Esame di Geometria e Algebra Lineare

Politecnico di Milano – Ingegneria informatica – Prima prova in itinere A.A. 2016/17

Cognome:	Nome:	Matricola:

Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.

1. Si consideri il sistema lineare dipendente dal parametro reale $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x - ky + 2z = 2 \\ kx + y + z = 1. \end{cases}$$

i. Si provi che per ogni valore k il sistema rappresenta una retta r_k e si determini una rappresentazione parametrica di tale retta.

ii. Studiare al variare di k la reciproca posizione di r_k e del piano $x - y = 0$.

iii. Posto $k = 1$, si dica se la retta r_1 è complanare alla retta s di equazioni $x - y = x - z = 0$. (Facoltativo) Determinare tutti i valori di k per cui la retta r_k e la retta s sono complanari.

Soluzione

1. La matrice dei coefficienti del sistema è

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & -k & 2 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

ed ha rango 2, infatti una sua forma a scala (II riga -k(I riga)) è

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & -k & 2 \\ 0 & 1+k^2 & 1-2k \end{pmatrix},$$

ed ha due pivot diversi da 0 per ogni valore di k. Il sistema ammetta allora le ∞^1 soluzioni

$$\begin{cases} x = \frac{2+k}{1+k^2} - \frac{2+k}{1+k^2}t \\ y = \frac{1-2k}{1+k^2} - \frac{1-2k}{1+k^2}t \\ z = t \end{cases}$$

che sono le equazioni parametriche della retta r_k.

2. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - ky + 2z = 2 \\ kx + y + z = 1 \end{cases}$$

che è equivalente a

$$\begin{cases} x = y \\ (1-k)x + 2z = 2 \\ (1+k)x + z = 1 \end{cases}$$

che è equivalente a

$$\begin{cases} x = y \\ (-1-3k)x = 0 \\ (1+k)x + z = 1 \end{cases}.$$

Se $k \neq \frac{-1}{3}$ il sistema ha una ed una sola soluzione $(x = y = 0, z = 1)$ e quindi piano e retta sono incidenti. Consideriamo $k = \frac{-1}{3}$: il sistema ha ∞^1 soluzioni $x = t, y = t, z = 1 - \frac{2}{3}t$, per cui la retta giace sul piano.

3. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 0 \\ x - ky + 2z = 2 \\ kx + y + z = 1 \end{cases}$$

che è equivalente a

$$\begin{cases} x = y \\ x = z \\ (3-k)x = 2 \\ (k+2)x = 1 \end{cases}.$$

Il sistema ammette soluzioni se e solo se $\frac{2}{3-k} = \frac{1}{k+2}$ cioè se e solo se $k = \frac{-1}{3}$. Inoltre i parametri direttori della retta s sono $(1, 1, 1)$ quelli della retta r_k sono $(2 + k, 1 - 2k, 1 + k^2)$ e non risultano proporzionali per alcun valore di k per cui le retta non sono mai parallele. Dunque s ed r_k sono complanari se e solo se $k = \frac{-1}{3}$, in particolare per $k = 1$ le due rette s ed r_1 sono non complanari e quindi sghembe.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si considerino il sottospazio W generato dai vettori $\mathbf{w_1} = [1 \quad 1 \quad -1 \quad 0]^T$, $\mathbf{w_2} = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1]^T$ e $\mathbf{w_3} = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0]^T$ ed il sottospazio $U = \{[x \quad y \quad z \quad t]^T \, | 2x + y - z = 0, \; y + t = 0\}$.

i. Si determinino dimensioni e basi di W ed U.

ii. Si completi la base trovata di W ad una base di $\mathbb{R}^4$.

iii. Si determinino dimensioni e basi di $U + W$ and $U \cap W$.

Soluzione

1. Si verifica facilmente che il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

è 3, per cui $\{\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}, \mathbf{w_3}\}$ sono un sistema di generatori linearmente indipendenti e quindi una base di W, che pertanto ha dimansione 3.
Il sottospazio U è formato da tutti i vettori $\{[x \quad y \quad 2x + y \quad -y]^T \, | x, y \in \mathbb{R}\}$, quindi ha come insieme di generatori i vettori $[1 \quad 0 \quad 2 \quad 0]^T$ e $[0 \quad 1 \quad 1 \quad -1]^T$ che, non essendo propozionali sono linearmente indipendenti e quindi sono una base di U, che ha pertanto dimensione 2.

2. Applichiamo il teorema degli scarti successivi a $\{\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}, \mathbf{w_3}, \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}, \mathbf{e_4}\}$. Si verifica subito che la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ha determinante diverso da 0 e quindi rango 4, pertanto $\{\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}, \mathbf{w_3}, \mathbf{e_1}\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$.

3. Portiamo a scala la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

sommando alla seconda riga la prima moltiplicata per -1 e aggiungendo alla terza riga la prima abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

scambiando seconda e quarta riga e poi togliendo dalla terza riga la seconda abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

quindi la matrice ha rango 4 e le prime quattro colonne della matrice originaria sono una base di $W + U$. Dunque $W + U$ ha dimensione 4 e per la formula di Grassmann $W \cap U$ ha dimensione 1. Cerchiamone una base. Un vettore appartenente a $W \cap U$ deve essere scritto come combinazione lineare sia dei vettori di una base di W sia dei vettori di una base di U. Quindi dobbiamo trovare le soluzioni del sistema $x\mathbf{w_1} + y\mathbf{w_2} + z\mathbf{w_3} = a[1 \quad 0 \quad 2 \quad 0]^T + b[0 \quad 1 \quad 1 \quad -1]^T$ che ammette le soluzioni $x = \frac{-3}{2}k, y = -k, z = \frac{-5}{2}k, a = k, b = k$, pertanto i vettori dell intersezione sono dalle forma $k[1 \quad 1 \quad 3 \quad -1]^T$ e una base dell'intersezione è formata dal vettore $[1 \quad 1 \quad 3 \quad -1]^T$.

3. Sia f_h l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ rappresentato rispetto alla base canonica dalla matrice

$$A_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h \\ 1 & 1 & h+2 \\ 2 & 1 & h-2 \end{pmatrix},$$

dipendente da parametro reale h.

i. Determinare dimensioni e basi di $\ker(f_h)$ e $\mathrm{Im}(f_h)$.

ii. Trovare i valori di h per cui l'applicazione f_h è suriettiva. Dire se per tali valori l'applicazione è anche iniettiva.

iii. Determinare se per $h = -3$ l'applicazione risulta invertibile. In tal caso calcolare la matrice B che rappresenta l'applicazione inversa di f_{-3} rispetto alla base canonica.

Soluzione

1. Il $\ker(f_h)$ è dato dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x + hz = 0 \\ x + y + (h+2)z = 0 \\ 2x + y + (h-2)z = 0 \end{cases}.$$

La matrice dei coefficienti, togliendo alla seconda riga la prima, alla terza riga la prima moltiplicata per 2 e poi alla terza la seconda diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -h-4 \end{pmatrix},$$

per cui per $h \neq -4$ il sistema ha la sola soluzione banale e dunque $\ker(f_h) = \{\mathbf{0}\}$ e $\ker(f_h)$ ha dimensione 0 e non ammette base, invece $\mathrm{Im}(f_h)$=$\mathrm{Col}(A_h)$ ha dimensione 3 ed ha come base ad esempio la base canonica di $\mathbb{R}^3$ (o le tre colonne di A_h). Per $h = -4$ si ha $\mathrm{rk}(A_{-4})$=2, dunque $\dim(\ker(f_{-4}))$=1, e una base di $\ker(f_{-4})$ è $[4 \quad -2 \quad 1]^T$, per il teorema di nullità più rango $\dim(\mathrm{Im}(f_{-4}))$=2 e una base di $\mathrm{Im}(f_{-4})$ è costituita dalle prime due colonne della matrice A_{-4}.

2. L'applicazione f_4 è suriettiva se e solo se $\mathrm{Col}(A_h)$=$\mathbb{R}^3$ e quindi se e solo se $h \neq -4$ e per tali valori risulta anche iniettiva essendo $\ker(f_h) = \{\mathbf{0}\}$.

3. Per $h = -3$ l'applicazione è suriettiva e iniettiva e quindi biunivoca, perciò ammette inversa e la matrice associata alla sua inversa è l'inversa di A_{-3} che risulta essere

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$