Sistemi lineari

Del tipo: $\begin{cases} x+y+3z=0 \\ 5x-y=1 \\ 6z+x=0 \end{cases}$, sistema composto da EQUAZIONI LINEARI, ovvero polinomi di 1° grado nelle incognite.

Se un sistema lineare ammette soluzioni, esse sono o una o infinite. In quest'ultimo caso si dice che ha ∞^t soluzioni, dove t è il numero di variabili da cui dipendono le soluzioni.

Eliminazione di Gauss

Metodo che ci permette di risolvere sistemi lineari e ci fornisce informazioni su di esso.

Es.

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ x+2y-z=1 \\ 3x+3y-z=4 \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{A|B} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \end{array}\right)$$

matrice incompleta. matrice completa.

$x=1$; $y=1$; $z=2$ 3 PIVOT

L'algoritmo consiste nello sfruttare la prima riga per eliminare gli elementi della prima colonna dalla seconda riga in poi, lasciando INALTERATA la prima riga. Reiterare per la seconda, terza, ..., m-esima riga fino a ottenere una matrice triangolare alta.
Questa matrice è detta a "gradini". I primi elementi diversi da zero in ogni riga prendono il nome di PIVOT.
Notiamo subito che se p è il numero di pivot e m il numero di colonne, si ha che $p \leq m$. Se $p=m$ allora NON compaiono righe nulle.

*È possibile scambiare l'ordine delle righe per comodità.

Definizione

Sia $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ e A' la matrice ottenuta dalla riduzione di Gauss di A. Il numero di PIVOT che appaiono nella matrice A' si dice RANGO della matrice A, e si indica con $r=r(A)$.

*Il rango di una matrice è un concetto FONDAMENTALE! Si tratta in un certo senso di una misura della quantità d'informazione portata dalla matrice.
Ad esempio se rimangono solo t righe NON nulle, allora il sistema ha t equazioni significative: le altre erano comb. lin di quelle di t.

> IL SISTEMA NON HA SOLUZIONI
> se e solo se
> nella riduzione di Gauss c'è un pivot sull'ultima colonna.

Se $(A|B)$ ha rango r, A avrà rango $r-1$ perché l'ultimo pivot si trova su B.

IL SISTEMA NON HA SOLUZIONI
se e solo se
$r(A) \neq r(A|B)$

TEOREMA DI ROUCHÉ-CAPELLI

Il sistema lineare $A \cdot X = B$ ha soluzioni se e solo se $r(A) = r(A|B)$.
Avremo quindi ∞^{n-r} soluzioni. (dove n sono le incognite e r i pivot).

DEFINIZIONE

Un sistema $A \cdot X = 0$ si dice OMOGENEO. (ovvero non ci sono termini noti)

* L'insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e la sua dimensione è pari al numero di variabili libere del sistema, cioè $n - r(A)$.

Perché è un sottospazio vettoriale?
1. Ammette sempre la soluzione nulla
2. Chiuso rispetto alla somma $A(x_1+x_2) = Ax_1 + Ax_2 = A \cdot 0 + A \cdot 0 = 0 + 0 = 0$
3. Chiuso rispetto al prodotto per uno scalare, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda x = \lambda 0 = 0$

* Il rango di una matrice $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ è uguale al numero massimo di righe o colonne lin. indipendenti di A.

$$\dim R(A) = r(A) = \dim C(A)$$

* Dati dei generici vettori possiamo verificare la lineare indipendenza costruendo una matrice e applicando Gauss.

Es.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$ Data la matrice A, calcolare una base dello spazio delle soluzioni.

* Che non è altro che trovare una base per il nucleo dell'applicazione lineare associata alla matrice.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to r(A) = 2$$

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 4y = z \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = -y \\ -8x = z \end{cases}$$

Il sistema ammette ∞^1 soluzioni ed esse sono del tipo $(a, -2a, -8a)$

Scriviamo la combinazione lineare delle soluzioni per ottenere una base:

$(a, -2a, -8a) = a(1, -2, -8)$ $\qquad (1, -2, -8)$ è la base cercata.