

Elementi di Geometria analitica dello spazio.

Ripasso rapido di nozioni elementari (capitolo 1 del testo)

Consideriamo lo spazio riferito ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali monometriche Oxyz, ogni punto P dello spazio è allora unicamente determinato da una terna ordinata di numeri (x_0, y_0, z_0) chiamati rispettivamente *ascissa*, *ordinata* e *quota* del punto, che rappresentano le componenti del vettore \overrightarrow{OP} rispetto alla base (canonica) di \mathbb{R}^3 , rappresentata dai versori $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ degli assi cartesiani (che spesso vengono indicati con $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$). \mathbb{R}^3 viene considerato come uno spazio euclideo di dimensione 3 rispetto al prodotto scalare standard.

La *distanza di due punti* P (x_0, y_0, z_0) , Q (x_1, y_1, z_1) è quindi $\|\overrightarrow{PQ}\|$, ovvero

$$\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}.$$

Le *coordinate del punto medio* M del segmento PQ sono $x_M = \frac{x_1 + x_0}{2}$, $y_M = \frac{y_1 + y_0}{2}$, $z_M = \frac{z_1 + z_0}{2}$.

Siano $\underline{u}, \underline{v}$ due vettori di \mathbb{R}^3 , detto θ l'angolo da essi formato, si ha $\cos \theta = \frac{|\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle|}{\|\underline{u}\| \|\underline{v}\|}$, quindi i due vettori sono *ortogonali* se e solo se $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = 0$.

E' utile per il seguito ricordare la definizione di prodotto vettoriale di due vettori di \mathbb{R}^3 . Dati due vettori $\underline{u}, \underline{v}$ il loro prodotto vettoriale $\underline{u} \times \underline{v}$ (denotato anche da $\underline{u} \wedge \underline{v}$) è un vettore tale che

- $\|\underline{u} \times \underline{v}\| = \|\underline{u}\| \cdot \|\underline{v}\| \sin \theta$, dove θ è l'angolo compreso tra \underline{u} e \underline{v}
- la direzione è ortogonale ad \underline{u} e a \underline{v}
- il verso è tale che la terna $\underline{u}, \underline{v}, \underline{u} \times \underline{v}$ risulti destrorsa.

Ovviamente $\|\underline{u} \times \underline{v}\|$ rappresenta l'area del parallelogramma di spigoli \underline{u} e \underline{v} costruito applicando i due vettori in uno stesso punto, e quindi $\underline{u} \times \underline{v} = 0$ se e solo se \underline{u} e \underline{v} sono vettori paralleli. Si ha subito che $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$, $\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$, $\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$, $\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$.

Inoltre se $\underline{u} = [x_1, y_1, z_1]^T$, $\underline{v} = [x_2, y_2, z_2]^T$ si ha $\underline{u} \times \underline{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$.

Si chiama invece prodotto misto di tre vettori $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ lo scalare $\langle \underline{u}, \underline{v} \times \underline{w} \rangle$, il cui valore assoluto rappresenta il volume del parallelepipedo di spigoli \underline{u} , \underline{v} e \underline{w} costruito applicando i tre vettori in uno stesso punto.

Piano

Un *piano* è individuato quando si conoscono un suo punto P (x_0, y_0, z_0) e un vettore normale al piano $\underline{n} = [a, b, c]^T$. Infatti in tal caso un punto Q (x, y, z) appartiene al piano se e solo se $\langle \overrightarrow{PQ}, \underline{n} \rangle = 0$, ovvero se e solo se $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ (equazione del piano per un punto con vettore normale dato).

Un piano è quindi rappresentato da un'equazione lineare nelle variabili x, y, z . Viceversa ogni equazione lineare $ax + by + cz + d = 0$, con a, b, c non tutti nulli rappresenta un piano con vettore normale $\underline{n} = [a, b, c]^T$, infatti se $a \neq 0$, considerato il punto P $(-d/a, 0, 0)$, il piano per P con vettore normale \underline{n} ha equazione $a(x + d/a) + by + cz = 0$ ovvero $ax + by + cz + d = 0$ (*equazione generale* del piano). Le componenti a, b, c del vettore normale al piano vengono anche chiamate *parametri direttori* del piano.

Osservate che nello spazio un'equazione lineare contenente solo due variabili, rappresenta ancora un piano che è parallelo all'asse corrispondente alla variabile mancante, quindi ad esempio l'equazione $x - 3y + 1 = 0$ rappresenta un piano parallelo all'asse z . (NON una retta) Analogamente

un'equazione lineare con una sola variabile rappresenta un piano parallelo a entrambi gli assi corrispondenti alle variabili mancanti, quindi ad esempio $z=3$ rappresenta un piano parallelo all'asse x e all'asse y , quindi parallelo al piano xy .

Un piano può anche essere individuato da due vettori $\underline{v}, \underline{w}$ linearmente indipendenti e ad esso paralleli e da un suo punto $P(x_0, y_0, z_0)$, in tal caso infatti il vettore $\underline{v} \times \underline{w}$ è normale al piano.

Un altro modo di individuare un piano è attraverso due suoi punti $P(x_0, y_0, z_0)$, $Q(x_1, y_1, z_1)$ ed un vettore parallelo al piano e non parallelo a \overline{PQ} , in tal caso infatti abbiamo i due vettori \overline{PQ} e \underline{v} paralleli al piano e linearmente indipendenti dal cui prodotto vettoriale troviamo un vettore normale al piano ed inoltre abbiamo un punto P del piano.

Infine un piano può essere individuato da tre suoi punti $P(x_0, y_0, z_0)$, $Q(x_1, y_1, z_1)$, $R(x_2, y_2, z_2)$, non allineati, infatti i due vettori \overline{PQ} e \overline{PR} sono vettori paralleli al piano e linearmente indipendenti quindi possiamo vedere il piano come piano per P e vettore normale $\overline{PQ} \times \overline{PR}$.

Noti un punto $P(x_0, y_0, z_0)$, e due vettori $\underline{v} = [v_1, v_2, v_3]^T$, $\underline{w} = [w_1, w_2, w_3]^T$ non linearmente dipendenti, il piano per P parallelo a \underline{v} e \underline{w} può anche essere scritto in equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_0 + v_1 t + w_1 u \\ y = y_0 + v_2 t + w_2 u \\ z = z_0 + v_3 t + w_3 u \end{cases}$$

con $t, u \in \mathbb{R}$, da cui eliminando i due parametri t ed u si ottiene un'equazione lineare nelle variabili x, y, z , dove i coefficienti delle variabili sono le componenti del vettore $\underline{n} = \underline{v} \times \underline{w}$ normale al piano.

Due piani nello spazio sono o incidenti o paralleli, sono *incidenti* se i loro vettori normali sono linearmente indipendenti, sono *paralleli* se i loro vettori normali sono linearmente dipendenti.

Quindi due piani $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ sono incidenti se la matrice $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$

ha rango 2 e sono *paralleli* se e solo se $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$ ha rango 1.

L'angolo fra due piani $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ è l'angolo formato dai loro vettori normali, quindi detto θ tale angolo, si ha $\cos \theta = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$.

Due piani sono *perpendicolari* se e solo se i loro vettori normali sono ortogonali, ovvero se e solo se $a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$.

Dati un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ ed un piano $\pi: ax + by + c = 0$, la *distanza di P da π* è la norma della proiezione del vettore \overline{AP} (con $A \in \pi$) sul vettore \underline{n} normale al piano. Dunque sia $A(x_1, y_1, z_1)$ con $ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$ allora $\overline{AP} = [x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1]^T$ e quindi

$$\text{dist}(P, \pi) = \frac{|\langle \overline{AP}, \underline{n} \rangle|}{\|\underline{n}\|} = \frac{|a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Dati due piani distinti $\alpha: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, $\beta: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, il *fascio di piani* individuato da α e β è l'insieme dei piani dello spazio di equazioni $\lambda(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \mu(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$.

Se i due piani α e β sono incidenti, hanno in comune una retta r , il fascio si chiama *fascio proprio* ed è formato da tutti e soli i piani dello spazio che contengono la retta r , detta *retta sostegno* del fascio del fascio; se α e β sono paralleli il fascio si dice *fascio improprio* ed è formato da tutti e soli i piani dello spazio paralleli ad α .

Rette

Dati due piani $\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, $\pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ distinti e non paralleli, il luogo dei punti comune ai due piani è una *retta* r di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

Il vettore direzione di r è il prodotto vettoriale dei vettori $\underline{n}_1, \underline{n}_2$ ortogonali rispettivamente a π_1 e π_2

ed è quindi $\underline{n}_1 \times \underline{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$, cioè $[b_1c_2 - b_2c_1, -(a_1c_2 - a_2c_1), a_1b_2 - a_2b_1]^T$ (avevamo già trovato

questo risultato via la teoria dei sistemi lineari). Le componenti di tale vettore vengono anche chiamate *parametri direttori* della retta; i parametri direttori di una retta sono definiti a meno di un fattore moltiplicativo non nullo. Se consideriamo un vettore direzione normalizzato, le sue componenti sono univocamente definite a meno del segno e vengono dette *coseni direttori* della retta perché rappresentano i coseni degli angoli formati rispettivamente dalle direzioni positive degli assi x, y, z con la direzione positiva della retta r ; la scelta del segno nei coseni direttori corrisponde alla scelta di una direzione per r .

Anche nello spazio una *retta* è individuata quando si conoscono

- un suo punto $P(x_0, y_0, z_0)$ e la sua direzione $\underline{d} = [d_1, d_2, d_3]^T$, che è una terna di parametri direttori della retta
- due suoi punti $P(x_0, y_0, z_0), Q(x_1, y_1, z_1)$, infatti noti due punti sappiamo che la direzione della retta è data dal vettore $\underline{d} = [x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0]^T$.

Noti $P(x_0, y_0, z_0)$ e $\underline{d} = [d_1, d_2, d_3]^T$, la retta per P di direzione \underline{d} ha *equazioni parametriche*
$$\begin{cases} x = x_0 + d_1 t \\ y = y_0 + d_2 t \\ z = z_0 + d_3 t \end{cases}$$

da cui eliminando t si ottengono due equazioni lineari nella variabili x, y, z in cui i coefficienti delle variabili sono le componenti di due vettori ortogonali alla direzione della retta.

Ovviamente due rette sono *parallele* se e solo se i loro vettori direzione (ovvero le loro terne di parametri direttori) sono proporzionali.

L'*angolo fra due rette* r ed s nello spazio è l'angolo formato dalla retta r con una retta parallela ad s passante per un punto di r ed è uguale all'angolo formato dai vettori direzione di r ed s . Se

$\underline{d}_1 = [a_1, b_1, c_1]^T$ è il vettore direzione di r , $\underline{d}_2 = [a_2, b_2, c_2]^T$ il vettore direzione di s e θ è l'angolo fra r ed s , si ha $\cos \theta = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$.

Le due *rette* sono *perpendicolari* se e solo se i loro vettori direzione sono ortogonali, ovvero se e solo se $a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$.

L'*angolo fra una retta* r ed un piano π nello spazio è l'angolo formato dalla retta r con la retta proiezione ortogonale di r sul piano π ed è quindi il complementare dell'angolo formato da r col vettore normale al piano. Quindi se $ax + by + cz + d = 0$ è l'equazione di π e $[a_1, b_1, c_1]^T$ è il vettore direzione di r , detto θ l'angolo fra la retta ed il piano, si ha $\sin \theta = \frac{a a_1 + b b_1 + c c_1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}$. Quindi

retta e piano sono *paralleli* se e solo se $a a_1 + b b_1 + c c_1 = 0$; la *retta* r è invece *perpendicolare al piano* π se e solo se è parallela al vettore ortogonale al piano e quindi se e solo se i due vettori $[a_1, b_1, c_1]^T$ e $[a, b, c]^T$ sono proporzionali.

Dati un punto P ed una retta r passante per A diretta come il vettore $\underline{d} = [a_1, b_1, c_1]^T$, la *distanza di P da r* è la proiezione ortogonale del vettore \overrightarrow{AP} sul piano per P perpendicolare ad r . Detta C

l'intersezione di tale piano con la retta r , il triangolo PCA è un triangolo rettangolo e, detto θ

l'angolo CPA , si ha $\text{dist}(P, r) = \|\overrightarrow{CP}\| = \|\overrightarrow{AP}\| \sin \theta = \frac{\|\overrightarrow{AP} \times \underline{d}\|}{\|\underline{d}\|}$. La distanza di P da r può anche essere

vista come la differenza fra il vettore \overrightarrow{AP} e la sua proiezione sulla retta r , si ha allora $\text{dist}(P, r) =$

$$\|\overrightarrow{CP}\| = \left\| \overrightarrow{AP} - \frac{\langle \overrightarrow{AP}, \underline{d} \rangle}{\|\underline{d}\|^2} \underline{d} \right\|.$$

Distanza fra due rette

Siano ora date due rette r, s nello spazio, la loro distanza è la distanza minima fra due loro punti. Ovviamente se r ed s sono incidenti la loro distanza è 0, se sono parallele la loro distanza è la distanza di un qualsiasi punto di s da r . Il caso da considerare è quindi quello di due rette sghembe. Dobbiamo dimostrare che esistono due punti $S_0 \in s, R_0 \in r$, tali che $\text{dist}(S_0, R_0) \leq \text{dist}(S, R)$ per ogni $S \in s, R \in r$. Chiamiamo $\underline{d}_1, \underline{d}_2$ i vettori direzioni di r ed s rispettivamente, il vettore $\underline{n} = \underline{d}_1 \times \underline{d}_2$ è un vettore non nullo ortogonale ad entrambe le rette. Sia π il piano che contiene r ed è parallelo ad \underline{n} , π interseca la retta s in un punto S_0 e nel piano π sappiamo che esiste ed è unica la retta per S_0 perpendicolare ad r . Poiché tale retta e la retta r giacciono nel piano π hanno un punto di intersezione R_0 . La retta $R_0 S_0$ è perpendicolare ed incidente ad r e ad s e quindi si verifica facilmente che $\text{dist}(S_0, R_0) \leq \text{dist}(S, R)$ per ogni $S \in s, R \in r$.

Troviamo ora la formula della distanza fra due rette sghembe r , passante per P e di direzione \underline{d}_1 , ed s , passante per Q di direzione \underline{d}_2 . Da quanto sopra dovremmo calcolarci R_0 e S_0 , ma $\overrightarrow{R_0 S_0}$ è la proiezione ortogonale di \overrightarrow{PQ} sul vettore \underline{n} e dunque $\text{dist}(r, s) = \frac{\|\overrightarrow{R_0 S_0}\|}{\|\underline{n}\|} = \frac{|\langle \overrightarrow{PQ}, \underline{n} \rangle|}{\|\underline{n}\|} = \frac{|\langle \overrightarrow{PQ}, \underline{d}_1 \times \underline{d}_2 \rangle|}{\|\underline{d}_1 \times \underline{d}_2\|}$.

Per calcolare questa distanza si può anche procedere in un modo più semplice, infatti $\|\overrightarrow{R_0 S_0}\|$ è la distanza di Q dal piano contenente r e parallelo ad s .

Esempio

Calcolare la distanza fra le due rette $r: \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ ed s di equazioni parametriche $x=t, y=t, z=2t$.

È evidente che r ed s sono sghembe. Per calcolare la loro distanza scriviamo il piano per r parallelo ad s . Il generico piano del fascio di sostegno r è $\lambda(x-1) + \mu y = 0$, perché il piano sia parallelo ad s deve essere $\lambda \cdot 1 + \mu \cdot 1 = 0$ quindi $\lambda = -\mu$. Il piano ha dunque equazione $x - y - 1 = 0$. Assegniamo a t il valore 0 per trovare un punto di s $O(0,0,0)$ e calcoliamo la distanza di O dal piano, abbiamo $d = 1/\sqrt{2}$.

OSSERVAZIONE IMPORTANTE

Nello spazio ogni piano è rappresentato o da un'equazione lineare nelle variabili x, y, z o da equazioni parametriche dipendenti da 2 parametri.

Ogni retta è invece rappresentata da due equazioni lineari nelle variabili x, y, z o da equazioni parametriche dipendenti da un parametro.

Da qui quasi nulla è reperibile sul testo.

Sfere e circonferenze

Si dice *sfera* il luogo dei punti dello spazio che hanno uguale distanza da un punto fisso C detto *centro* della sfera. La distanza di un punto della sfera dal centro è detta *raggio* della sfera.

L'equazione della sfera di centro $C(x_0, y_0, z_0)$ e raggio R è $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$, che svolgendo i conti risulta un'equazione del tipo $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$.

Vediamo ora cosa rappresenta al variare di a, b, c, d l'equazione $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$.

- se $a^2/4 + b^2/4 + c^2/4 - d > 0$, l'equazione rappresenta una sfera con centro nel punto $C(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2})$

$$\text{e raggio } R = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} - d}$$

- se $a^2/4+b^2/4+c^2/4-d=0$, l'equazione rappresenta una sfera con centro nel punto $C(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2})$ e raggio 0, ovvero è ridotta al solo punto reale C
- se $a^2/4+b^2/4+c^2/4-d < 0$, nessun punto reale soddisfa l'equazione che rappresenta quindi una sfera a punti immaginari.

Date una sfera $\sigma: x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ (a punti reali) ed un piano $\pi: a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$, la loro intersezione è una *circonferenza* γ che giace nel piano π . Tale circonferenza è rappresentata dal sistema di equazioni

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0 \\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \end{cases}$$

La circonferenza γ è reale se la distanza del centro C della sfera σ dal piano π è minore del raggio della sfera, in tal caso il *centro H della circonferenza* è la proiezione ortogonale di C sul piano π , e il raggio della circonferenza si trova applicando il teorema di Pitagora al triangolo CHA dove A è un qualunque punto della circonferenza, tale triangolo è rettangolo in H quindi detti R il raggio della sfera σ ed r il *raggio della circonferenza* γ si ha $R^2 = \|\overrightarrow{CH}\|^2 + r^2$, da cui si calcola subito r.

Se la distanza del centro di σ dal piano π è uguale al raggio R della sfera, la circonferenza è ridotta ad un sol punto reale H che è la proiezione ortogonale di C su π . Il piano π è *tangente* alla sfera e H è il punto di tangenza.

Se la distanza del centro di σ dal piano π è minore del raggio R della sfera, la circonferenza è priva di punti reali.

Date una sfera $\sigma: x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ (a punti reali) ed una retta

$$s: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

le loro intersezioni sono le soluzioni si ottengono dal sistema quadratico

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0 \\ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

e quindi sono due punti che possono essere reali distinti, reali coincidenti, o immaginari.

Se la distanza del centro di σ dalla retta s è minore del raggio R della sfera, le intersezioni sono due punti reali distinti A,B che sono gli estremi della corda tagliata dalla sfera sul piano. Detta H la proiezione ortogonale del centro C della sfera sulla retta s, il triangolo AHB è rettangolo in H ed H è il punto medio della corda AB, per cui la *lunghezza l della corda* si trova applicando il teorema di

Pitagora. Si ha $l=2\sqrt{R^2 - \|\overrightarrow{CH}\|^2}$.

Se la distanza di C dalla retta s è R i due punti sono reali coincidenti (A=B) e la retta s è una retta *tangente* a σ in A e giace sul piano tangente a σ in A, che è il luogo delle rette tangenti a σ in A.

Se la distanza di C da s è maggiore di R i due punti sono immaginari ed in tal caso la retta è esterna alla sfera.

Date due sfere $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$, $x^2+y^2+z^2+a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ (a punti reali), il luogo dei loro punti di intersezione è rappresentato dal sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0 \\ x^2+y^2+z^2+a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \end{cases}$$

equivalente a

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0 \\ (a_1-a)x+(b_1-b)y+(c_1-c)z+(d-d_1)=0 \end{cases}$$

Quindi l'intersezione di due sfere è una circonferenza che può essere reale, ridotta ad un solo punto reale, o immaginaria. Se la circonferenza è ridotta ad un solo punto reale le due sfere si dicono tangenti (questo accade se la distanza dei loro centri è uguale alla differenza o alla somma dei loro raggi)

Chiamiamo *fascio di sfere* individuato dalle sfere $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$, $x^2+y^2+z^2+a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ l'insieme delle sfere di equazione

$$\lambda(x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d)+\mu(x^2+y^2+z^2+a_1x+b_1y+c_1z+d_1)=0 \quad \text{con } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Tale fascio può anche essere rappresentato da

$$\lambda(x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d)+\mu[(a_1-a)x+(b_1-b)y+(c_1-c)z+(d-d_1)]=0.$$

Il piano $(a_1-a)x+(b_1-b)y+(c_1-c)z+(d-d_1)=0$ si chiama *piano radicale* del fascio.

Se le due sfere che determinano il fascio hanno una circonferenza reale in comune, ogni sfera del fascio contiene quella circonferenza, il luogo dei centri delle sfere del fascio è la retta ortogonale al piano radicale passante per il centro della circonferenza comune a tutte le sfere del fascio. Se le due sfere hanno in comune una circonferenza ridotta ad un solo punto reale, tutte le sfere del fascio sono tangenti in tale punto al piano radicale ed il luogo dei centri delle sfere del fascio è la retta perpendicolare al piano radicale passante per il punto di tangenza.

Una sfera dipende da quattro parametri essenziali ed è quindi completamente determinata se abbiamo *quattro condizioni lineari* come, ad esempio, conoscere

- centro e raggio della sfera,
- quattro punti (non complanari e a tre a tre non allineati) che devono appartenere alla sfera
- due punti che devono appartenere alla sfera e il piano tangente in uno di essi (che naturalmente non deve passare per l'altro), etc.

Abbiamo già visto come scrivere l'equazione della sfera di cui siano noti centro e raggio.

Vediamo allora come scrivere la equazione della *sfera* che passa *per quattro punti* A,B,C, D non complanari e a tre a tre non allineati. Scriviamo l'equazione del fascio di sfere passanti per A,B,C che è formato da tutte e solo le sfere per A con centro sulla retta comune ai piani assiali di AB e di AC e imponiamo il passaggio per D.

Esempio 1 Scrivere l'equazione della sfera per A (0,0,0), B (2,2,2), C(0,0,2), D (3,2,5).

Il piano assiale del segmento AB ha equazione $x+y+z-3=0$, il piano assiale del segmento AC ha equazione $z=1$, quindi la retta comune ai due piani ha equazioni parametriche $x=t, y=2-t, z=1$ allora la generica sfera per A,B,C ha equazione $(x-t)^2+(y-2+t)^2+(z-1)^2=t^2+(2-t)^2+1$, ovvero $x^2+y^2+z^2-2xt+2(2-t)y-2z=0$. Imponendo il passaggio per D abbiamo $38-6t+8-4t-10=0$ ovvero $t=36/10$ che sostituito nell'equazione del fascio restituisce l'equazione della sfera.

Vediamo poi come scrivere la equazione della *sfera* che passa *per due punti* A,B ed è *tangente in A ad un piano* π non passante per B. Scriviamo l'equazione del fascio di sfere tangenti in A a π , tale fascio è costituito da tutte e sole le sfere passanti per A con centro sulla retta per A perpendicolare al piano π , poi imponiamo il passaggio per B.

Esempio 2 Scrivere l'equazione della sfera per A (2,2,1), B (3,1,4) tangente in A al piano $x=2$.

La retta per A perpendicolare a $x=2$ ha equazioni parametriche $x=2+t, y=2, z=1$. La generica sfera per A con centro appartenente alla retta trovata ha equazione $(x-2-t)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=t^2$, ovvero $x^2+y^2+z^2-2x(2+t)-4y-2z+9+4t=0$. Imponendo il passaggio per B abbiamo $26-6(2+t)-4-8+9+4t=0$, da cui $11-2t=0, t=11/2$ che sostituito nell'equazione del fascio restituisce l'equazione della sfera cercata.

Vediamo ora come scrivere l'equazione della *sfera* che passa per tre punti A,B,C ed è *tangente* in A ad retta *r* non passante per B e C e tale che C non stia sul piano individuato da *r* e da B. Scriviamo l'equazione del fascio di sfere passanti per B e tangenti in A ad *r*, tale fascio è costituito da tutte e sole le sfere per A il cui centro sta sulla retta individuata dal piano assiale del segmento AB e dal piano per A perpendicolare ad *r*, poi imponiamo il passaggio per C.

Esempio 3 Scrivere l'equazione della sfera per A (2,2,1), B (3,1,4), C=(0,5,1) tangente in A alla retta $x=2, y=2$. Il piano per A perpendicolare alla retta $x=2, y=2$ ha equazione $z=1$. Il piano assiale del segmento AB ha equazione $2x-2y+6z-21=0$. Scriviamo la generica sfera per A con centro appartenente alla retta $z=1, 2x-2y+6z-21=0$ le cui equazioni parametriche sono $x=t+15/2, y=t, z=1$. Tale sfera ha equazione $(x-t-15/2)^2+(y-t)^2+(z-1)^2=(2-t-15/2)^2+(2-t)^2$. Imponendo il passaggio per C abbiamo $(-t-15/2)^2+(5-t)^2+(1-1)^2=(2-t-15/2)^2+(2-t)^2$, da cui $2t=37, t=37/2$ che sostituito nell'equazione del fascio restituisce l'equazione della sfera cercata.

Osserviamo che la sfera, che è una superficie, è rappresentata da un'unica equazione nelle variabili x,y,z , mentre la circonferenza, che è una curva, è rappresentata da un sistema di due equazioni nelle variabili x,y,z .

Vediamo ora come scrivere una circonferenza nello spazio:

- Siano noti centro e raggio e piano in cui la circonferenza giace: in questo caso scriviamo l'equazione della sfera che ha centro nel centro della circonferenza e raggio uguale a quello della circonferenza e scriviamo come equazioni della circonferenza il sistema formato dalla equazione della sfera e da quella del piano.
- Siano noti tre punti non allineati A,B,C: in questo caso si scrive l'equazione del fascio di sfere per quei tre punti, come abbiamo visto quando abbiamo parlato nell'esempio 1, si prende l'equazione di una di tali sfere e si mette questa equazione a sistema con quella del piano per i tre punti, ottenendo le equazioni della circonferenza
- Siano noti due punti A,B e la retta *r* tangente in uno di essi, ad esempio A, e non passante per l'altro, B: in questo caso la circonferenza giace nel piano individuato da *r* e da B e su una delle sfere tangenti ad *r* in A e passanti per B, che abbiamo visto come scrivere nell'esempio 3, per cui le equazioni della circonferenza sono l'equazione del piano insieme all'equazione di una sfera del fascio.

Superficie e curve nello spazio

Chiamiamo *superficie* il luogo dei punti dello spazio che soddisfano ad una equazione nelle variabili x,y,z . Una superficie può anche essere rappresentata da equazioni parametriche del tipo

$$\begin{cases} x=f_1(t,u) \\ y=f_2(t,u) \\ z=f_3(t,u) \end{cases} \quad \text{con } t,u \text{ parametri reali.}$$

Chiamiamo *curva* il luogo dei punti dello spazio che soddisfano ad un sistema di due equazioni nelle variabili x,y,z . Una curva può anche essere rappresentata da equazioni parametriche del tipo

$$\begin{cases} x=f_1(t) \\ y=f_2(t) \\ z=f_3(t) \end{cases} \quad \text{con } t \text{ parametro reale.}$$

Una *curva* si dice *piana* se esiste un piano che contiene tutti i suoi punti, *gobba* in caso contrario.

Esempi.

- Una circonferenza nello spazio è una curva piana

- La curva di equazioni parametriche $x=\sin t, y=\cos t, z=1-2\cos t-4\sin t$ è piana, infatti tutti i suoi punti soddisfano all'equazione del piano $z=1-2y-4x$
- La curva di equazioni parametriche $x=1+3t^2, y=1-t, z=4t^2-5t+6$ è piana. Un metodo per verificarlo è il seguente: prendiamo un generico piano $ax+by+cz+d=0$ e intersechiamo il piano con la curva data, otteniamo $a(1+3t^2)+b(1-t)+c(4t^2-5t+6)+d=0$ da cui ricaviamo $t^2(3a+4c)+t(-b-5c)+a+b+6c+d=0$, questa equazione per essere soddisfatta da ogni valore di t deve essere un'identità e quindi deve essere $3a+4c=0, -b-5c=0, a+b+6c+d=0$, da cui abbiamo $a=-4/3c, b=-5c, d=1/3c$, quindi il piano $-4/3x-5y+z+1/3=0$ contiene tutti i punti della curva data.
- La curva di equazioni parametriche $x=t, y=t^2, z=t^3$ è una curva gobba. Prendiamo un generico piano $ax+by+cz+d=0$, se intersechiamo il piano con la curva troviamo $at+bt^2+ct^3+d=0$, l'unico modo di ottenere un'identità è porre $a=b=c=d=0$. ma questi valori non danno un piano.

Superficie di rotazione

Data una curva γ ed una retta r la superficie descritta dai punti di γ durante una rotazione di 2π attorno alla retta r si dice *superficie di rotazione* generata da γ ed r si dice *asse di rotazione*.

Vediamo come scrivere, note r e γ , l'equazione della superficie di rotazione generata da γ con asse r . Il generico punto P di γ deve descrivere nella rotazione una circonferenza che può essere vista come intersezione del piano per P perpendicolare ad r con una sfera con centro sulla retta r passante per P . La superficie è il luogo di tutte queste circonferenze.

Sia $A(x_0, y_0, z_0)$ un punto di r , $d=[d_1, d_2, d_3]^T$ la sua direzione.

Se γ è data in equazioni cartesiane $\begin{cases} F(x, y, z)=0 \\ G(x, y, z)=0 \end{cases}$ il generico punto della curva è $P(x_1, y_1, z_1)$ con

$$(1) \begin{cases} F(x_1, y_1, z_1)=0 \\ G(x_1, y_1, z_1)=0 \end{cases}$$

La circonferenza descritta da P durante la rotazione ha equazioni

$$(2) \begin{cases} d_1(x-x_1)+d_2(y-y_1)+d_3(z-z_1(t))=0 \\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2 \end{cases}$$

ed eliminando i parametri x_1, y_1, z_1, t fra le (1) e le (2) si trova l'equazione della superficie.

Se γ è data in equazioni cartesiane $\begin{cases} x=f_1(t) \\ y=f_2(t) \\ z=f_3(t) \end{cases}$ il generico punto della curva è $P(f_1(t), f_2(t), f_3(t))$.

La circonferenza descritta da P durante la rotazione ha equazioni

$$\begin{cases} d_1(x-f_1(t))+d_2(y-f_2(t))+d_3(z-f_3(t))=0 \\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=(f_1(t)-x_0)^2+(f_2(t)-y_0)^2+(f_3(t)-z_0)^2 \end{cases}$$

ed eliminando il parametro t si trova l'equazione della superficie.

Esempio 4

Vediamo adesso un esempio particolarmente semplice. Supponiamo di voler ruotare la curva di equazioni $\begin{cases} z=0 \\ x^2-3y^2=1 \end{cases}$ attorno all'asse x . Il generico punto P della curva è $(x_0, y_0, 0)$ con x_0, y_0 che soddisfano la condizione $x_0^2-3y_0^2=1$. Il punto P descrive la circonferenza ottenuta intersecando il

piano $x=x_0$ (piano per P perpendicolare all'asse x) con la sfera $x^2+y^2+z^2 = x_0^2+y_0^2$ (sfera con centro in O passante per P). Eliminando i parametri si ottiene $x^2-3(y^2+z^2)=1$ che è l'equazione della superficie di rotazione. Tale equazione si ottiene sostituendo nella equazione della curva che sta ruotando a y il valore $\sqrt{y^2+z^2}$ e trascurando l'equazione del piano.

Questa è una *regola generale* per trovare le equazioni della superficie di rotazione ottenuta ruotando una curva in un piano coordinato attorno ad un asse coordinato giacente su quel piano.

La superficie di rotazione ottenuta ruotando una curva del piano xy attorno all'asse x si ottiene sostituendo $\sqrt{y^2+z^2}$ ad y; la superficie di rotazione ottenuta ruotando una curva del piano xy attorno all'asse y si ottiene sostituendo $\sqrt{x^2+z^2}$ ad x, la superficie di rotazione ottenuta ruotando una curva del piano xz attorno all'asse x si ottiene sostituendo $\sqrt{y^2+z^2}$ a z, la superficie di rotazione ottenuta ruotando una curva del piano xz attorno all'asse z si ottiene sostituendo $\sqrt{y^2+z^2}$ a x, la superficie di rotazione ottenuta ruotando una curva del piano yz attorno all'asse y si ottiene sostituendo $\sqrt{x^2+z^2}$ a z, la superficie di rotazione ottenuta ruotando una curva del piano yz attorno all'asse z si ottiene sostituendo $\sqrt{x^2+y^2}$ a y.

Coni

Chiamiamo *cono* una superficie per ogni punto della quale passa una retta g tutta contenuta nella superficie e passante per un punto fisso V , detto *vertice* del cono. Le rette g si dicono *generatrici* del cono e una curva tracciata sulla superficie che incontri ogni generatrice in almeno un punto diverso dal vertice si dice *direttrice* del cono. Diciamo che il cono è il luogo delle rette che proiettano la direttrice dal vertice.

$$\text{Sia } \delta \begin{cases} x=f_1(t) \\ y=f_2(t) \\ z=f_3(t) \end{cases} \text{ con } t \text{ parametro reale, e sia } V(x_0, y_0, z_0).$$

Il cono che ha V come vertice e δ come direttrice ha equazioni parametriche

$$(1) \begin{cases} x = x_0 + (f_1(t) - x_0)u \\ y = y_0 + (f_2(t) - y_0)u \\ z = z_0 + (f_3(t) - z_0)u \end{cases} \text{ con } t, u \text{ parametri reali.}$$

infatti le equazioni (1) rappresentano una retta passante per V e per il punto $G(f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ della generatrice, quindi una generatrice del cono; al variare di t il punto G descrive la direttrice e quindi la retta descrive il cono. Eliminando i parametri t, u si trova l'equazione cartesiana del cono.

Analogo procedimento si segue se la direttrice δ è data in equazioni cartesiane $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$.

In tal caso prendiamo un generico punto D della direttrice di coordinate (x_1, y_1, z_1) , che ovviamente deve soddisfare le condizioni

$$(2) \begin{cases} F(x_1, y_1, z_1) = 0 \\ G(x_1, y_1, z_1) = 0 \end{cases}, \text{ e scriviamo le equazioni parametriche della retta } VD:$$

$$(3) \begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t \\ z = z_0 + (z_1 - z_0)t \end{cases}$$

Eliminando i parametri x_1, y_1, z_1, t fra (2) e (3) si trova l'equazione cartesiana del cono

Esempio 5

Scrivere l'equazione del cono di direttrice $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-4z=0 \\ x+y=0 \end{cases}$ e vertice $V(3,5,6)$.

Prendiamo un generico punto $D(x_1, y_1, z_1)$, della direttrice, allora $\begin{cases} x_1^2+y_1^2+z_1^2-4z_1=0 \\ x_1+y_1=0 \end{cases}$.

La retta VD ha equazioni parametriche $\begin{cases} x=3+(x_1-3)t \\ y=5+(y_1-5)t \\ z=6+(z_1-6)t \end{cases}$ da cui ricaviamo $x_1=3+\frac{x-3}{t}$, $y_1=5+\frac{y-5}{t}$,

$z_1=6+\frac{z-6}{t}$. Sostituiamo questi valori in $x_1+y_1=0$ ed otteniamo $3+\frac{x-3}{t}+5+\frac{y-5}{t}=0$, da cui $t=(8-x-y)/8$ e quindi $x_1=3+\frac{8(x-3)}{8-x-y}$, $y_1=5+\frac{8(y-5)}{8-x-y}$, $z_1=6+\frac{8(z-6)}{8-x-y}$, che sostituiti in $x_1^2+y_1^2+z_1^2-4z_1=0$ danno l'equazione del cono.

Un cono si dice *circolare* se esiste un piano che lo taglia secondo una circonferenza (non ridotta ad un solo punto). Si dice *circolare retto* se la retta che congiunge il vertice col centro della circonferenza appartenente al cono è perpendicolare al piano della circonferenza. Un cono circolare retto è una superficie di rotazione (ottenuto ruotando una generatrice del cono attorno alla retta che congiunge il vertice con il centro della circonferenza sezione, che è una direttrice del cono). In un cono circolare retto ogni generatrice forma con l'asse di rotazione (asse di simmetria del cono) un angolo costante detto *angolo di apertura* del cono.

Esempi.

6) Il cono dell'esempio precedente è circolare in quanto la sua direttrice è una circonferenza (intersezione di una sfera con un piano). Il centro della circonferenza, data come direttrice, è $C(0,0,2)$, la retta CV ha la direzione del vettore $[3,5,4]^T$ e non è ortogonale a $x+y=0$, quindi il cono non è circolare retto.

7) Trovare l'equazione di un cono di rotazione che ha come asse la retta $x=1+t, y=2t, z=0$, vertice in $V(1,0,0)$, ed angolo di apertura $\theta=\pi/3$.

Un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ appartiene al cono se e solo se la retta VP è forma con l'asse di rotazione un angolo il cui coseno è $\cos \pi/3 = \sqrt{3}/2$, la retta VP ha equazioni parametriche $x=1+(x_0-1)t, t=y_0t, z=z_0t$ e quindi forma con l'asse di rotazione un angolo il cui coseno è $\frac{(x_0-1)+2y_0}{\sqrt{(x_0-1)^2+y_0^2+z_0^2}\sqrt{5}}$.

Quindi P appartiene al cono se e solo se $\frac{(x_0-1)+2y_0}{\sqrt{(x_0-1)^2+y_0^2+z_0^2}\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, da cui si ottiene che P appartiene al cono se e solo se soddisfa l'equazione $4(x-1)^2+8y^2+16(x-2)y=15(x-1)^2+15y^2+15z^2$, ovvero $11(x-1)^2+7y^2-16(x-1)y+15z^2=0$

8) Trovare l'equazione del cono di rotazione avente come asse di rotazione l'asse x , vertice $V(1,0,0)$ e passante per $A(0,2,0)$. Si può procedere in due modi.

a. Il cono è il luogo delle rette per V che formano con l'asse x lo stesso angolo θ formato dalla retta VA con l'asse x . La retta VA ha parametri direttori $(1,-2,0)$, l'asse x ha parametri direttori $(1,0,0)$, per cui $\cos \theta = 1/\sqrt{5}$ e quindi un punto $Q(x,y,z)$ appartiene al cono se la retta VQ forma con l'asse x l'angolo θ , da cui $\frac{|x-1|}{\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ e quindi $4(x-$

$$1)^2-y^2-z^2=0$$

b. La retta VA ha equazioni parametriche $x=1+t, y=2t, z=0$, per cui è l'intersezione del piano $z=0$ con il piano $y=2(x-1)$. La superficie di rotazione si ottiene allora sostituendo $\sqrt{y^2+z^2}$ ad y e si ottiene quindi $4(x-1)^2-y^2-z^2=0$

- 9) Trovare l'equazione del cono di vertice $V(4,4,0)$ tangente alla sfera $x^2+y^2+z^2-4x=0$.
 Un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ appartiene al cono se e solo se la retta VP è tangente alla sfera. La retta VP ha equazioni parametriche $x=4+(x_0-4)t$, $y=4+(y_0-4)t$, $z=z_0t$. facendo il sistema fra le equazione della sfera e della retta si ottiene $(4+(x_0-4)t)^2+(4+(y_0-4)t)^2+(z_0t)^2-4(4+(x_0-4)t)=0$, da cui $t^2[(x_0-4)^2+(y_0-4)^2+z_0^2]+2t[2(x_0-4)+4(y_0-4)]+16=0$. Affinché la retta sia tangente alla sfera il discriminante di questa equazione deve essere nullo e quindi si ha $[2(x_0-4)+4(y_0-4)]^2-16[(x_0-4)^2+(y_0-4)^2+z_0^2]=0$. Poiché il generico punto del cono deve avere coordinate che soddisfano la precedente condizione, l'equazione del cono è: $[2(x-4)+4(y-4)]^2-16[(x-4)^2+(y-4)^2+z^2]=0$.

Cilindri

Chiamiamo *cilindro* una superficie per ogni punto della quale passa una retta g di direzione assegnata tutta contenuta nella superficie. Le rette g si dicono *generatrici* del cilindro e una curva tracciata sulla superficie che incontri ogni generatrice in almeno un punto si dice *direttrice* del cilindro. Diciamo che il cono è il luogo delle rette che proiettano la generatrice in una direzione assegnata.

$$\text{Sia } \delta \begin{cases} x=f_1(t) \\ y=f_2(t) \\ z=f_3(t) \end{cases} \text{ con } t \text{ parametro reale, e sia } \underline{d}=[d_1, d_2, d_3]^T.$$

Il cilindro le cui generatrici sono parallele al vettore \underline{d} che ha δ come direttrice ha equazioni parametriche

$$(1) \begin{cases} x=f_1(t)+d_1u \\ y=f_2(t)+d_2u \\ z=f_3(t)+d_3u \end{cases} \text{ con } t, u \text{ parametri reali.}$$

infatti le equazioni (1) rappresentano una retta passante per il punto $G(f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ della generatrice con direzione \underline{d} , quindi una generatrice del cono; al variare di t il punto G descrive la direttrice e quindi la retta descrive il cono. Eliminando i parametri t, u si trova l'equazione cartesiana del cilindro.

Analogo procedimento si segue se la direttrice δ è data in equazioni cartesiane $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

In tal caso prendiamo un generico punto D della direttrice di coordinate (x_1, y_1, z_1) , che ovviamente soddisfa le condizioni

$$(2) \begin{cases} F(x_1, y_1, z_1)=0 \\ G(x_1, y_1, z_1)=0 \end{cases}, \text{ e scriviamo le equazioni parametriche della retta } VD:$$

$$(3) \begin{cases} x=x_0+d_1t \\ y=y_0+d_2t \\ z=z_0+d_3t \end{cases}$$

Eliminando i parametri x_1, y_1, z_1, t fra (2) e (3) si trova l'equazione cartesiana del cilindro

Esempio 10

Scrivere l'equazione del cilindro che proietta la curva $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-4z=0 \\ x+y=0 \end{cases}$ ortogonalmente al piano $x+2y+z=0$ (il che equivale a scrivere l'equazione del cilindro con direttrice $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-4z=0 \\ x+y=0 \end{cases}$ e generatrici di direzione $[1,2,1]^T$)

Prendiamo un generico punto $D(x_1, y_1, z_1)$ della direttrice, allora $\begin{cases} x_1^2+y_1^2+z_1^2-4z_1=0 \\ x_1+y_1=0 \end{cases}$.

La generica generatrice del cilindro ha equazioni parametriche $\begin{cases} x=x_1+t \\ y=y_1+2t \\ z=z_1+t \end{cases}$ da cui ricaviamo $x_1=x-t$, $y_1=y-2t$, $z_1=z-t$.

Sostituiamo questi valori in $x_1+y_1=0$ ed otteniamo $x+y-3t=0$, da cui $t=(x+y)/3$ quindi $x_1=\frac{2x-y}{3}$, $y_1=\frac{y-x}{3}$, $z_1=\frac{3z-x-y}{3}$ che sostituiti in $x_1^2+y_1^2+z_1^2-4z_1=0$ danno l'equazione del cilindro.

Un cilindro si dice *circolare* se esiste un piano che lo taglia secondo una circonferenza. Si dice *circolare retto* se tale piano è ortogonale alle generatrici del cilindro. Un cilindro circolare retto è una superficie di rotazione (ottenuto ruotando una generatrice del cilindro attorno alla retta parallela alle generatrici passante per il centro della circonferenza direttrice).

Osserviamo che ogni equazione $F(x,y)=0$ in cui non figura la variabile z rappresenta un cilindro che ha generatrici parallele all'asse z e come direttrice la curva $F(x,y)$ nel piano $z=0$, analogamente ogni equazione $F(x,z)=0$ in cui non figura la variabile y rappresenta un cilindro che ha generatrici parallele all'asse y e come direttrice la curva $F(x,z)$ nel piano $y=0$ e ogni equazione $F(y,z)=0$ in cui non figura la variabile x rappresenta un cilindro che ha generatrici parallele all'asse x e come direttrice la curva $F(y,z)$ nel piano $x=0$.

Quadriche in forma canonica

Ruotiamo l'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ del piano xy attorno all'asse x , otteniamo una equazione della forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2+z^2}{b^2} = 1$ che rappresenta una superficie detta *ellissoide di rotazione*. In generale chiamiamo *ellissoide* una superficie di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Ruotiamo l'iperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ del piano xy attorno all'asse x , otteniamo una equazione della forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2+z^2}{b^2} = 1$ che rappresenta una superficie detta *iperboloide a due falde* (o ellittico) di rotazione. In generale chiamiamo *iperboloide ellittico* una superficie di equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Ruotando la stessa iperbole attorno all'asse y otteniamo una equazione della forma $\frac{x^2+z^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ che rappresenta una superficie detta *iperboloide ad una falda* (o iperbolico) di rotazione. In generale chiamiamo *iperboloide iperbolico* una superficie di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Ruotando la parabola $y^2=2px$ del piano xz attorno al suo asse, otteniamo una equazione della forma $y^2+z^2=2px$ che rappresenta una superficie detta *paraboloide ellittico* di rotazione. In generale chiamiamo *paraboloide ellittico* una superficie di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz$.

Chiamiamo invece *paraboloidi* iperbolico o *a sella* una superficie di equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz$.

L'ellissoide e gli iperboloidi hanno un centro di simmetria e tre rette di simmetria ortogonali e vengono anche chiamate *quadriche a centro*. I paraboloidi hanno una sola asse di simmetria ortogonale.

L'ellissoide incontra l'asse x nei due punti reali $A_1(a,0,0)$, $A_2(-a,0,0)$, l'asse y nei punti reali $B_1(0,b,0)$, $B_2(0,-b,0)$ e l'asse z nei punti reali $C_1(0,0,c)$, $B_2(0,0,-c)$ detti *vertici* dell'ellissoide, tutti i suoi punti reali hanno coordinate (x,y,z) che soddisfano le limitazioni $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$, $-c \leq z \leq c$.

L'iperboloidi a due falde (o ellittico) incontra l'asse x nei due punti reali $A_1(a,0,0)$, $A_2(-a,0,0)$ detti *vertici* dell'iperboloidi e non ha intersezioni reali con gli altri assi. Tutti i punti reali dell'iperboloidi a due falde hanno coordinate (x,y,z) che soddisfano le limitazioni $x \leq -a$, $x \geq a$.

L'iperboloidi ad una falda (o iperbolico) incontra l'asse x nei due punti reali $A_1(a,0,0)$, $A_2(-a,0,0)$ e l'asse y nei due punti reali $B_1(0,b,0)$, $B_2(0,-b,0)$, mentre non ha intersezioni reali con l'asse z. Inoltre l'iperboloidi ad una falda può essere visto come luogo di rette, infatti i due sistemi di rette di

equazioni $\begin{cases} x/a - z/c = k(1 - y/b) \\ k(x/a + z/c) = (1 + y/b) \end{cases}$ con k parametro reale e $\begin{cases} x/a + z/c = h(1 - y/b) \\ h(x/a + z/c) = (1 - y/b) \end{cases}$ sono formati

da rette che giacciono tutte sulla superficie. In particolare per ogni punto dell'iperboloidi a una falda passa una retta del primo sistema ed una retta del secondo sistema. E' facile verificare che due rette distinte di uno stesso sistema sono sghembe, mentre ogni retta di un sistema è sempre incidente ad ogni retta dell'altro.

Il paraboloidi ellittico incontra l'asse z nell'origine ed in O è tangente al piano $z=0$. L'origine è detto *vertice* del paraboloidi. Tutti i suoi punti reali hanno coordinate (x,y,z) che soddisfano le limitazioni $z \geq 0$ se $p > 0$, $z \leq 0$ se $p < 0$.

Il paraboloidi iperbolico o a sella incontra l'asse z nell'origine ed in O è tangente al piano $z=0$. Il piano $z=0$ taglia il paraboloidi lungo due rette (passanti per O). Il paraboloidi iperbolico può

essere visto come luogo di rette, infatti i due sistemi di rette di equazioni $\begin{cases} x/a - y/b = k \\ k(x/a + y/b) = 2pz \end{cases}$ con k

parametro reale e $\begin{cases} x/a + y/b = h \\ h(x/a - y/b) = 2pz \end{cases}$ con h parametro reale, sono formati da rette che giacciono

tutte sulla superficie. In particolare per ogni punto del paraboloidi ellittico passa una retta del primo sistema ed una retta del secondo sistema. E' facile verificare che due rette distinte di uno stesso sistema sono sghembe, mentre due ogni retta di un sistema è sempre incidente ad ogni retta dell'altro.

Sono quadriche anche quei coni e quei cilindri le cui equazioni risultano di secondo grado, in tal caso vengono detti coni e cilindri quadrici.

In particolare se consideriamo un cono quadrico, prendendo un sistema di riferimento con l'origine nel vertice, l'equazione del cono è un'equazione omogenea di secondo grado in x,y,z .

Se consideriamo un cilindro quadrico, prendendo un sistema di riferimento che abbia l'asse z parallela alle sue generatrici il cilindro ha equazione $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$, che come sappiamo nel piano xy ($z=0$) rappresenta una conica che è la direttrice del cilindro.

Coni quadrici, cilindri quadrici, iperboloidi iperbolico e paraboloidi iperbolico sono dette *quadriche rigate* perché per ogni loro punto passa almeno una retta tutta contenuta nella superficie.

Un punto di una quadrica si dice iperbolico se per esso passano due rette reali distinte tutte appartenenti alla quadrica, parabolico se per esso passa una sola retta reale (due rette coincidenti) appartenente alla quadrica, ellittico se non ci sono rette reali passanti per il punto appartenenti alla quadrica.

Tutti i punti di un iperboloide iperbolico e di un paraboloido iperbolico sono punti iperbolici, tutti i punti di un cilindro sono parabolici, tutti i punti di un cono (diversi dal vertice) sono punti parabolici, tutti i punti di un ellissoide sono ellittici.

Quadriche e loro classificazione

Diciamo *quadrica* il luogo dei punti dello spazio che soddisfano un'equazione di secondo grado a coefficienti reali nelle variabili x, y, z , ovvero un'equazione della forma

$$(1) \quad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$$

Sappiamo che l'equazione (1) può anche essere scritta nella seguente forma matriciale

$$(2) \quad \underline{x}^T A \underline{x} + 2\underline{b}^T \underline{x} + a_{44} = 0$$

dove $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$ è una matrice reale e simmetrica, $\underline{b} = \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{bmatrix}$, $\underline{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

Un'altra scrittura più compatta dell'equazione (1) è

$$(3) \quad \underline{z}^T B \underline{z} = 0,$$

dove $B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix}$ è una matrice reale simmetrica, detta *matrice associata alla quadrica*, e $\underline{z} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$.

Le equazioni di ellissoidi, iperboloidi, paraboloidi, coni e cilindri quadrici precedentemente elencate sono casi particolari di (1), inoltre è facile notare che anche $(a_1x + b_1y + c_1z + d_1)(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$ con a_1, b_1, c_1, d_1 e a_2, b_2, c_2, d_2 reali oppure con $a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2; d_1, d_2$ complessi coniugati è un'equazione di 2° grado a coefficienti reali in x, y, z .

Sappiamo dunque che una quadrica può essere:

- un paraboloido ellittico o iperbolico,
- un'ellissoide (eventualmente una sfera)
- un'iperboloide ellittico o iperbolico
- un cono o un cilindro quadrico

oppure può essere spezzata in due piani che possono essere:

- reali non paralleli
- reali paralleli
- immaginari coniugati (cioè i piani sono rappresentati da equazioni lineari a coefficienti complessi e i coefficienti di un piano sono i coniugati dei corrispondenti coefficienti dell'altro).

Ci chiediamo allora se ogni quadrica ha uno dei precedenti tipi e se ci sono modi per decidere a partire da un'equazione di tipo (1) con che quadrica stiamo lavorando.

Richiamando i calcoli fatti nel capitoletto sulle coniche (Lemma 1 e Teorema 1) con una rototraslazione in \mathbb{R}^3 : $\underline{x} = U\underline{X} + \underline{v}$ (con $\det U = 1$) l'equazione della quadrica assume la forma $\underline{X}^T \tilde{A} \underline{X} + 2\underline{b}^T \underline{X} + \tilde{c} = \underline{Z}^T \tilde{B} \underline{Z} = 0$ dove \tilde{A} ha stesso rango, stessi autovalori e stesso determinante di A , \tilde{B} ha stesso rango e stesso determinante di B . Inoltre se la rototraslazione è scelta opportunamente, detti $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ gli autovalori di A , l'equazione della quadrica assume una delle seguenti forme:

- sia $\text{rk}A = \text{rk}B$
 - se $\text{rk}A = 3$ (ovvero $\det A \neq 0$ e $\det B = 0$) allora si ha $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 = 0$ e la quadrica rappresenta un *cono*
 - *reale* se gli autovalori di A hanno segni discordi (ovvero la forma quadratica associata ad A è non definita)
 - *con un solo punto reale* se gli autovalori di A hanno segni concordi (ovvero la forma quadratica associata ad A è definita positiva o definita negativa)
 - se $\text{rk}A = 2$ (quindi $\det A = 0$ e $\det B = 0$) allora si ha $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = 0$ e la quadrica è spezzata in *due piani* contenenti l'asse z
 - *reali distinti* se λ_1 e λ_2 , autovalori non nulli di A , hanno segni discordi (ovvero la forma quadratica associata ad A è non definita)
 - *immaginari coniugati* se λ_1 e λ_2 , autovalori non nulli di A , hanno lo stesso segno (gli unici punti reali della quadrica in tal caso sono i punti dell'asse z , la forma quadratica associata alla matrice A è semidefinita positiva o semidefinita negativa)
 - se $\text{rk}A = 1$ (quindi $\det A = 0$ e $\det B = 0$) allora si ha $\lambda_1 X^2 = 0$ e la quadrica è spezzata in *due piani coincidenti* col piano yz .
- sia $\text{rk}A + 1 = \text{rk}B$
 - se $\text{rk}A = 3$ (ovvero $\det A \neq 0$ e $\det B \neq 0$) allora si ha $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + \bar{c} = 0$ con $\bar{c} = \frac{\det B}{\det A}$, che rappresenta
 - un *ellissoide* se gli autovalori di A sono concordi (ovvero la forma quadratica associata ad A è definita positiva o definita negativa)
 - *reale* se $\det B < 0$
 - *immaginario* se $\det B > 0$
 - un *iperboloide* se gli autovalori di A non sono concordi (ovvero la forma quadratica associata ad A è non definita)
 - *ellittico* se $\det B < 0$
 - *iperbolico* se $\det B > 0$
 - se $\text{rk}A = 2$ (quindi $\det A = 0$ e $\det B = 0$) allora si ha $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \bar{c} = 0$ con $\bar{c} \neq 0$ e la quadrica rappresenta un *cilindro* la cui direttrice è
 - un'ellisse (eventualmente immaginaria) se gli autovalori non nulli di A sono concordi (ovvero la forma quadratica associata ad A è semidefinita positiva o semidefinita negativa)
 - un'iperbole se gli autovalori di A sono discordi (ovvero la forma quadratica associata ad A non definita)
 - se $\text{rk}A = 1$ (quindi $\det A = 0$ e $\det B = 0$) allora si ha $\lambda_1 X^2 + \bar{c} = 0$ con $\bar{c} \neq 0$ e la quadrica è spezzata in due piani paralleli (eventualmente immaginari coniugati)
- sia $\text{rk}A + 2 = \text{rk}B$
 - se $\text{rk}A = 2$ (ovvero $\det A = 0$ e $\det B \neq 0$) allora si ha $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + 2pZ = 0$ con $p \neq 0$ e la quadrica rappresenta un *paraboloide*
 - *ellittico* se gli autovalori non nulli di A sono concordi (ovvero la forma quadratica associata ad A è semidefinita positiva o semidefinita negativa)

(**) la direttrice del *cilindro* è in questo caso una parabola ed il cilindro è detto *parabolico*.

Data una quadrica per cui $\det B \neq 0$, gli invarianti di una quadrica e gli autovalori della matrice A ci permettono di scrivere la forma canonica della quadrica: infatti

- se gli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sono tutti diversi da 0 allora la forma canonica della quadrica sarà $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + c = 0$ dove $c = \det B / \det A$,
- se un autovalore è nullo allora la forma canonica della quadrica sarà $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2pz = 0$ dove
$$p = \sqrt{-\frac{\det B}{\lambda_1 \lambda_2}}$$

Coniche nello spazio.

Una conica nello spazio è l'intersezione di una quadrica con un piano, quindi si può rappresentare con un sistema di equazioni cartesiane di cui una è l'equazione del piano su cui la conica giace e l'altra è l'equazione di una retta.

Ad esempio il sistema
$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 - z^2 - 3 = 0 \\ x - z - 5 = 0 \end{cases}$$
 rappresenta una conica γ nello spazio.

Ci poniamo il problema di riconoscere tale conica.

Il sistema dato è equivalente a
$$\begin{cases} 3z^2 + y^2 + 40z + 97 = 0 \\ x - z - 5 = 0 \end{cases}$$
.

La prima equazione di questo sistema rappresenta un cilindro che proietta γ parallelamente all'asse x , quindi il sistema
$$\begin{cases} 3z^2 + y^2 + 40z + 97 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$
 rappresenta la proiezione ortogonale γ' di γ sul piano yz .

Le intersezioni di un cilindro quadrico con un qualunque piano non parallelo alle generatrici sono coniche tutte dello stesso tipo, quindi se riconosciamo la curva proiezione di γ su un piano coordinato riconosciamo la γ , a meno eventualmente di proprietà metriche della γ . Più precisamente se γ è un'iperbole la sua proiezione è un'iperbole che potrebbe essere un'iperbole equilatera anche se γ non è equilatera e viceversa, se γ è una circonferenza la sua proiezione potrebbe essere una ellisse e viceversa.

Riconosciamo allora la curva data come esempio. Considerando γ' si ha $I_2 > 0$, $I_3 \neq 0$ e dunque la conica γ' è un'ellisse e quindi la γ è un'ellisse (potrebbe anche essere una circonferenza).

Notate invece che se proiettiamo una conica da un punto su un piano coordinato, *proiezione centrale*, la conica proiettata e la proiezione possono essere di tipo diverso. Infatti come già abbiamo osservato se tagliamo un cono di rotazione con un piano parallelo all'asse di rotazione e non passante per il vertice l'intersezione rappresenta un'iperbole, se lo intersechiamo con un piano passante per il vertice troviamo una conica spezzata in due rette, se lo intersechiamo con un piano parallelo ad una sola direttrice, non passante per il vertice, troviamo una parabola, se lo intersechiamo con un piano tangente al cono in un suo punto (e quindi lungo tutta una direttrice) troviamo due rette coincidenti, se lo intersechiamo con un piano non parallelo ad alcuna direttrice e non passante per il vertice troviamo una ellisse, che diventa una circonferenza nel caso in cui il piano sia ortogonale all'asse di rotazione.