Esame di Geometria
Politecnico di Milano – Ingegneria

Appello del 17 luglio 2013

1. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo tale che

   i. $(1,1,0)$ è un autovettore per f relativo all'autovalore 1;
   ii. $(1,0,1)$ è un autovettore per f relativo all'autovalore -1;
   iii. $f(0,1,1) = (1,-1,0)$.

   (a) Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.
   (b) Determinare gli autovalori di f e i corrispondenti autospazi e dire se f è diagonalizzabile;
   (c) Stabilire se f è invertibile e in caso affermativo dire se f^{-1} è diagonalizzabile.

<u>*Soluzione*</u> Poiché $\underline{v}_1 = (1,1,0)$ è un autovettore per f relativo all'autovalore 1, si ha $f(\underline{v}_1) = \underline{v}_1$, e analogamente poiché $\underline{v}_2 = (1,0,1)$ è un autovettore per f relativo all'autovalore -1, si ha $f(\underline{v}_2) = -\underline{v}_2$. Inoltre $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3 = (1,-1,0)$ sono linearmente indipendenti, quindi f è univocamente determinata. Si ha con facili conti che $\underline{e}_1 = \frac{1}{2}(\underline{v}_1 + \underline{v}_2 - \underline{v}_3)$, $\underline{e}_3 = \underline{v}_2 - \underline{e}_1$ e $\underline{e}_2 = \underline{v}_3 - \underline{e}_3$, da cui per linearità si ottiene $f(\underline{e}_1) = \frac{1}{2}(f(\underline{v}_1) + f(\underline{v}_2) - f(\underline{v}_3)) = (-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2})$, $f(\underline{e}_3) = f(\underline{v}_2) - f(\underline{e}_1) = (-\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2})$ e $f(\underline{e}_2) = f(\underline{v}_3) - f(\underline{e}_3) = (\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2})$. La matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ è quindi

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di A è $(\lambda+1)(1-\lambda^2)$ e dunque gli autovalori di A sono 1 con molteplicità algebrica 2 e -1. Poiché la matrice $A - I$ ha rango 2 l'autospazio associato all'autovalore 1 è generato dall'autovettore $(1,1,0)$ ed è quindi formato dai vettori $\{(t,t,0) | t \in \mathbb{R}\}$. L'autovalore -1 è semplice quindi il suo autospazio ha dimensione 1 ed è generato dall'autovettore $(1,0,1)$ per cui è formato dai vettori $\{(s,0,s) | s \in \mathbb{R}\}$.
Poiché l'autovalore 1 non è regolare la matrice A (e quindi l'endomorfismo f) non è diagonalizzabile. L'endomorfismo f è invertibile perché $detA = -1$ e sappiamo ogni autovettore di una matrice invertibile B associato a un autovalore λ è autovettore di B^{-1} associato all'autovalore $\frac{1}{\lambda}$, per cui A^{-1} ha gli stessi autovettori di A e quindi $\mathbb{R}^3$ non ammette una base di autovettori di A^{-1} e dunque A^{-1} (e quindi l'endomorfismo f^{-1}) non è diagonalizzabile.

2. Sia Σ la sfera in $\mathbb{R}^3$ con centro nell'origine e raggio uguale a 2.

   (a) Scrivere l'equazione cartesiana del piano π passante per $P \equiv (1,1,0)$ e parallelo all'asse z che taglia Σ lungo una circonferenza Γ di raggio $\sqrt{2}$.

   (b) Scrivere l'equazione del cilindro $\mathcal{C}$ con generatrici perpendicolari al piano π avente Γ come direttrice.

   (c) Determinare l'equazione di una sfera tangente al piano π e inscritta nel cilindro $\mathcal{C}$, e il numero di tali sfere.

   Soluzione La sfera Σ ha equazione $x^2+y^2+z^2=4$. Il generico piano parallelo all'asse z e passante per P è un piano del fascio di equazione $ax+by-a-b=0$. Tra i piani di questo fascio dobbiamo cercare quello che taglia Σ lungo una circonferenza Γ di raggio $\sqrt{2}$. Tale piano deve quindi avere dal centro della sfera (che è l'origine degli assi) una distanza $d=\sqrt{4-2}=\sqrt{2}$, deve pertanto essere $\frac{|-a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{2}$ da cui si ottiene $a=b$; pertanto l'equazione del piano π è $x+y-2=0$.
   Le generatrici del cilindro hanno direzione perpendicolare a π e pertanto una loro terna di parametri direttori è $(1,1,0)$. Il sistema formato dalle equazioni di Σ e π rappresenta la direttrice, quindi le equazioni parametriche della generica direttrice sono $x=x_0+t, y=y_0+t, z=z_0$ con $x_0^2+y_0^2+z_0^2=4, x_0+y_0=2$. Da questa ultima ricaviamo $x-t+y-t=2$, ovvero $t=\frac{x+y-2}{2}$ da cui $x_0=\frac{x-y+2}{2}, y_0=\frac{y-x+2}{2}$. Sostituendo x_0,y_0,z_0 in $x_0^2+y_0^2+z_0^2=4$ si ottiene quindi l'equazione del cilindro $(\frac{x-y+2}{2})^2+(\frac{y-x+2}{2})^2+z^2=4$.
   Il cilindro che abbiamo trovato è un cilindro circolare retto che ha come direttrice una circonferenza di raggio $\sqrt{2}$. Ogni sfera inscritta in tale cilindro ha centro sull'asse di simmetria del cilindro e raggio $\sqrt{2}$, affinché la sfera sia tangente a π la distanza fra il suo centro e π deve essere $\sqrt{2}$. Ci sono due punti dell'asse del cilindro che hanno distanza $\sqrt{2}$ da π e quindi ci sono due sfere che soddisfano le condizioni richieste. Poiché abbiamo già visto che l'origine ha distanza $\sqrt{2}$ dal π, una delle sfere cercate ha equazione $x^2+y^2+z^2=2$.

3. Si consideri l'equazione $\underline{x}^T A_h \underline{x} = 0$ con

$$A_h = \begin{bmatrix} 2h & 2 & 2h \\ 2 & 4 & 1 \\ 2h & 1 & h \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \underline{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Provare che l'equazione descrive un fascio di coniche e determinare al variare di $h \in \mathbb{R}$ il tipo di conica.

   (b) Per $h=2$, sia Γ la conica $\underline{x}^T A_2 \underline{x} = 0$,

      i. Riconoscere Γ.

      ii. Determinare (se esistono) centro e assi di Γ.

<u>*Soluzione*</u>. La matrice A_h con $h \in \mathbb{R}$ è reale simmetrica e quindi l'equazione $\underline{x}^T A_h \underline{x} = 0$ rappresenta una conica per ogni valore reale di h, inoltre h compare solo al grado 1 in A e quindi l'equazione rappresenta tutte e sole le coniche di un fascio. Si ha $I_3 = detA = -8h^2 + 2h$ e quindi per $h = 0$ o per $h = 1/4$ l'equazione rappresenta uno conica degenere. Inoltre $I_2 = 8h - 4$, pertanto per $h = 1/2$ l'equazione rappresenta una parabola non degenere, per $h < 1/2$ l'equazione rappresenta un'iperbole (e quindi in particolare per $h = 0$ ed $h = 1/4$ l'equazione rappresenta una conica spezzata in due rette reali distinte); inoltre $I_1 = 2h + 4$ per cui per $h = -2$, l'equazione rappresenta un'iperbole equilatera. Se invece $h > 1/2$ l'equazione rappresenta un'ellisse che è sempre reale. Quindi per h=2 abbiamo un'ellisse reale. Il suo centro è la soluzione del sistema $4x + 2y = -4, 2x + 4y = -1$ quindi ha coordinate $(-7/6, 1/3)$. Gli autovalori di

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

sono le radici del polinomi $(4 - \lambda)^2 - 4$ e quindi sono $2, 6$, gli autovettori ad essi associati sono $(t, -t), t \neq 0$ e $(s, s), s \neq 0$ quindi le direzioni degli assi sono rappresentate dai vettori $(1, 1), (1, -1)$ e gli assi sono $x = y - 3/2$ e $x = -y - 5/6$.