Applicazioni lineari

Definizione

Siano V, W due spazi vettoriali e $f: V \to W$ una funzione. Essa si dice APPLICAZIONE LINEARE se verifica le seguenti proprietà:

① $\forall v, w \in V \quad f(v+w) = f(v) + f(w)$

② $\forall v \in V, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda v) = \lambda f(v)$

In particolare si dice ENDOMORFISMO un'applicazione lineare da uno spazio vettoriale a se stesso: $f: V \to V$.

*Notiamo che TUTTE le applicazioni lineari portano l'elemento nullo dello spazio di partenza nell'elemento nullo dello spazio di arrivo
$f(0_V) = 0_W$. Basta porre $\lambda = 0$. Se non lo fanno NON sono applicazioni lineari.

Es. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = (x+y, x-y)$ Verificare che f è un'applicazione lineare.

① $v_1 = (x_1, y_1)$; $v_2 = (x_2, y_2)$

$$f[(x_1,y_1)+(x_2,y_2)] \underset{\text{SEPARO}}{=} (\overset{x}{x_1+x_2}, \overset{y}{y_1+y_2}) \underset{\text{SOSTITUISCO}}{=} (\overset{x+y}{x_1+x_2+y_1+y_2}, \overset{x-y}{x_1+x_2-y_1-y_2}) \overset{\text{ORDINO}}{=} (x_1+y_1+x_2+y_2, x_1-y_1+x_2-y_2) =$$
$$= (x_1+y_1, x_1-y_1) + (x_2+y_2, x_2-y_2) = f(x_1,y_1) + f(x_2,y_2) = f(v_1) + f(v_2)$$

② $v_1 = (x_1, y_1)$; $\lambda \in \mathbb{R}$

$$f[\lambda(x,y)] = f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x + \lambda y, \lambda x - \lambda y) \overset{\text{RAGGRUPPO}}{=} \lambda(x+y, x-y) = \lambda f(x,y)$$

Definizione

Data un'applicazione lineare $f: V \to W$, consideriamo i due insiemi associati ad essa:

① l'IMMAGINE di f: $\mathrm{Im}\, f = \{ w \in W \ / \ \exists v \in V, f(v) = w \}$ ⟶ I vettori $w \in W$ provengono, tramite f, da qualche $v \in V$

② Il NUCLEO di f: $\mathrm{Ker}\, f = \{ v \in V \ / \ f(v) = 0_W \}$ ⟶ I vettori $v \in V$ che, tramite f, portano l'elemento nullo in W

Lemma: Sia l'immagine, che il nucleo di f sono due SOTTOSPAZI VETTORIALI. (rispettivamente per il codominio e per il dominio)

Dimostrazione

① $\mathrm{Im}\, f$: $\forall w_1, w_2 \in W \ \exists v_1, v_2 \in V \ / \ f(v_1) = w_1, \ f(v_2) = w_2$. (per definizione)

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \qquad \alpha w_1 + \beta w_2 = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2) = f(\alpha v_1 + \beta v_2)$ // chiusura

Di conseguenza $(\alpha w_1 + \beta w_2) \in \mathrm{Im}\, f$ perché è l'immagine di $f(\alpha v_1 + \beta v_2)$.

② $\mathrm{Ker}\, f$: Ovviamente $0_V \in \mathrm{Ker}\, f$ (per definizione)

$\forall v_1, v_2 \in \mathrm{Ker}\, f, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$f(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2) = \alpha 0 + \beta 0 = 0$ // chiusura

*Ricorda: per verificare che un certo sottoinsieme sia anche sottospazio, devi verificare la CHIUSURA rispetto a somma e prodotto per scalare)

$(\alpha v_1 + \beta v_2) \in Ker f$ e $Ker f$ risulta essere un sottospazio di V.

Lemma: Se $f: V \to W$ é un' applicazione lineare:

-) f é INIETTIVA se e solo se $Ker f = \{0_v\}$ cioé $\dim(Ker f) = 0$ (nucleo banale)

-) f é SURIETTIVA se e solo se $Im f = W$ cioé $\dim(Im f) = \dim W$

DIMOSTRAZIONE

① INIETTIVITÁ: -) f INIETTIVA $\to Ker f = \{0_v\}$

Poiché f é iniettiva $\nexists$ un altro $v \in V$ t.c. $f(v) = 0_w$. Quindi solo 0_v andrá in 0_w.

-) $Ker f = \{0_v\} \to f$ INIETTIVA

Supponiamo $v, v' \in V$ t.c $f(v) = f(v')$. Avremo $f(v) - f(v') = 0_w \to f(v - v') = 0_w \to v - v' \in Ker f \to v = v' \to v = v' = 0$

② SURIETTIVITÁ -) Dalla definizione di suriettivitá sappiamo che una funzione é suriettiva se la sua immagine coincide con il suo codominio.

Lemma: L'immagine di una base del dominio é un sistema di generatori per l'immagine ($Im f$).

DIMOSTRAZIONE

Sia $f: V \to W$ un'applicazione lineare t.c $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ sia una base di V (B_v). $f(v) = w$. Riscriviamo v in funzione di B_v.

$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$

$f(v) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \dots + \alpha_n f(v_n) = w$ $\longrightarrow$ Dunque un qualsiasi $w \in W$ puó essere espresso mediante un'opportuna combinazione lineare.

Attenzione: $\{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)\}$ é un semplice SISTEMA DI GENERATORI, non una BA

CALCOLARE DIMENSIONI E BASI PER NUCLEO E IMMAGINE

① NUCLEO

Dopo aver scritto la matrice associata all'omomorfismo, risolviamo il sistema che si ottiene moltiplicando la matrice per la matrice colonna incognita.

Es. $f(x, y, z) = (x + y + z,\ x + 3y,\ 3x + 5y + 2z)$

$$A^{\varepsilon}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

• $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 3y = 0 \\ 3x + 5y + 2z = 0 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

• Il rango della matrice é 2, pertanto il sistema ammette ∞^{3-2} soluzioni e $\dim(Ker f) = 1$.

• Per la base assegniamo a un'incognita il ruolo di parametro libero. $y=\alpha$.

$$\begin{cases} x+\alpha+z=0 \\ x=-3\alpha \\ 3x+5\alpha+2z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x+\alpha+z=0 \\ x=-3\alpha \\ z=2\alpha \end{cases}$$

$(-3\alpha, \alpha, 2\alpha) \rightarrow \alpha(-3,1,2)$ $\quad (-3,1,2)$ è la base cercata.

② IMMAGINE

Come per il nucleo scriviamo la matrice associata all'omomorfismo. A questo punto studiamo la lineare indipendenza dei vettori colonna per trovare una base (e quindi la dimensione) per l'immagine.

Es. Scriviamo la trasposta della matrice precedente e andiamo a vedere se i vettori colonna sono linearmente indipendenti

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Non lo sono. In particolare solo $(1,1,3)$ e $(1,0,2)$ sono linearmente indipendenti. Dunque la base cercata è $B=\{(1,1,3),(1,0,2)\}$ e $\dim(\operatorname{Im} f)=2$

DEFINIZIONE

Una applicazione lineare $f: V \longrightarrow W$ si dice ISOMORFISMO se è biunivoca. In tal caso V, W si dicono isomorfi e si scrive $V \cong W$. Anche la funzione inversa $f^{-1}: W \longrightarrow V$ è un ISOMORFISMO. (cioè $\dim(V)=\dim(W)$)
Un endomorfismo biunivoco si dice invece AUTOMORFISMO.

MATRICE ASSOCIATA AD UNA APPLICAZIONE LINEARE

Consideriamo $f: V \longrightarrow W$, e siano $B_v=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $B_w=\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$, basi dei sottospazi V e W.

① Determiniamo l'immagine di ogni vettore v della base B_v. $\quad f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$.

② I vettori ottenuti sono elementi di W. Pertanto possiamo esprimerli come combinazione lineare dei vettori della base B_w.

$$f(v_1)=\alpha_{11}w_1+\alpha_{21}w_2+\dots+\alpha_{m1}w_m$$
$$f(v_2)=\alpha_{12}w_1+\alpha_{22}w_2+\dots+\alpha_{m2}w_m$$
$$\dots$$
$$f(v_n)=\alpha_{1n}w_1+\alpha_{2n}w_2+\dots+\alpha_{mn}w_m$$

Attenzione: Se le basi utilizzate sono basi canoniche SALTIAMO questo punto.

③ Costruiamo la matrice

$$A^{B_v,B_w}=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nm} \end{pmatrix} \in K^{m,n}$$

È la matrice che ha per colonne le coordinate rispetto alla base di arrivo B_w delle immagini (secondo f) dei vettori della base di partenza B_v.

N.b. Le matrici associate a un'applicazione lineare, poiché dipendenti dalle basi del dominio e codominio di tale applicazione sono INFINITE.

Es. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $\quad f(x,y,z)=(x+y,z)$ $\quad B_{\mathbb{R}^3}=\{(1,1,0),(0,1,0),(0,1,1)\}$

$B_{\mathbb{R}^2}=\{(1,1),(1,-1)\}$

① $f(1,1,0)=(2,0)$; $f(0,1,0)=(1,0)$; $f(0,1,1)=(1,1)$;

② $f(1,1,0)=(2,0)=\alpha(1,1)+\beta(1,-1) \longrightarrow \alpha=1,\ \beta=1 \quad \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$f(0,1,0)=(1,0)=\alpha(1,1)+\beta(1,-1) \longrightarrow \alpha=\frac{1}{2},\ \beta=\frac{1}{2} \quad \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$f(0,1,1)=(1,1)=\alpha(1,1)+\beta(1,-1) \longrightarrow \alpha=1,\ \beta=0 \quad \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

③ $A=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & 1\\ 1 & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$

*Ricorda: il numero di righe coincide con la dimensione dello spazio arrivo, mentre il numero delle colonne con la dimensione dello spazio di partenza.

MATRICE DEL CAMBIAMENTO DI BASE

Siano V, W due spazi vettoriali definiti sullo stesso campo $\mathbb{K}$ t.c. $\dim V=n$, $\dim W=m$. Siano $B_V, B_{V'}$ due basi associate a V, $B_W, B_{W'}$ due basi associate a W.
Sia inoltre $f: V \to W$ un'applicazione lineare e $A_{B_V B_W}(f)$ la matrice di f associata a B_V, B_W.
Ci proponiamo di scrivere $A_{B_{V'}B_{W'}}(f)$, la matrice che rappresenta f con le basi $B_{V'}, B_{W'}$, diverse da quelle considerate inizialmente.

$$A^{B_{V'}B_{W'}}(f)=M_{B_W\to B_{W'}}\cdot A^{B_V B_W}(f)\cdot\left(M_{B_V\to B_{V'}}\right)^{-1}$$

Es. $f(x,y,z)=(x+y-z,\ x-2y)$

$B_V=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ $\quad B_W=\{(1,0),(0,1)\}$

$B_{V'}=\{(0,2,1),(1,-1,0),(2,0,3)\}$ $\quad B_{W'}=\{(-1,1),(2,-5)\}$

① $f(1,0,0)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$f(0,1,0)=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ $\quad A_{B_V B_W}(f)=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}$

$f(0,0,1)=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$

② $M_{B_{W'}\to B_W}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -5\end{pmatrix}$; Calcoliamo quindi la matrice inversa $M_{B_W\to B_{W'}}$. $\det=+3$.

$M_{B_W\to B_{W'}}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{3} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

$M_{B_{V'}\to B_V}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$

③ Concludiamo applicando la formula: $\begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

TEOREMA DELLA DIMENSIONE

Sia $f: V \to W$ un'applicazione lineare, con $\dim V = n$. Allora:

$$\dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\operatorname{Ker} f) = n$$

DIMOSTRAZIONE

Sia $\dim(\operatorname{Ker} f) = r \leq n$ e $B_K = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ una base per $\operatorname{Ker} f$. Per il <u>TEOREMA DEL COMPLETAMENTO DELLA BASE</u> completiamo B_K a una base di V:

$$\{v_1, v_2, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$$

- Dobbiamo dimostrare che $\{f(v_{r+1}), \dots, f(v_n)\}$ è una base per $\operatorname{Im} f$. $\quad \overset{\dim(\operatorname{Ker} f)}{r} + \underbrace{(n-r)}_{\dim(\operatorname{Im} f)} = \overset{\dim(V)}{n}$

Abbiamo già escluso $\{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_r)\}$ perché nulli (poiché appartenenti a $\operatorname{Ker} f$)

- Consideriamo la combinazione lineare: $\alpha_{r+1} f(v_{r+1}) + \dots + \alpha_n f(v_n)$ e verifichiamo la lineare indipendenza:

$$\alpha_{r+1} f(v_{r+1}) + \dots + \alpha_n f(v_n) = 0_W$$
$$f(\alpha_{r+1} v_{r+1} + \dots + \alpha_n v_n) = 0_W \quad \longleftarrow \text{posso farlo perché } f \text{ è un'applicazione lineare.}$$

Ma $(\alpha_{r+1} v_{r+1}, \dots, \alpha_n v_n) \in \operatorname{Ker} f$. Dunque gli α sono <u>TUTTI NULLI</u>. (non possono essere nulli i vettori v perché facenti parte di una base di V).

Quindi $f(v_{r+1}), \dots, f(v_n)$ sono linearmente indipendenti.

Lemma: Sia $f: V \longrightarrow W$, con $\dim V = n = \dim W$. Allora f è iniettiva se e solo se è suriettiva.

DIMOSTRAZIONE

Per il teorema della dimensione $\dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\operatorname{Ker} f) = \dim V$. Se $\dim(\operatorname{Ker} f) = 0$, cioè f è INIETTIVA, $\dim(\operatorname{Im} f) = n$

N.b. È <u>ESSENZIALE</u> la condizione $\dim V = \dim W$. Se non fosse così, suriettività e iniettività sarebbero indipendenti.

Lemma: Sia $f: V \longrightarrow W$, con $\dim V = n$, $\dim W = m$.

- Se $n < m$ f <u>NON</u> può essere SURIETTIVA
- Se $n > m$ f <u>NON</u> può essere INIETTIVA

DIMOSTRAZIONE

(Im) Se $f: V \to W$ é suriettiva, allora $Im f = W$. Quindi $\dim(Im f) = \dim(W)$. Allora, per il teorema delle dimensione $\dim(W) = \dim(V) - \dim(Ker f)$, cioé $\dim(V) \geq \dim(W)$.

(Ker) f é iniettiva se e solo se $Ker f = \{0_V\}$, cioé $\dim(Ker f) = 0$. E quindi $\dim(Im f) = \dim(V)$. Ed essendo $Im f \subseteq W$, $\dim(W) \geq \dim(V)$

Lemma: Sia $f: V \longrightarrow W$, e $\dim V = n$. Sia $A_{BB'}(f)$ la matrice associata a f rispetto $B \subset V$ e $B' \subset W$. Avremmo:

-) $\dim(Im f) = r(A)$

-) $\dim(Ker f) = n - r(A)$

Dimostrazione

Se $B = \{v_1, \dots, v_n\}$, le colonne di A sono date dai vettori $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$. Quindi $\dim(Im f)$ = massimo numero di colonne indipendenti di A, cioé $\dim \mathcal{C}(A) = r(A)$.

Per il teorema della dimensione $\dim(Ker f) = n - \dim(Im f)$

Es. $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $\quad f(x,y,z) = (y-z, x-y, x-z)$

$f(1,0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $f(0,1,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $f(0,0,1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\leftarrow$ * conviene scrivere in questo modo la funzione sulle varie ba così si evita di inserire i numeri in maniera errata nella mat

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longleftarrow$ Scrivo direttamente la matrice associata poiché ho utilizzato le basi canoniche.

Applico Gauss: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$Im f = r(A) = 2$
$Ker f = n - r(A) = 1$

Determiniamo $Im f$. Basta scegliere due colonne lin. indipendenti. Ad esempio $\{(0,1,1), (1,-1,0)\}$

Determiniamo $Ker f$. $\begin{cases} y-z=0 \\ x-y=0 \\ x-z=0 \end{cases}$ $\begin{cases} y=z \\ x=y \\ x=z \end{cases}$ $\quad (1,1,1)$ esempio di base $\quad [(a,a,a), a \in \mathbb{R}$ base generica di Ker

Determinare un'applicazione lineare per un generico vettore

Es. $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $\quad F(e_1) = e_2 + e_3$ $\quad F(e_2) = 2e_1 - e_2 + e_3$

$F(x,y) = F(xe_1, ye_2) = F(xe_1) + F(ye_2) = xF(e_1) + yF(e_2) = x(e_2+e_3) + y(2e_1 - e_2 + e_3) = x(0,1,1) + y(2,-1,1) =$
$(2y, x-y, x+y)$

Oppure più semplicemente scriviamo la matrice associata a F: $A(F) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$