

# Matrici invertibili

Sia  $A$  una matrice quadrata di ordine  $n$ .

- Una matrice  $B$  si dice *inversa destra* di  $A$  (ed  $A$  si dice invertibile a destra) se  $AB=I_n$ .
- Una matrice  $C$  si dice *inversa sinistra* di  $A$  (ed  $A$  si dice invertibile a sinistra) se  $CA=I_n$ .
  - $B$  e  $C$  sono ovviamente matrici quadrate di ordine  $n$ .

- $A$  si dice *invertibile* (o non singolare) se è invertibile a destra e a sinistra

➤ Se  $A$  è invertibile la sua inversa destra e sinistra coincidono

Siano  $B, C$  le inverse destre e sinistre di  $A$ ;  $B$  e  $C$  sono matrici quadrate di ordine  $n$ .

Si ha  $AB=I_n$  e  $CA=I_n$ . Moltiplicando a sinistra per  $C$  la prima uguaglianza si ha

$C(AB)=C$  e per la proprietà associativa  $(CA)B=C$ , ma  $CA=I_n$  e quindi  $B=C$

➤ Se  $A$  è invertibile la sua inversa è unica e nel seguito sarà indicata con  $A^{-1}$ .

## C. n. s. per l'esistenza della matrice inversa

Teorema: Sia  $A$  una matrice quadrata di ordine  $n$ .

Sono equivalenti:

- a)  $A$  ammette inversa
- b)  $A$  ammette inversa destra
- c)  $A$  ammette inversa sinistra
- d)  $\text{rk}(A)=n$
- e) il sistema lineare omogeneo  $A\underline{x}=\underline{0}$  non ha autosoluzioni (in altre parole  $\text{Ker } A=\{\underline{0}_{(n,1)}\}$ )
- f) ogni sistema lineare  $A\underline{x}=\underline{b}$  ha una e una sola soluzione

Dim.

c)  $\Rightarrow$  e). Sia  $C$  l'inversa sinistra di  $A$  e sia  $\underline{v}$  una soluzione del sistema  $A\underline{x}=\underline{0}$ . Si ha allora  $A\underline{v}=\underline{0}$  e quindi  $C(A\underline{v})=C\underline{0}=\underline{0}$ , da questa uguaglianza per la proprietà associativa del prodotto si ha  $(CA)\underline{v}=\underline{0}$  e, essendo  $CA=I_n$ , si ottiene  $\underline{v}=\underline{0}$

## C. n. s. per l'esistenza della matrice inversa (continua)

e)  $\Rightarrow$  d) Segue dal (corollario per i sistemi omogenei del) teorema di Rouché-Capelli

d)  $\Rightarrow$  f) Segue dal teorema di Rouché-Capelli

f)  $\Rightarrow$  b) Sia  $\underline{e}_i$  un vettore di tipo  $(n,1)$  il cui elemento di posto  $i$  è 1, mentre tutti gli altri sono 0. Ogni sistema  $A\underline{x}=\underline{e}_i$  per  $1 \leq i \leq n$  ha una ed una sola soluzione  $\underline{b}_i$ . Sia  $B=[\underline{b}_1 | \underline{b}_2 | \dots | \underline{b}_n]$ , si ha  $AB=[A\underline{b}_1 | A\underline{b}_2 | \dots | A\underline{b}_n]=[ \underline{e}_1 | \underline{e}_2 | \dots | \underline{e}_n]=I_n$  e dunque  $B$  è l'inversa destra di  $A$ .

Ovviamente a questo punto c)  $\Rightarrow$  a).

Resta da provare che b)  $\Rightarrow$  c) Sia  $B$  l'inversa destra di  $A$ . Allora  $B$  ammette  $A$  come inversa sinistra e quindi, poiché sappiamo che c)  $\Rightarrow$  b),  $A$  ha inversa destra  $D$ . Ma se una matrice ha inversa sinistra e destra queste coincidono e dunque  $A=D$  e  $BA=I_n$

# Calcolo dell'inversa col metodo di Gauss-Jordan

Sia data  $A$  una matrice quadrata di ordine  $n$  non singolare. Vogliamo calcolare  $A^{-1}$ .

1. Sappiamo che se  $A$  è non singolare, la sua inversa si ottiene accostando i vettori soluzione dei sistemi lineari  $A\underline{x}=\underline{e}_i$  con  $1 \leq i \leq n$ .
2. Consideriamo la matrice  $D=[A | I_n]$ , poiché  $A$  ha rango  $n$  anche  $D$  ha rango  $n$  e quindi se la portiamo in forma a scala troviamo

$$D^{(0)} = \left[ \begin{array}{cccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} & B' \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \\ 0 & \dots & \dots & a'_{nn} & \end{array} \right] \text{ con } a'_{ii} \neq 0 \text{ per ogni } 1 \leq i \leq n$$

3. Aggiungiamo alla riga  $i$  di  $D^{(0)}$ , per ogni  $i$  con  $1 \leq i \leq n-1$ , l'ultima riga di  $D^{(0)}$  moltiplicata per  $-a'_{in}/a'_{nn}$ , ottenendo una matrice  $D^{(1)}$  la cui colonna  $n$  ha solo l'ultimo elemento diverso da 0

## Calcolo dell'inversa col metodo di Gauss-Jordan (cont)

4. Aggiungiamo alla riga  $i$  di  $D^{(1)}$ , per ogni  $i$  con  $1 \leq i \leq n-2$ , la riga  $n-1$  di  $D^{(1)}$  moltiplicata per  $-a_{i,n-1}^{(1)} / a'_{n-1,n-1}$ , ottenendo una matrice  $D^{(2)}$  la cui colonna  $n-1$  ha solo l'elemento sulla riga  $n-1$  diverso da 0. Osservate che non abbiamo toccato la colonna  $n$  che quindi ha solo l'ultimo elemento diverso da 0.
5. Continuiamo il procedimento sulla colonna  $n-2$  della matrice  $D^{(2)}$  e così via fino ad ottenere una matrice della forma  $D^{(n-1)} = [\text{diag}(a'_{11}, \dots, a'_{nn}) | B'']$
6. Moltiplichiamo per ogni  $i$  con  $1 \leq i \leq n$  la riga  $i$  di  $D^{(n-1)}$  per  $1/a'_{ii}$  e otteniamo una matrice  $D^{(n)} = [I_n | B]$ .  $B$  è l'inversa di  $A$ 
  - Questo dipende dal fatto che se  $A\underline{x} = \underline{b}$  è un sistema lineare di  $n$  equazioni in  $n$  incognite con  $\text{rk}(A) = n$  e se coi passi precedenti riduciamo la matrice completa del sistema  $[A | \underline{b}]$  alla forma  $[I_n | \underline{b}']$  abbiamo trasformato il sistema  $A\underline{x} = \underline{b}$  nel sistema equivalente  $I_n \underline{x} = \underline{b}'$  la cui unica soluzione è  $\underline{b}'$  per il punto f) del precedente teorema. Col procedimento sopra descritto noi abbiamo contemporaneamente ridotto ogni matrice  $[A | \underline{e}_i]$  nella forma  $[I_n | \underline{b}_i]$  per ogni  $i$  con  $1 \leq i \leq n$ .

# Determinante di una matrice quadrata

La funzione *determinante* associa ad ogni matrice quadrata  $A$  di ordine  $n$  sul campo  $K$  un elemento di  $K$ , detto  $\det A$  (determinante di  $A$ ), così definito:

- Se  $n=1$ , ovvero  $A=[a]$ , allora  $\det A=a$ ,

- Se  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$  con  $n > 1$  allora chiamiamo

- $A_{ik}$  la matrice quadrata di ordine  $n-1$  che si ottiene da  $A$  cancellando la sua  $i$ -esima riga e la sua  $k$ -esima colonna,
- $M_{ik} = \det A_{ik}$  *minore complementare di  $a_{ik}$* ,
- $C_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$  *complemento algebrico di  $a_{ik}$* ,

e poniamo  $\det A = \sum_{i=1}^n a_{1i} C_{1i} = a_{11} C_{11} + a_{12} C_{12} + \cdots + a_{1n} C_{1n}$ .

- $\det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$  viene anche indicato con  $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

## Determinante di matrici di ordine 2 e 3

- Sia  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ , calcolare  $\det A$ .
  - $C_{11} = a_{22}$ ,  $C_{12} = -a_{21}$ , dunque  $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ .

- Sia  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ , calcolare  $\det A$ .

$$- C_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}, \quad C_{12} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{21}a_{33} + a_{23}a_{31},$$

$$C_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}, \text{ dunque}$$

$$\det A = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(-a_{21}a_{33} + a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

- Regola di Sarrus: Copiare a destra di  $A$  le prime due colonne di  $A$ 

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

e fare la somma dei prodotti degli elementi della diagonale principale di  $A$  e delle sue parallele uscenti da  $a_{12}$  e  $a_{13}$  (segnate con riga continua) meno la somma dei prodotti degli elementi della diagonale secondaria di  $A$  e delle sue parallele uscenti da  $a_{11}$  e  $a_{12}$  (segnate con riga tratteggiata).
- La regola di Sarrus vale solo per  $n=3$ , NON si generalizza per  $n>3$

# Proprietà del determinante

Sia  $A$  una matrice quadrata di ordine  $n$  sul campo  $K$ .

- 1° Teorema di Laplace. Il determinante di  $A$  è uguale alla somma dei prodotti degli elementi di una sua riga (o colonna) per i rispettivi complementi algebrici.
- $\det A = \det A^T$ .
- Se una riga (o una colonna) di  $A$  è il vettore nullo allora  $\det A = 0$ .
- Se  $A$  è una matrice triangolare, allora  $\det A = \prod_{i=1}^n a_{ii}$ .
- Se  $A'$  è ottenuta dalla matrice  $A$  scambiando due righe (o due colonne) allora  $\det A' = -\det A$ .
  - Se si scambia la riga  $i$  con la riga  $i+1$ , l'elemento di posto  $(i,k)$  di  $A'$  è uguale all'elemento di posto  $(i+1,k)$  di  $A$  e quindi il complemento algebrico dell'elemento di posto  $(i,k)$  di  $A'$  è l'opposto del complemento algebrico dell'elemento di posto  $(i+1,k)$  di  $A$ .
  - Se si scambiano due righe non contigue si effettua un numero dispari di scambi di righe contigue.

# Proprietà del determinante

- Se una matrice  $A$  ha due righe (colonne) uguali allora  $\det A = 0$ .
  - Se scambiamo le due righe uguali, la matrice non cambia ma il suo determinante dovrebbe cambiare di segno e 0 è l'unico elemento uguale al suo opposto.
- II° Teorema di Laplace. La somma dei prodotti di una riga (colonna) di  $A$  per i complementi algebrici di un'altra riga (colonna) è 0. In simboli:  $\sum_{i=1}^n a_{ki} C_{hi} = 0$  ( $\sum_{i=1}^n a_{ik} C_{jh} = 0$ ) se  $k \neq h$ .
  - Sia  $A'$  la matrice ottenuta da  $A$  copiando nella riga  $h$  la riga  $k$  di  $A$ .  $A'$  ha due righe uguali e quindi il suo determinante è 0 e se lo sviluppiamo rispetto agli elementi della riga  $h$  è  $\sum_{i=1}^n a_{ki} C_{hi}$
- Se  $A'$  è ottenuta dalla matrice  $A$  moltiplicando tutti gli elementi di una sua riga (o colonna) per  $t \in K$  allora  $\det A' = t \det A$ .
- $\det tA = t^n \det A$ .

## Proprietà del determinante

- Se  $A = \begin{bmatrix} \underline{R}_1 \\ \underline{R}_2 \\ \vdots \\ \underline{B} + \underline{C} \\ \vdots \\ \underline{R}_n \end{bmatrix}$  con  $\underline{R}_1, \underline{R}_2, \dots, \underline{R}_n, \underline{B}, \underline{C}$  vettori riga di tipo  $(1, n)$ , allora

$$\det A = \begin{vmatrix} \underline{R}_1 \\ \underline{R}_2 \\ \vdots \\ \underline{B} \\ \vdots \\ \underline{R}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \underline{R}_1 \\ \underline{R}_2 \\ \vdots \\ \underline{C} \\ \vdots \\ \underline{R}_n \end{vmatrix}. \quad (\text{Lo stesso vale per le colonne})$$

- Se  $A'$  è ottenuta da  $A$  aggiungendo a una sua riga (colonna) una combinazione lineare delle restanti righe (colonne), allora  $\det A = \det A'$

# Proprietà del determinante

- $\det A=0$  se e solo se una riga (colonna) di  $A$  è combinazione lineare delle restanti righe (colonne).
  - Se la riga  $i$  di  $A$  è combinazione lineare delle restanti, costruiamo la matrice  $A'$  aggiungendo ad  $i$  la combinazione lineare delle restanti con tutti i coefficienti cambiati di segno.  $A'$  ha una riga di  $0$  e  $\det A=\det A'$ .
  - Se  $\det A=0$  anche la matrice a scala ottenuta da  $A$  per eliminazione gaussiana ha determinante uguale a  $0$  e quindi almeno l'ultima riga tutta di  $0$ . Questo significa che la riga di  $A$  corrispondente all'ultima riga della matrice a scala è combinazione lineare delle restanti
- Teorema di Binet. Siano  $A$  e  $B$  due matrici quadrate di ordine  $n$ . Allora  $\det (AB) = (\det A)(\det B)$ .
- $A$  ammette inversa se e solo se  $\det A \neq 0$ .
  - Se  $A$  ammette inversa da  $AA^{-1}=I_n$  si ha  $\det (AA^{-1})=\det A \det A^{-1}=\det I_n =1$
  - Mostriamo che se  $\det A \neq 0$ , esiste  $A^{-1}$ , costruendola (con un nuovo algoritmo)

# Calcolo dell'inversa tramite i complementi algebrici

- Sia  $A$  una matrice quadrata e sia  $B$  una matrice quadrata di ordine  $n$  il cui generico elemento  $b_{ik}$  è il complemento algebrico  $C_{ki}$  di  $A$
- $AB = \text{diag}[\det A, \det A, \dots, \det A]$ 
  - Sia  $d_{rs}$  l'elemento di posto  $(r,s)$  di  $AB$ , si ha  $d_{rs} = \sum_{j=1}^n a_{rj} b_{js} = \sum_{j=1}^n a_{rj} C_{sj}$ , quindi se  $r=s$  per il primo teorema di Laplace  $d_{rs} = \det A$ , se  $r \neq s$  per il II teorema di Laplace  $d_{rs} = 0$

- Se  $\det A \neq 0$  si ha  $A^{-1} = \frac{1}{\det A} B = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$

# Proprietà delle matrici non singolari

- Se  $A$  è non singolare, anche  $A^{-1}$  è non singolare e si ha  $(A^{-1})^{-1}=A$ , inoltre  $\det A^{-1}=1/\det A$
- Se  $A$  è non singolare,  $A^T$  è non singolare e  $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$
- Sia  $B$  una matrice quadrata di ordine  $n$ .  $AB$  è non singolare se e solo se  $A$  e  $B$  sono non singolari e  $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$
- Se  $A$  è non singolare possiamo definire  $A^h$  per ogni intero relativo  $h$  ponendo
  - $A^h=AA\dots A$  ( $h$  volte) se  $h>0$
  - $A^0=I_n$  se  $h=0$
  - $A^h=A^{-1}A^{-1}\dots A^{-1}$  ( $-h$  volte) se  $h<0$Le potenze ad esponente intero relativo godono delle usuale proprietà delle potenze
- Se  $A$  è non singolare,  $AB=AC$  implica  $B=C$  e  $DA=EA$  implica  $D=E$

# Regola di Cramer

- Se  $A$  è non singolare ogni equazione matriciale della forma  $AX=B$  con  $B$  (e  $X$ ) di tipo  $(n,p)$  ha una e una sola soluzione della forma  $X=A^{-1}B$  (analogamente ogni equazione matriciale del tipo  $XA=B$  con  $B$  ed  $X$  di tipo  $(q,n)$  ha una ed una soluzione della forma  $X=BA^{-1}$ ).
  - $A^{-1}B$  è soluzione di  $AX=B$ , infatti  $A(A^{-1}B)=(AA^{-1})B=I_n B=B$ . Sia  $C$  un'altra soluzione allora  $AC=A(A^{-1}B)$  implica  $C=A^{-1}B$ .
- Un sistema lineare di  $n$  equazione in  $n$  incognite la cui matrice dei coefficienti  $A$  ha rango massimo ha una e una sola soluzione che è  $x_i = (\det A_i) / (\det A)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , dove  $A_i$  è la matrice che si ottiene da  $A$  sostituendo la colonna  $i$ -esima con la colonna dei termini noti.
  - Se  $A\underline{x}=\underline{b}$  è la scrittura matriciale del sistema, la sua unica soluzione è  $\underline{x}=A^{-1}\underline{b}$ . La componente  $i$  di  $\underline{x}$  è allora  $(1/\det A) \sum_{h=1}^n C_{hi} b_h$  e  $\sum_{h=1}^n C_{hi} b_h$  è lo sviluppo del determinante della matrice  $A_i$  secondo gli elementi della sua colonna  $i$ .

# Sommario

Abbiamo imparato:

- cosa è una matrice invertibile o non singolare;
- condizioni necessarie e sufficienti perché una matrice sia invertibile;
- come calcolare l'inversa di una matrice col metodo di Gauss-Jordan;
- cos'è il determinante di una matrice quadrata;
- le proprietà del determinante;
- come si calcola l'inversa di una matrice usando i complementi algebrici;
- proprietà delle matrici invertibili;
- regola di Cramer.