il sistema ha l'unica soluzione $a=0, b=-3$.

Punto (3). Per $a=1$ e $b=0$ la matrice $A'=[A|b]$ diventa (eliminando il separatore) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

L'applicazione lineare $f_{A'}$ associata a tale matrice ha lo spazio $\text{Im } f_{A'}$ generato dai due vettori colonna

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Cercare C , di tipo $(3,2)$, e D , di tipo $(2,4)$, tali che $CD = A'=[A|b]$ è come cercare due applicazioni

lineari f_C e f_D tali che $f_{A'} = f_C \circ f_D$, quindi $\text{Im } f_C$ deve coincidere con $\text{Im } f_{A'}$ e dunque possiamo prendere

$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, visto che quindi $\text{Im } f_C = \text{Col } C$. Ora troviamo $D = \begin{bmatrix} x & y & z & t \\ x' & y' & z' & t' \end{bmatrix}$ tale che $CD=A'$. Si trova subito

$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Per $a=b=0$, la matrice A' ha rango 3 e quindi non può essere scritta come CD con C di tipo 3×2 , e D di tipo 2×4 , perché in tal caso $\text{rk}(A') > \text{rk}(C)$, mentre sappiamo che $\text{rk}(CD) \leq \min(\text{rk}(C), \text{rk}(D))$.

Esercizio 2

Si considerino in \mathbb{R}^4 i sottospazi

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y - t = y + z = 0\}, \quad W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z - t = 0\}.$$

Trovare una base per U una base per W , una base per $U \cap W$ e una per $U + W$.

Traccia di soluzione

Il generico vettore di U ha la forma $(x, y, -y, x - 2y) = x(1, 0, 0, 1) + y(0, 1, -1, -2)$. I vettori $(1, 0, 0, 1)$ e $(0, 1, -1, -2)$ generano quindi U e sono linearmente indipendenti, quindi formano una base di U .

Il generico vettore di W ha la forma $(x, y, z, x - y + z) = x(1, 0, 0, 1) + y(0, 1, 0, -1) + z(0, 0, 1, 1)$. I tre vettori $(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, 1)$ sono quindi un insieme di generatori di W . Essi sono anche linearmente

indipendenti perché è facile verificare che la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (formata dall'accostamento

in dei tre vettori uno sull'altro) ha rango 3 e quindi ha tre righe linearmente indipendenti. Pertanto i tre vettori $(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, 1)$ sono una base di W . $U + W$ è generato dall'unione dei generatori di U e di W e quindi un sistema di generatori per $U + W$ è $(1, 0, 0, 1), (0, 1, -1, -2), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, 1)$. Verifichiamo se questi quattro vettori sono linearmente indipendenti. Consideriamo al solito la matrice formata dall'accostamento verticale di questi quattro vettori. Si ha

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ che ha determinante nullo, pertanto ha rango minore di 4. I quattro vettori riga

dunque sono linearmente dipendenti. Poiché sappiamo che i vettori costituiti da prima, terza e quarta riga sono linearmente indipendenti, abbiamo allora che essi sono una base per $U + W$, essendo un insieme massimale di vettori linearmente indipendenti estratto da un insieme di generatori. Questo dice anche che $U + W = W$ in quanto $U + W$ e W hanno lo stesso insieme di generatori. Come conseguenza $U \subseteq W$ e dunque $U \cap W = U$ ed una base per $U \cap W$ è la base che abbiamo trovato per U .

Esercizio 3

Si considerino i sottospazi U, V di \mathbb{R}^4 generati nella maniera seguente $U = L((1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0))$; $V = L((1, -1, 1, -1), (-1, 0, 1, 0))$. Determinare una base e la dimensione del sottospazio $U + V$. Utilizzando la formula di Grassmann calcolare la dimensione del sottospazio $U \cap V$.

Traccia di soluzione

I vettori $(1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0)$ sono linearmente indipendenti e quindi sono una base per U . Analogamente i vettori $(1, -1, 1, -1), (-1, 0, 1, 0)$ sono linearmente indipendenti e quindi sono una base per V . Lo spazio $U + V$ è generato dai vettori $(1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0), (1, -1, 1, -1), (-1, 0, 1, 0)$. C'è dunque una base di $U + V$ contenuta in questo insieme di vettori. Vedendo questi quattro vettori come le righe di una matrice A di tipo $(4, 4)$, si ha

$$\det A = 0, \text{ infatti } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Quindi i 4 vettori sono linearmente dipendenti. Osserviamo che il minore formato dalle righe 1,2,4, e dalle colonne 1,2,3 è $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$ quindi il primo, secondo e quarto vettore sono linearmente indipendenti e quindi formano una base per $U+V$. Poiché $\dim(U+V)+\dim(U\cap V)=\dim U+\dim V$, abbiamo che $\dim(U\cap V)=1$ (una base di $U\cap V$ è il vettore $(1,-1,1,-1)$ che appartiene a V e si può anche scrivere come combinazione lineare dei vettori della base di U e quindi appartiene ad U).

Esercizio 4

Sia data la funzione lineare $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da: $T: (x,y,z,w) \rightarrow (x+2y-z+w, z+w)$. Calcolare le dimensioni del nucleo e dell'immagine di T .

Traccia di soluzione

La matrice associata alla funzione lineare T rispetto alle basi canoniche è $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ed ha ovviamente rango 2. Quindi $\dim \text{Im } T=2$, pertanto $\text{Im } T=\mathbb{R}^2$ ed una base per $\text{Im } T$ è la base canonica di \mathbb{R}^2 . Il

$\ker T$ ha equazioni $\begin{cases} x+2y-z+w=0 \\ z+w=0 \end{cases}$ da cui troviamo $\begin{cases} x=t \\ y=u \\ z=\frac{t+2u}{2} \\ w=-\frac{t+2u}{2} \end{cases}$, quindi una base di $\ker T$ è $\left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{array} \right]$.

Esercizio 5

Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito come $f((x, y, z)) = (0, 3x + 3y + z, -x - y + z)$. Determinare una base e la dimensione di $\ker(f)$ ed $\text{Im}(f)$.

Traccia di soluzione

La matrice associata all'endomorfismo f rispetto alle basi canoniche è $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Poiché $\text{rk}(A)=2$, $\dim \text{Im } f=2$ e $\text{Im } f$ è lo spazio generato dalle colonne di A , quindi una base per $\text{Im } f$ è

$$\left[\begin{array}{c} 0 \\ 3 \\ -1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right].$$

Si ha poi $\dim \ker f=3-2=1$ (teorema di nullità e rango). $\ker f$ è definito dalle equazioni $\begin{cases} 3x+3y+z=0 \\ -x-y+z=0 \end{cases}$,

quindi può essere scritto come $\begin{bmatrix} k \\ -k \\ 0 \end{bmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$ e pertanto una sua base è formata dal vettore $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Esercizio 6

Si consideri l'endomorfismo $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito come $T(x, y, z) = (-x - y - 2z, x + y + 2z, 2x + 2y + 2z)$.

(a) Si calcoli la matrice A associata a T rispetto alla base canonica B di \mathbb{R}^3 .

(b) Si calcoli il nucleo di $T^2 = T \circ T$.

Traccia di soluzione

La matrice associata a T rispetto alla base canonica è $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. La matrice associata a T^2 è A^2 ,

calcoliamo $A^2 = \begin{bmatrix} -4 & -4 & -4 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$. Il nucleo di T^2 , $\ker T^2$, è il nucleo di A^2 (essendo A la matrice che

rappresenta T rispetto alla base canonica) e dunque ha equazione $4x+4y+4z=0$, ha dimensione 2 e base

$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, in altre parole è $\left\{ \begin{bmatrix} -a-b \\ a \\ b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

Esercizio 7

Provare che esiste uno ed un solo endomorfismo Φ di \mathbb{R}^4 (cioè una e una sola applicazione lineare $\Phi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$) tale che

$$\Phi \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix},$$

Trovare la matrice associata a Φ rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^4 . Determinare $\ker \Phi$ ed $\text{Im } \Phi$.

Traccia di soluzione

I vettori $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ sono linearmente indipendenti in quanto $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, quindi

sono una base B di \mathbb{R}^4 ed un'applicazione lineare da V a W con $\dim V$ finita è univocamente determinata quando si conoscono le immagini dei vettori di una base. La matrice associata all'endomorfismo Φ rispetto

alla base B e alla base canonica di \mathbb{R}^4 è $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$. Se invece vogliamo la matrice associata a Φ

rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^4 dobbiamo trovare le immagini mediante Φ dei vettori della base canonica

(o usare la formula del cambiamento di base). Si ha subito che $\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, dunque $\Phi(\underline{e}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -7 \\ -15 \end{bmatrix}$, allo

stesso modo $\underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e dunque $\Phi(\underline{e}_2) = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 14 \\ 30 \end{bmatrix}$ ed infine $\underline{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, quindi $\Phi(\underline{e}_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \\ -8 \end{bmatrix}$. La

matrice che rappresenta rispetto alla base canonica è allora $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -7 & 14 & -4 & 4 \\ -15 & 30 & -8 & 8 \end{bmatrix}$.

I vettori di $\ker \Phi$, rispetto alla base canonica, sono $\left\{ \begin{bmatrix} 2a \\ a \\ b \\ b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

Notate che se avessimo scritto questi vettori rispetto alla base B avremmo avuto l'insieme $\left\{ \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

Il sottospazio $\text{Im } \Phi$ è lo spazio generato dalle colonne di C, cioè $L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -7 \\ -15 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}\right)$. Osservate che coincide

con lo spazio generato dalle colonne di A, $L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}\right)$. Infatti i due spazi hanno la stessa dimensione e

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -7 \\ -15 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} \in L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -7 \\ -15 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}\right).$$

Esercizio 8

Sia T la funzione lineare $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ associata alla matrice $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & t \end{bmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, rispetto alle basi

canoniche.

i) Per quali $t \in \mathbb{R}$ la funzione T è suriettiva?

ii) Determinare $\ker(T)$ e $\text{Im}(T)$.

iii) Porre $t = 1$. Determinare una base B di \mathbb{R}^4 e una base B' di \mathbb{R}^3 tali che la matrice $M(T)_{B'}^B$ che rappresenta

l'applicazione rispetto alle basi B e B' quando $t = 1$, sia $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Traccia di soluzione

Punto i). Affinché T sia una funzione suriettiva, lo spazio generato dalle colonne di T deve avere

dimensione 3 e dunque deve essere $\text{rk}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & t \end{bmatrix}\right) = 3$. Questo avviene per ogni valore di t in quanto

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2.$$

Punto ii). Essendo T suriettiva per ogni valore di t , è sempre $\text{Im}T = \mathbb{R}^3$. Per il teorema di nullità più rango si ha $\dim \ker T = 1$ e $\ker T$ è rappresentato dalle soluzioni del sistema $\begin{cases} x+y+2z=0 \\ 2x+y+v=0 \\ x+y+tv=0 \end{cases}$ ed è dunque (al variare

$$\text{di } t, \begin{cases} x=(t-1)u \\ y=(2-t)u \\ z=\frac{t}{2}u \\ v=u \end{cases} \text{ cioè } \left\{ \begin{bmatrix} (t-1)u \\ (2-t)u \\ \frac{t}{2}u \\ u \end{bmatrix} \mid u \in \mathbb{R} \right\}$$

Punto iii). Per $t=1$, la trasformazione T rispetto alle basi canoniche ha matrice associata $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

ed il suo nucleo è generato da $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. La base B di \mathbb{R}^4 che andiamo a cercare deve avere come quarto vettore

un vettore del nucleo perché la quarta colonna della nuova base è il vettore nullo. Quindi possiamo

prendere $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$. Ora vogliamo trovare B' in modo che $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} |_{B'}$, $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} |_{B'}$,

$T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} |_{B'}$, ma sappiamo che rispetto alle basi canoniche $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. E

quindi abbiamo $B' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

Esercizio 9

Si consideri la funzione lineare $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definita da: $T(x, y, z) = (x + 3y + 4z, x + z, x + y + tz, 2x + 2y + tz)$, al variare di $t \in \mathbb{R}$.

i) Per quali $t \in \mathbb{R}$ la funzione T è iniettiva?

ii) Per quali $t \in \mathbb{R}$ il vettore $\underline{v} = (0, 0, 0, t)_T$ appartiene a $\text{Im}(T)$? Per tali valori, esprimere v come combinazione lineare di una base di $\text{Im}(T)$.

iii) Porre $t = 0$. Determinare una base B di \mathbb{R}^3 e una base B' di \mathbb{R}^4 tali che la matrice $M(T)_{B'}^B$ (che rappresenta

l'applicazione rispetto alle basi B e B') quando $t = 0$, sia $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Traccia di soluzione

Punto i). La funzione T è iniettiva se e solo se $\ker T$ è formato dal solo vettore $\underline{0} \in \mathbb{R}^3$. Quindi $\dim \ker T = 0$ e per il teorema di nullità e rango $\text{rk } T = 3$. La funzione T è rappresentata (rispetto alle basi canoniche) dalla

matrice $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & t \\ 2 & 2 & t \end{bmatrix}$. Questa matrice ha rango maggiore o uguale a 2 perché $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$. Consideriamo il

minore orlato $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & | & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & t & | & 1 & 1 & t-1 \end{vmatrix} = -3(t-2)$. Quindi per $t \neq 2$, $\text{rk } T = 3$. Per $t=2$ consideriamo il minore

orlato con quarta riga e terza colonna, si ha $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & | & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & | & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$. Per cui per ogni valore di t risulta

$\text{rk } T = 3$ e dunque T è iniettiva.

Punto ii). Affinchè $\underline{v} = (0, 0, 0, t)_T$ appartenga a $\text{Im}(T)$ l'equazione matriciale $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & t \\ 2 & 2 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ deve

avere soluzione, quindi per il teorema di Rouché Capelli la matrice completa deve avere rango uguale al rango della matrice dei coefficienti. Sappiamo che la matrice dei coefficienti ha rango 3 e dunque deve essere

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & t & 0 \\ 2 & 2 & t & t \end{vmatrix} = 0$. Ma $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & t & 0 \\ 2 & 2 & t & t \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & t \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & t-1 \end{vmatrix} = -3t(t-2)$. Quindi deve essere $t=0$ o $t=2$.

Per $t=0$ il vettore \underline{v} è il vettore nullo e quindi si scrive come combinazione lineare a coefficienti nulli dei

vettori di una qualsiasi base di $\text{Im } T$. Per $t=2$ si ha $\underline{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, una base di $\text{Im } T$ è $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ e \underline{v} si può

scrivere come combinazione di questi vettori a coefficienti 1,1,-1.

Punto iii). Per $t=0$ la matrice che rappresenta l'applicazione rispetto alle basi canoniche è $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

Vogliamo trovare una base B di \mathbb{R}^3 ed una base B' di \mathbb{R}^4 in modo che rispetto alle nuove basi la matrice della

applicazione sia $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Se prendiamo come base B la base canonica, abbiamo che la base B' deve

essere tale che le immagini della base canonica di \mathbb{R}^3 rispetto alla nuova base siano rispettivamente

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Poiché rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^4 le immagini della base canonica di \mathbb{R}^3 sono

rispettivamente $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, questi sono i vettori che, con un quarto vettore rispetto ad essi linearmente

indipendente, formano una base rispetto alla quale le componenti sono rispettivamente $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Quindi rimane da completare l'insieme $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ ad una base di \mathbb{R}^4 . Basta prendere $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Quindi

$$B' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Esercizio 10

Sia U il sottospazio di \mathbb{R}^4 costituito dai vettori $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ che risolvono il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - z + t = 0 \\ 2x + y - 2z + t = 0 \end{cases}$$

Sia poi V il sottospazio di \mathbb{R}^4 definito come $V = L((1, 0, 1, 0)_T, (0, 0, 1, 2)_T, (1, 0, 2, 2)_T)$.

- (1) Calcolare basi e dimensioni di U, V .
- (2) Calcolare basi e dimensioni di $U \cap V$ e $U + V$.
- (3) Costruire, se possibile, una applicazione lineare $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\ker(f) = U$ ed $f(V) = L((1, 1, 2)_T, (1, 0, 1)_T)$.

Traccia di soluzione

Punto (1). Il sottospazio U è formato dai vettori $\left\{ \begin{bmatrix} a-b \\ b \\ a \\ b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Una sua base è quindi $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ e la sua dimensione è 2. Si verifica subito che i vettori $(1, 0, 1, 0)_T, (0, 0, 1, 2)_T$ sono linearmente indipendenti, mentre $(1, 0, 2, 2)_T$ è la loro somma, dunque $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ è una base di V e $\dim V = 2$.

Punto (2). I vettori $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ generano $U+V$ e sono linearmente indipendenti (solita verifica) quindi sono una base di $U+V$ e $\dim(U+V) = 3$. Dalla formula di Grassmann si ha $\dim(U \cap V) = 1$ e dunque $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in U \cap V$ è una base di $U \cap V$.

Punto (3). Non è possibile costruire f , in quanto se f esistesse avremmo che l'applicazione $f': V \rightarrow f(V)$ che si comporta come f sul sottospazio V di \mathbb{R}^4 , dovrebbe esistere, ma $\dim \text{Im } f' = 2$, $\dim V = 2$ e $\ker f' = V \cap \ker f = V \cap U$, quindi $\dim \ker f' = 1$ contro il teorema di nullità più rango.

Esercizio 11

Sia $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la seguente applicazione lineare

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y - 2z + t \\ x - y + z + t \\ x - 2z \\ y + t \end{pmatrix}$$

(1) Determinare nucleo ed immagine di f , una loro base e la rispettiva dimensione.

(2) Sia U il sottospazio di \mathbb{R}^4 formato dalle soluzioni del seguente sistema $\begin{cases} x-y+t=0 \\ x-y=0 \end{cases}$. Determinare una base B di U e stabilire se esistono vettori di \mathbb{R}^4 che non appartengono a $\ker f+U$.

Traccia di soluzione

Punto (1). L'applicazione lineare f ha come matrice associata (rispetto alle basi canoniche) la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Calcoliamone il determinante: } \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$-2 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Dunque $\text{rk}(A) < 4$, inoltre il minore formato con le prime due righe e le prime due

colonne è diverso da 0 per cui $2 \leq \text{rk}(A) < 4$. Orliamo il minore di ordine 2 diverso da 0 che abbiamo ottenuto

con terza riga e quarta colonna ed abbiamo $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2$. Dunque $\text{rk}(A) = 3$. Quindi $\ker f$ ha dimensione

1 ed $\text{Im } f$ ha dimensione 3. $\text{Im } f$ è lo spazio generato dalle colonne di A , quindi una base di $\text{Im } f$ è formata

da 1°, 2° e 4° colonna di A , per cui $\text{Im } f = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$. Poiché $\dim \text{Im } f = 3$ abbiamo

che $\dim \ker f = 1$ e $\ker f$ è il sottospazio di \mathbb{R}^4 di equazioni $\begin{cases} x+y-2z+t=0 \\ x-y+z+t=0 \\ x-2z=0 \end{cases}$ da cui si ottiene subito che i vettori

di $\ker f$ sono $[2z, (-3/2)z, (3/2)z, 0]_T$ e quindi una base di $\ker f$ è $[2, -3/2, 1, 0]_T$.

Punto (2). Il sottospazio U si può scrivere nella forma $\begin{cases} x=y \\ t=0 \end{cases}$ cioè in forma parametrica $\begin{cases} x=u \\ y=u \\ z=v \\ t=0 \end{cases}$ dove u e v

sono due parametri. U ha quindi dimensione 2 ed i due vettori $[1, 1, 0, 0]_T$ e $[0, 0, 1, 0]_T$ formano una base per U . Poiché $\dim \ker f = 1$ e $\dim U = 2$ si ha $\dim(\ker f + U) \leq 3$ e pertanto essendo $\dim \mathbb{R}^4 = 4$ esistono vettori di \mathbb{R}^4 che non appartengono a $\ker f + U$.

Esercizio 12

Sia $f_k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare data da $f_k \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+ky+(2-k)z \\ kz+y+kz \end{pmatrix}$ essendo k un parametro reale.

(1) Determinare, al variare di k , nucleo ed immagine di f_k , le loro dimensioni ed una loro base.

(2) Sia U il piano di equazione $x - y = 0$. Determinare $\ker f_1 \cap U$ ed una sua base.

Traccia di soluzione

Punto (1) La matrice associata ad f_k rispetto alle basi canoniche di \mathbb{R}^3 ed \mathbb{R}^2 è $A_k = \begin{bmatrix} 1 & k & 2-k \\ k & 1 & k \end{bmatrix}$. Il nucleo di f_k è dunque il nucleo della matrice A_k . La matrice A_k ha rango maggiore o uguale ad 1 per ogni k perché il minore formato dall'elemento comune a prima riga e prima colonna è sempre 1. Consideriamo allora i minori ottenuti orlando quel minore. Il minore ottenuto orlando con seconda riga e seconda colonna è $1-k^2$ e quindi si annulla per $k=1$, $k=-1$. Per $k=1$ anche il minore formato orlando con seconda riga e terza colonna si annulla, mentre per $k=-1$ vale 2. Dunque A_k ha rango 2 per $k \neq 1$ e rango 1 per $k=1$. Di conseguenza abbiamo che

- per $k=1$, $\text{Im } f_k$ (che è lo spazio generato dai vettori colonna di A_k) ha dimensione 1 e una sua base è formata dal vettore $[1,1]_{\mathbb{T}}$; $\ker f_k$ ha dimensione $3-1=2$ (teorema di nullità e rango) ed è rappresentato dall'equazione $x + y + z = 0$, e quindi una sua base è ad esempio $\{[1,1,0]_{\mathbb{T}}, [1,0,1]_{\mathbb{T}}\}$.
- per $k \neq 1$, $\text{Im } f_k$ (che è lo spazio generato dai vettori colonna di A_k) ha dimensione 2, quindi essendo un sottospazio di \mathbb{R}^2 di dimensione uguale a quella di \mathbb{R}^2 , coincide con \mathbb{R}^2 pertanto una sua base è la base canonica di \mathbb{R}^2 ; $\ker f_k$ ha dimensione 1 ed è rappresentato dal sistema $\begin{cases} x+ky+(2-k)z=0 \\ kx+y+kz=0 \end{cases}$. Se

- o $k \neq -1$, le ∞^1 soluzioni del sistema sono $\begin{cases} x = \frac{k^2+k-2}{1-k^2} t \\ y = \frac{k-k^2}{1-k^2} t \\ z = t \end{cases}$ e rappresentano le equazioni

parametriche di $\ker f_k$ una cui base è ad esempio formata dal vettore $[k^2-k-2, k-k^2, 1-k^2]_{\mathbb{T}}$.

- o $k=-1$, le ∞^1 soluzioni del sistema sono $\begin{cases} x=2t \\ y=t \\ z=0 \end{cases}$ e rappresentano le equazioni parametriche di

$\ker f_{-1}$ una cui base è ad esempio formata dal vettore $[2,1,0]_{\mathbb{T}}$.

Punto (2) Poiché, come abbiamo visto sopra, $\ker f_1$ è rappresentato da $x+y+z=0$, $\ker f_1 \cap U$ è rappresentato dal sistema $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y=0 \end{cases}$, poiché il rango della matrice dei coefficienti di questo sistema è 2, $\ker f_1 \cap U$ ha dimensione 1 ed una base è data ad esempio dal vettore $[1,1,-2]_{\mathbb{T}}$.