GEOMETRIA ED ALGEBRA LINEARE

Seconda prova in itinere - 29/06/2012
SOLUZIONI

Tutti i calcoli devono essere riportati per la correzione, e le risposte devono essere giustificate.

Esercizio 1. (3 + 8 punti) Sia $B = (\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3})$ una base di $\mathbb{R}^3$, e sia dato $f_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l' endomorfismo definito dalle seguenti condizioni

- $f_a(\vec{v_1}) = \vec{v_1} + \vec{v_2} - a\,\vec{v_3}$;
- $f_a(\vec{v_2}) = 3\,\vec{v_2} - \vec{v_3}$;
- $\vec{v_2} - \vec{v_3}$ è autovettore per f_a relativo all' autovalore 1.

(1) Scrivere la matrice che rappresenta f_a rispetto alla base B.
(2) Calcolare gli autovalori di f_a, una base per ogni suo autospazio e stabilire i valori di $a \in \mathbb{R}$ per cui f_a è diagonalizzabile.

Soluzione.
(1) Le colonne della matrice $M_B^B(f_a)$ sono formate dai coefficienti che esprimono le immagini dei vettori di B come combinazione lineare degli stessi vettori di B. Le prime due condizioni forniscono pertanto, immediatamente, le prime due colonne della matrice. Inoltre, essendo $\vec{v_2} - \vec{v_3}$ è autovettore per f_a relativo all' autovalore 1, abbiamo $f_a(\vec{v_2} - \vec{v_3}) = \vec{v_2} - \vec{v_3}$. Ma, per la linearità, abbiamo anche

$$f_a(\vec{v_2} - \vec{v_3}) = f_a(\vec{v_2}) - f_a(\vec{v_3}) = 3\,\vec{v_2} - \vec{v_3} - f_a(\vec{v_3}),$$

da cui $f_a(\vec{v_3}) = 2\,\vec{v_2}$. Di conseguenza risulta

$$M_B^B(f_a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -a & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) L'equazione caratteristica $\det(M_B^B(f_a) - \lambda I) = 0$ risulta $(1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0$, cioè $(\lambda - 1)^2(2-\lambda) = 0$. Si ha quindi l'autovalore $\lambda = 1$ di molteplicità algebrica 2, e l'autovalore semplice $\lambda = 2$. Per $\lambda = 1$ la matrice caratteristica diventa

$$M_B^B(f_a) - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ -a & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Per $a \neq \frac{1}{2}$ il minore $\{R_2, R_3\} \cap \{C_1, C_2\}$ è non nullo, quindi il rango è 2 e l'autospazio associato E_1 ha dimensione $3 - 2 = 1$. Pertanto l'autovalore $\lambda = 1$ non è regolare e l'endomorfismo non è diagonalizzabile. Per $a = \frac{1}{2}$ l'autospazio E_1 ha invece dimensione 2, e l'endomorfismo è diagonalizzabile. Calcoliamo, in entrambi i casi, una base per gli autospazi E_1 ed E_2.

- $a \neq \frac{1}{2}$.

L'autospazio E_1 risulta

$$\begin{cases} x + 2y = -2z \\ -ax - y = z, \end{cases}$$

da cui $x = 0$, $y = -z$. Quindi $E_1 = \{[0, -z, z]^t,\ z \in \mathbb{R}\}$, ed un base è, per esempio, il vettore $[0, -1, 1]^t$.
Per $\lambda = 2$ la matrice caratteristica diventa

$$M_B^B(f_a) - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -a & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

L'autospazio E_2 risulta descritto, per esempio, dalle due equazioni determinate dalle prime due righe, cioè

$$\begin{cases} -x = 0 \\ x + y = -2z, \end{cases}$$

da cui $x = 0$, $y = -2z$. Quindi $E_2 = \{[0, -2z, z]^t,\ z \in \mathbb{R}\}$, ed un base è, per esempio, il vettore $[0, -2, 1]^t$. Si noti che E_2 resta invariato anche se $a = \frac{1}{2}$, in quanto le sue equazioni non dipendono da a.

• $a = \frac{1}{2}$. In questo caso E_1 è descritto dall'unica equazione $x + 2y + 2z = 0$. Quindi $E_1 = \{[-2y - 2z, y, z]^t,\ y, z \in \mathbb{R}\}$, ed un base è rappresentata , per esempio, dalla coppia di vettori $\{[-2, 1, 0]^t, [-2, 0, 1]^t\}$.

Esercizio 2. (5 + 6 punti) Nel piano euclideo, sia dato il fascio di coniche di equazione

$$\Gamma_t : 2tx^2 + 2(t + 1)xy + 2ty^2 - 2x - 2(t + 1)y + 2 = 0.$$

(1) Classificare le coniche del fascio al variare di $t \in \mathbb{R}$.
(2) Posto $t = 2$, calcolare una forma canonica, il cambio relativo di coordinate e disegnare la conica Γ_2.

Soluzione.
(1) La matrice associata alla generica conica del fascio è data da

$$A_t = \begin{pmatrix} 2t & t + 1 & -1 \\ t + 1 & 2t & -(t + 1) \\ -1 & -(t + 1) & 2 \end{pmatrix}.$$

Il calcolo degli invarianti fornisce $I_3 = -2t(t^2 - 2t + 2)$, $I_2 = 3t^2 - 2t - 1$, $I_1 = 4t$. Quindi si ha

• **Coniche degeneri**. Deve essere $I_3 = 0$ per $t = 0$ e $t^2 - 2t + 2 = 0$. La seconda equazione ha soluzioni complesse, quindi si ha una sola conica degenere, corrispondente a $t = 0$, cioè $xy - x - y + 1 = 0$. Poiché $xy - x - y + 1 = (x - 1)(y - 1)$ la conica è spezzata nelle due rette $x = 1$ ed $y = 1$.

• **Ellissi**. Deve essere $I_2 = 3t^2 - 2t - 1 > 0$, quindi $t < -\frac{1}{3}$ e $t > 1$. Osserviamo che $I_1 I_3 = -4t^2(t^2 - 2t + 2)$, quindi minore di 0 per ogni $t \neq 0$, per cui le ellissi sono tutte reali. In particolare, per $t = -1$ si ha una circonferenza, in quanto i coefficienti di x^2 e di y^2 sono uguali ed il coefficiente del termine in xy si annulla.

• **Parabole**. Deve essere $I_2 = 3t^2 - 2t - 1 = 0$, quindi per $t = -\frac{1}{3}$ e $t = 1$.

• **Iperboli**. Deve essere $I_2 = 3t^2 - 2t - 1 < 0$, quindi $-\frac{1}{3} < t < 1$. Per $t = 0$ si annulla I_1 ma ciò non fornisce una iperbole equilatera in quanto la corrispondente conica è degenere.

(2) Per $t = 2$ abbiamo la conica $\Gamma_2 : 4x^2 + 6xy + 4y^2 - 2x - 6y + 2 = 0$, che, come si è detto, corrisponde ad una ellisse. I corrispondenti invarianti risultano $I_3 = -8$, $I_2 = 7$, $I_1 = 8$. Gli autovalori della matrice associata alla parte quadratica sono le soluzioni dell'equazione $\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0$, cioè $\lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0$, da cui $\lambda = 1, 7$. Una forma canonica

di Γ_2 è pertanto $x^2 + 7y^2 - \frac{8}{7} = 0$. L'autospazio associato a $\lambda = 1$ ha equazione $x + y = 0$, quello associato a $\lambda = 7$ è $-x + y = 0$. La matrice ortogonale speciale corrispondente al movimento rotatorio è formata degli autovettori normalizzati, quindi

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Il centro di Γ_2 è la soluzione del sistema

$$\begin{cases} 8x + 6y - 2 = 0 \\ 6x + 8y - 6 = 0, \end{cases}$$

cioè il punto $C\left(-\frac{5}{7}, \frac{9}{7}\right)$. Il cambio di riferimento che riduce Γ_2 a forma canonica risulta quindi dato da

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{5}{7} \\ \frac{9}{7} \end{bmatrix}.$$

Esercizio 3. (5 + 6 punti) Sia σ la sfera di centro l' origine e raggio 2, e sia α il piano di equazione $\sqrt{3}y + z - 2\sqrt{3} = 0$.

(1) Calcolare centro e raggio della circonferenza $\gamma = \sigma \cap \alpha$.
(2) Scrivere l' equazione del cono S di vertice $V(0, 0, 1)$ avente γ come direttrice, e classificare quindi la conica Γ intersezione del cono S con il piano $[xy]$.

Soluzione.

(1) La distanza dell'origine dal piano α è uguale a $\sqrt{3} < 2$, quindi γ è reale non degenere. Il suo raggio è fornito dal teorema di Pitagora, e vale $r = \sqrt{2^2 - 3} = 1$. Il centro di γ è il punto H in cui la retta per $O(0, 0, 0)$ e perpendicolare ad α interseca tale piano. Le equazioni parametriche della retta OH sono date da

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt{3}t \\ z = t, \end{cases}$$

e mettendo a sistema con l'equazione di α si ha $4t - 2\sqrt{3} = 0$, da cui $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Di conseguenza $H = \left(0, \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

(2) L'equazione cartesiana della sfera σ è $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Detto P il generico punto di γ, le equazioni parametriche del cono richiesto sono date da

$$\begin{cases} x = x_V + (x_P - x_V)\lambda \\ y = y_V + (y_P - y_V)\lambda \\ z = z_V + (z_P - z_V)\lambda \\ \sqrt{3}y_P + z_P - 2\sqrt{3} = 0 \\ x_P^2 + y_P^2 + z_P^2 = 4. \end{cases}$$

Sostituendo le coordinate di V, dalle prime tre equazioni ricaviamo

$$\begin{cases} x_P = \frac{x}{\lambda} \\ y_P = \frac{y}{\lambda} \\ z_P = \frac{z-1}{\lambda} + 1. \end{cases}$$

Dalla quarta equazione ricaviamo quindi $\lambda = \frac{\sqrt{3}y+z-1}{2\sqrt{3}-1}$, il che fornisce

$$\begin{cases} x_P = \dfrac{x}{\lambda} = \dfrac{(2\sqrt{3}-1)x}{\sqrt{3}y+z-1} \\ y_P = \dfrac{y}{\lambda} = \dfrac{(2\sqrt{3}-1)y}{\sqrt{3}y+z-1} \\ z_P = \dfrac{z-1}{\lambda} + 1 = \sqrt{3}\dfrac{y+2z-2}{\sqrt{3}y+z-1}. \end{cases}$$

Sostituendo nella quinta equazione otteniamo

$$(2\sqrt{3}-1)^2x^2 + (2\sqrt{3}-1)^2y^2 + 3(y+2z-2)^2 - 4(\sqrt{3}y+z-1)^2 = 0,$$

e semplificando si ha

$$x^2(13-4\sqrt{3}) + y^2(4-4\sqrt{3}) + yz(12-8\sqrt{3}) + y(8\sqrt{3}-12) + 8z^2 - 16z + 8 = 0,$$

che rappresenta l'equazione cartesiana del cono. Posto $z = 0$ si ha

$$x^2(13-4\sqrt{3}) + y^2(4-4\sqrt{3}) + y(8\sqrt{3}-12) + 8 = 0.$$

Essa rappresenta, nello spazio, un cilindro, che, sul piano xy, taglia la conica avente, su quel piano, la stessa equazione. Poiché il piano xy non passa per il vertice V del cono, la conica è non degenere, ed essendo $I_2 = 100(1-\sqrt{3}) < 0$, essa è una iperbole