A.A. 2014/2015	A.A. 2015/2016

Data per l'orale:

15/2	22/2

Esame di Geometria e Algebra Lineare

Politecnico di Milano – Ingegneria informatica – Seconda prova in itinere – 11 febbraio 2016

Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.

Gli eventuali laureandi e coloro che abbiano necessità di sostenere l'orale domani lo indichino sul foglio

1. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

i. Calcolare autovalori e autospazi di A.

ii. Determinare dimensioni e basi ortonormali del nucleo di A e del suo complemento ortogonale.

iii. Dire se esiste, ed in caso positivo trovare, una matrice ortogonale Q che diagonalizza A.

2. Nel piano riferito a un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, consideriamo la retta r di equazione $x - y = 1$ ed il punto $F = (0, 2)$.

   i. Trovare l'equazione del luogo $\mathcal{C}$ di punti P nel piano la cui distanza dalla retta r è metà della distanza dal punto F.

   ii. Riconoscere che il luogo trovato è una conica a centro, portarla in forma canonica e determinare il cambiamento di coordinate necessario a ridurla in tale forma.

   iii. Trovare centro e assi di simmetria della conica.

3. Nello spazio riferito a un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, si considerino la retta

$$r: \begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

e la retta

$$s_h: \begin{cases} x + y - 2h = 0 \\ y - h = 0 \end{cases}$$

dipendente dal parametro reale h.

i. Costruire la superficie $\mathcal{Q}_h$ ottenuta dalla rotazione di s_h rispetto all'asse r.

ii. Classificare $\mathcal{Q}_h$ per ogni h.

iii. Trovare le rette contenute in $\mathcal{Q}_1$ passanti per il punto di coordinate $(1, 1, 1)$.

4. Sia h un parametro reale ed $S_3 = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

   i. Provare che per ogni h esiste un unico $f_h \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ tale che

   $$f_h(\mathbf{e_1}) = \mathbf{e_1} - h\mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}, \quad f_h(\mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}) = \mathbf{e_1} + h\mathbf{e_3}, \quad f_h(\mathbf{e_1} - \mathbf{e_2}) = \mathbf{e_1} - \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}$$

   e scrivere la matrice che rappresenta l'applicazione rispetto ad S_3.

   ii. Determinare, se esistono, i valori di h per cui f_h non è un automorfismo e scrivere la matrice che rappresenta f_0^{-1} rispetto ad S_3.

   iii. Scrivere le equazioni cartesiane di $\mathrm{Im}(f_1)$ rispetto ad S_3.

Soluzioni

1. i. Il polinomio caratteristico di A è

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3 - 2 - 3(2-\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda = -\lambda(\lambda-3)^2.$$

Pertanto esiste un autovalore semplice $\lambda_1 = 0$ ed un autovalore doppio $\lambda_2 = 3$, i cui relativi autospazi sono:

$$V_0 = \ker \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right),$$

$$V_3 = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

ii. Osserviamo che il nucleo della matrice corrisponde all'autospazio V_0 e quindi la sua dimensione è 1 ed una sua base ortonormale è

$$\mathcal{B}_{\ker(A)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\}.$$

Inoltre, poiché A è una matrice simmetrica, l'autospazio V_3 è ortogonale a V_0 e quindi corrisponde al suo complemento ortogonale in $\mathbb{R}^3$. Quindi la sua dimensione di $\ker(A)^\perp$ è 2 ed una sua base ortogonale si ottiene partendo dalla base di V_3 ed applicando l'algoritmo di Gram–Schmidt:

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dopo aver normalizzato, otteniamo la base ortonormale richiesta:

$$\mathcal{B}_{\ker(A)^\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \right\}.$$

iii. Essendo A simmetrica allora è ortogonalmente diagonalizzabile e la matrice Q è costruita a partire dalla base ortonormale di autovettori:

$$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

2. i. Il luogo $\mathcal{C}$ è descritto da

$$\mathcal{C}: \ \frac{|x-y-1|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{x^2+(y-2)^2}}{2} \qquad \Rightarrow \qquad x^2 - 4xy + y^2 - 4x + 8y - 2 = 0.$$

ii. Le matrici associate alla conica $\mathcal{C}$ sono:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo autovalori e autovettori di A. Il polinomio caratteristico è

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda+1)(\lambda-3).$$

Di conseguenza i due autovalori sono $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$ e quindi la conica è a centro. I relativi autospazi sono

$$V_{-1} = \ker \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right),$$
$$V_3 = \ker \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

Quindi la matrice Q associata alla rotazione del sistema di riferimento è quella che diagonalizza A ed ha determinante 1:

$$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Essendo la conica a centro, il vettore di traslazione $\mathbf{v}$ corrisponde alle coordinate del centro di simmetria, che si ricavano risolvendo il sistema lineare

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{v}|_{\mathcal{B}_O} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La trasformazione di coordinate che pone $\mathcal{C}$ in forma canonica è $\mathbf{x} = Q\,\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{v}$ da cui si ottiene la nuova equazione di $\mathcal{C}$:

$$\lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad -\tilde{x}^2 + 3\tilde{y}^2 - 6 = 0.$$

Di conseguenza la curva $\mathcal{C}$ è un'iperbole.

iii. Il centro di simmetria ha coordinate $C = (2\ 0)^T$. I due assi di simmetria r ed s contengono C e sono paralleli agli autospazi associati agli autovalori di A. Le loro equazioni sono

$$r: \ x - y - 2 = 0, \qquad\qquad s: \ x + y - 2 = 0.$$

3. i. La retta r ha equazioni parametriche

$$r: \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

e pertanto passa per l'origine O e ha parametri direttori $(0\ 1\ 1)$. Il generico punto P sulla retta s_h ha coordinate $(h\ h\ t)$ e nella rotazione attorno ad r descrive una circonferenza di equazioni

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = h^2 + h^2 + t^2 \\ (y-h) + (z-t) = 0 \end{cases}$$

L'equazione della superficie $\mathcal{Q}_h$ si ottiene eliminando il parametro t dal precedente sistema e risulta essere $x^2 - 2yz + 2hy + 2hz - 3h^2 = 0$.

ii. Le matrici associate alla quadrica $\mathcal{Q}_h$ sono:

$$A_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & h \\ 0 & -1 & 0 & h \\ 0 & h & h & -3h^2 \end{pmatrix}.$$

Ora $detA_h = -1$, $detB_h = h^2$ e gli autovalori di A sono $-1, 1, 1$. Segue che se $h \neq 0$, $\mathcal{Q}_h$ è un iperboloide ad una falda, mentre è un cono reale per $h = 0$.
Notate che per raggiungere questo risultato non serve l'equazione della quadrica, infatti per $h = 0$ la retta r e la retta s_0 sono incidenti in O e quindi la quadrica ottenuta dalla rotazione di s_0 attorno ad r è un cono con vertice in O, per $h \neq 0$ le due rette sono sghembe e quindi la superficie ottenuta dalla rotazione di s_h attorno ad r, essendo una superficie rigata di rotazione, che non è né un cono (in quanto le rette non sono incidenti), né un cilindro (in quanto le rette non sono parallele), è un iperboloide iperbolico.

iii. $\mathcal{Q}_1$ ha equazione $x^2 - 2yz + 2y + 2z - 3 = 0$ e contiene il punto $R = (1\ 1\ 1)$. Essendo $\mathcal{Q}_1$ un iperboloide iperbolico, ci sono esattamente due rette passanti per R e contenute nella quadrica. La generica retta per R ha equazioni parametriche $x = 1 + at, y = 1 + bt, z = 1 + ct$ intersecando questa retta con la quadrica $\mathcal{Q}_1$ si trova il seguente sistema

$$r : \begin{cases} x = 1 + at \\ y = 1 + bt \\ z = 1 + ct \\ t^2(a^2 - bc) + 2at = 0 \end{cases}$$

e la retta è contenuta nella quadrica se e solo se $t^2(a^2 - bc) + 2at = 0$ è un'identità, cioè se e solo se $a = 0$ e $a^2 - bc = 0$. Pertanto le due rette contenute nella quadrica si ottengono per $a = b = 0$ e $a = c = 0$ e sono dunque

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}, \qquad r_2 : \begin{cases} x = 1 \\ z = 1 \end{cases}.$$

L'esercizio si poteva anche svolgere notando che $x^2 - 2yz + 2y + 2z - 3 = 0$ si può scrivere nella forma $x^2 - 1 = 2yz - 2y - 2z + 2$ cioè $x^2 - 1 = 2y(z-1) - 2(z-1)$ ovvero $(x-1)(x+1) = 2(y-1)(z-1)$, per cui la quadrica $\mathcal{Q}_1$ contiene i due sistemi di rette

$$\begin{cases} x - 1 = 2\lambda(z-1) \\ \lambda(x+1) = (y-1) \end{cases}, \qquad \begin{cases} x - 1 = 2\mu(y-1) \\ \mu(x+1) = (z-1) \end{cases}$$

La retta del primo sistema passante per R si ottiene per $\lambda = 0$ ed è la retta r_1 e quella del secondo sistema passante per R si ottiene per $\mu = 0$ ed è la retta r_2.

4. i. Verifichiamo che i tre vettori $\mathbf{v_1} = \mathbf{e_1},\ \mathbf{v_2} = \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3},\ \mathbf{v_3} = \mathbf{e_1} - \mathbf{e_2}$ costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$:

$$\det((\mathbf{v_1}|_{S_3} \quad \mathbf{v_2}|_{S_3} \quad \mathbf{v_3}|_{S_3})) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

L'esistenza ed unicità di f_h è quindi una conseguenza del teorema di rappresentazione. Per ottenere la matrice che rappresenta f_h, osserviamo che $\mathbf{e_1} = \mathbf{v_1},\ \mathbf{e_2} = \mathbf{v_1} - \mathbf{v_3},\ \mathbf{e_3} = -\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2} + \mathbf{v_3}$. Di conseguenza

$$\begin{aligned} &f_h(\mathbf{e_1}) = f_h(\mathbf{v_1}) = \mathbf{e_1} - h\mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}, \\ &f_h(\mathbf{e_2}) = f_h(\mathbf{v_1} - \mathbf{v_3}) = f_h(\mathbf{v_1}) - f_h(\mathbf{v_3}) = (1-h)\mathbf{e_2}, \\ &f_h(\mathbf{e_3}) = f_h(-\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2} + \mathbf{v_3}) = -f_h(\mathbf{v_1}) + f_h(\mathbf{v_2}) + f_h(\mathbf{v_3}) = \mathbf{e_1} + (h-1)\mathbf{e_2} + h\mathbf{e_3}. \end{aligned}$$

e quindi

$$F_h = (f_h(\mathbf{e_1})|_{S_3} \quad f_h(\mathbf{e_2})|_{S_3} \quad f_h(\mathbf{e_3})|_{S_3}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -h & 1-h & h-1 \\ 1 & 0 & h \end{pmatrix}.$$

ii. L'applicazione non è un automorfismo se e solo se il determinante di F_h è uguale a zero:

$$\det(F_h) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -h & 1-h & h-1 \\ 1 & 0 & h \end{vmatrix} = -(1-h)^2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad h = 1.$$

L'applicazione f_0^{-1} è rappresentata dalla matrice inversa di F_0 che si può calcolare con l'algoritmo di Gauss–Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Di conseguenza

$$F_0^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

iii. La matrice che rappresenta f_1 è

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pertanto la sua immagine è generata dalla prima e terza colonna della matrice. Di conseguenza un vettore $\mathbf{x} \in \mathrm{Im}(f_1)$ è una combinazione

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La rappresentazione cartesiana di $\mathbf{x} \in \mathrm{Im}(f_1)$ si ottiene eliminando i parametri t_1, t_2 :

$$\begin{cases} x = t_1 + t_2 \\ y = -t_1 \\ z = t_1 + t_2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} t_1 = -y \\ t_2 = x + y \\ x - z = 0 \end{cases}.$$

L'equazione cartesiana cercata è quindi $x - z = 0$.