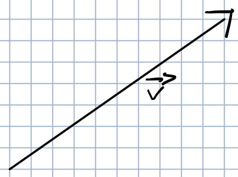
Ricordiamo che un vettore é un segmento orientato caratterizzato dalle seguenti proprietá:

1. Direzione, della retta passante per gli estremi del segmento.
2. Modulo, la lunghezza del segmento $|\vec{v}|$ in valore assoluto.
3. Verso, uno dei due possibili versi di percorrenza.



*Due vettori si dicono equipollenti se hanno stesso modulo, stessa direzione e stesso ver

*Definiamo versore un vettore di modulo 1 che conserva direzione e verso di un generico vettore v.

$$vers(v) = \frac{v}{\|v\|}$$

Operazioni

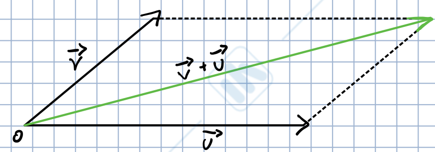
1. Somma e differenza tra vettori

1. Somma: $+ : V^n \times V^n \to V^n$ $\quad \vec{U}+\vec{V} = (\vec{U}_1+\vec{V}_1, \vec{U}_2+\vec{V}_2, \dots, \vec{U}_n+\vec{V}_n)$
2. Differenza: $- : V^n \times V^n \to V^n$ $\quad \vec{U}-\vec{V} = (\vec{U}_1-\vec{V}_1, \vec{U}_2-\vec{V}_2, \dots, \vec{U}_n-\vec{V}_n)$

Es. $\vec{U} = (1, -5, 7, 4)$, $\vec{V} = (-2, 8, -12, 3)$

$\vec{U}+\vec{V} = (-1, 3, -5, 7)$, $\vec{U}-\vec{V} = (3, -13, 19, 1)$

A livello geometrico si applica la REGOLA DEL PARALLELOGRAMMA.



*Nota: $(V^n, +)$ é un GRUPPO COMMUTATIVO, dove l'elemento neutro é il vettore nullo (0_v), e l'opposto é $-\vec{v}$.

2. Prodotto di un vettore per uno scalare

É un operazione esterna $\mathbb{R} \times V^n \to V^n$ definita dal prodotto tra un $\lambda \in \mathbb{R}$ e un vettore $v \in V^n$. $\lambda\vec{v} = (\lambda\vec{v}_1, \lambda\vec{v}_2, \dots, \lambda\vec{v}_n$

Es. $\lambda = 2$, $\vec{v} = (5, -2, 9)$

$\lambda\vec{v} = (10, -4, 18)$

Definizione

Sia V un insieme definito su un campo $\mathbb{K}$ dotato di un operazione interna di somma $V \times V \to V$ e un operazi esterna di prodotto per uno scalare $\mathbb{K} \times V \to V$. Allora la terna $(V, +, \cdot)$ si dice spazio vettoriale s

1. $(V, +)$ é un GRUPPO COMMUTATIVO.
2. L'operazione "$\cdot$" soddisfa la DISTRIBUTIVITÁ sia rispetto alla somma di vettori, che rispetto alla somma di scalar
   1. $\lambda \cdot (\vec{v} + \vec{u}) = \lambda\cdot\vec{v} + \lambda\cdot\vec{u}$
   2. $\vec{v} \cdot (\lambda + \gamma) = \lambda\cdot\vec{v} + \gamma\cdot\vec{v}$

③ L'operazione "·" soddisfa una "PSEUDO-ASSOCIATIVITÀ":

$$\lambda(\gamma \cdot \vec{v}) = (\lambda\gamma) \cdot \vec{v}$$

④ Vale la NEUTRALITÀ rispetto all'$1 \in \mathbb{K}$.

$$\vec{v} \cdot 1 = \vec{v}$$

Definiamo sottospazio vettoriale W, un sottoinsieme $W \subset V$ su cui sono definite le stesse operazioni di somma e prodotto per uno scalare dello spazio vettoriale V.
Ovvero, che W è CHIUSO rispetto alle due operazioni definite in V.

① $\vec{w}_1 + \vec{w}_2 \in W \quad \forall \vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W$

② $\lambda \cdot \vec{w}_1 \in W \quad \forall \vec{w}_1 \in W, \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$

③ $0_V = 0_W$, e tale zero è unico.

*Nota: Siano W_1, W_2 due sottospazi di V. Allora $W_1 \cup W_2$ è un sottospazio di V se e solo se $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$.

*Riconoscere uno spazio vettoriale "al-volo":

① Se le equazioni sono lineari (di tipo polinomiale e di 1° grado) e omogenee (termine noto nullo), allora s
tratta di uno spazio vettoriale

② Se le equazioni sono lineari ma non omogenee, allora non è uno spazio vettoriale. (non appartenenza dello ze

DEFINIZIONE

Sia $V_{\mathbb{K}}$ uno spazio vettoriale e siano $v_1, v_2, \dots, v_n \in V_{\mathbb{K}}$ (vettori). Questi sono detti linearmente indipendenti SE qualsiasi combinazione lineare del tipo:

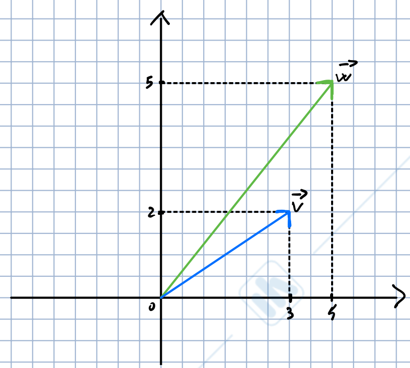
$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n \qquad \text{con } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} \text{ (scalari)}. \quad \text{(anche dette coordinate)}$$

è NULLA se e solo se $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

Es. Verifichiamo che $\vec{v}(3,2)$ e $\vec{w}(4,5)$ sono linearmente indipendenti:

$$\alpha_1(3,2) + \alpha_2(4,5) = 0 \longrightarrow (3\alpha_1 + 4\alpha_2, 2\alpha_1 + 5\alpha_2) = 0$$

$$-\begin{cases} 3\alpha_1 + 4\alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 + 5\alpha_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3\alpha_1 + 4\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 7\alpha_1 = 0 \longrightarrow \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 = \alpha_2 \end{cases}$$



*Se andiamo a rappresentare nel piano (se il campo è $\mathbb{R}^2$) i vettori, essi avranno coefficienti angolari diversi se e solo se so
indipendenti tra loro. Altrimenti il coefficiente angolare sarà lo stesso. (cioè i vettori sono paralleli).

DEFINIZIONE

Sia V uno spazio vettoriale definito su un campo $\mathbb{K}$ e $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq V$ un insieme di vettori di V.
Si dice Span l'insieme di tutte le possibili combinazioni lineari di tali vettori:

$Span(v_1, v_2, \dots, v_n)$; $L(v_1, v_2, \dots, v_n)$; $\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ (scritture equivalenti per indicare Span)

$v_1, v_2, \dots, v_n$ sono detti generatori dello spazio se $Span(v_1, v_2, \dots, v_n) = V_{\mathbb{K}}$. Ovvero se ogni vettore $\vec{v} \in V$ può essere scritto come combinazione lineare di vettori $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ con opportuni coefficienti del campo $\mathbb{K}$.
Se i vettori generatori dello spazio sono anche linearmente indipendenti allora parliamo di base di $V_{\mathbb{K}}$.

Es. Verifichiamo che $\vec{v}(2,3)$ e $\vec{w}(1,2)$ formano una base per $\mathbb{R}^2$.

① Verifichiamo la lineare indipendenza:

$\lambda(2,3) + \gamma(1,2) = 0 \longrightarrow (2\lambda+\gamma, 3\lambda+2\gamma) = 0$ $\begin{cases} 2\lambda = -\gamma \\ 3\lambda + 2\gamma = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2\lambda = -\gamma \\ 3\lambda - 4\lambda = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \gamma = 0 \\ \lambda = 0 \end{cases}$

② Verifico $\langle (2,3), (1,2) \rangle = \mathbb{R}^2$

$\lambda(2,3) + \gamma(1,2) = (x,y) \longrightarrow (2\lambda+\gamma, 3\lambda+2\gamma) = (x,y)$ $\begin{cases} 2\lambda + \gamma = x \\ 3\lambda + 2\gamma = y \end{cases}$ $\begin{cases} 2\lambda + \gamma = x \\ \lambda + \gamma = y - x \end{cases}$ $\begin{cases} \gamma = x - 2\lambda \\ \lambda = 2x - y \end{cases}$ esistono e vengon in funzione del pe

* Ogni spazio vettoriale ammette infinite basi.

* Per verificare la (eventuale) lineare indipendenza, calcoliamo il rango della matrice associata (che deve essere massimo) o il determinante (che deve essere diverso da zero).

Definizione

Il numero di elementi della base è detto dimensione dello spazio vettoriale. $\dim V = n$. In $\mathbb{R}^n$ la base canonica è quella formata dai vettori del tipo:

$$e_1(1,0,\dots,0) ; e_2(0,1,\dots,0) ; \dots ; e_n(0,0,\dots,1)$$

Teorema

Sia $V_{\mathbb{K}}^n$ uno spazio vettoriale. Allora <u>ogni</u> vettore ammette un'unica rappresentazione con i vettori della base.

Dimostrazione (per assurdo)

Consideriamo la base $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ e $\vec{v} \in V_{\mathbb{K}}^n$. Allora:

$$\vec{v} = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n$$
$$= (a_1 - b_1) v_1 + (a_2 - b_2) v_2 + \dots + (a_n - b_n) v_n$$

Ma i vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti (per definizione), allora $a_1 - b_1 = a_2 - b_2 = \dots = a_n - b_n = 0 \rightarrow a = b = 0$.
Dunque la rappresentazione è unica.

Teorema

Ogni spazio vettoriale ammette base.

Teorema del completamento di una base

Sia $V_{\mathbb{K}}$ uno spazio vettoriale di dimensione n e siano $v_1, v_2, \dots, v_p$ vettori linearmente indipendenti di V, con $p<n$. Allora esistono $n-p$ vettori $w_1, w_2, \dots, w_{n-p}$ tali che $\{v_1, v_2, \dots, v_p, w_1, w_2, \dots, w_{n-p}\}$ sia una base per V.

Dimostrazione

Deve esistere un vettore $w_1 \in V$ che non appartiene a $\text{Span}(v_1, v_2, \dots, v_p)$.
Ora se $p+1=n=\dim V$, allora la base cercata è $\{v_1, v_2, \dots, v_p, w_1\}$, altrimenti reiteriamo K volte finché $p+K=n$.

Es. Verifichiamo l'indipendenza lineare di $\vec{v}(1,1,0)$ e $\vec{w}(1,2,0)$ e completiamo l'insieme $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ a una base di V^3.

① Lineare indipendenza:

$$\lambda(1,1,0)+\gamma(1,2,0) \longrightarrow (\lambda+\gamma, \lambda+2\gamma, 0)=0 \qquad \begin{cases} \lambda=-\gamma \\ \lambda=-2\gamma \\ 0=0 \end{cases}$$

② Completiamo la base:

$$\lambda(1,1,0)+\gamma(1,2,0)+\beta(x,y,z) \longrightarrow (\lambda+\gamma+\beta x, \lambda+2\gamma+\beta y, \beta z)=0 \qquad \begin{cases} \lambda+\gamma+\beta x=0 \\ \lambda+2\gamma+\beta y=0 \\ \beta z=0 \end{cases}$$

Osservo che basta prendere una qualsiasi terna tale che $x=y$. Ad esempio $(5,5,$

Formula di Grassmann

Sia $V_{\mathbb{K}}^n$ uno spazio vettoriale e $U, W \subset V_{\mathbb{K}}^n$. Allora:

$$\dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W)$$

Dimostrazione

Sia $I=\{i_1, i_2, \dots, i_s\}$ una base di $U\cap W$, $B_1=\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ vettori di U, $B_2=\{w_1, w_2, \dots, w_t\}$ vettori di W.
Completiamo le basi:

$$B_U=B_1\cup I=\{i_1, i_2, \dots, i_s, u_1, u_2, \dots u_r\} \qquad B_W=B_2\cup I=\{i_1, i_2, \dots, i_s, w_1, w_2, \dots, w_t\}$$

Ricordiamo che il teorema afferma che: $\dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W)=(r+s)+(t+s)-(s)$

Dobbiamo dimostrare che $\dim(U+W)=r+t+s$, ovvero che $B_U+B_W=\{i_1, i_2, \dots, i_s, u_1, u_2, \dots, u_r, w_1, w_2, \dots, w_t\}$ sono vettori linearmente indipendenti. Scriviamo:

$$\underbrace{\alpha_1 i_1+\alpha_2 i_2+\dots+\alpha_s i_s}_{i}+\underbrace{\beta_1 u_1+\beta_2 u_2+\dots+\beta_r u_r}_{u}+\underbrace{\gamma_1 w_1+\gamma_2 w_2+\dots+\gamma_t w_t}_{w}=0$$

$$= 0$$

$w=-(u+i) \longrightarrow u\in U,\ i\in U\cap W,\ w\in W$. Quindi $w\in U$, e di conseguenza $w\in U\cap W$.

Posso scrivere w come combinazione lineare di i: $w=\alpha_1 i_1+\alpha_2 i_2+\dots+\alpha_s i_s$

Ma $w = \gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2 + \dots + \gamma_t w_t$. Quindi: $\alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_s i_s = \gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2 + \dots + \gamma_t w_t$.
Ma ciò é possibile solo se tutte le coordinate valgono zero.

A questo punto $v = 0$. Anche in questo caso, per la lineare indipendenza di v, tutte le coordinate valgono zero.
Dunque $B_v + B_w$ sono linearmente indipendenti.

In particolare se $\dim(V \cap W) = 0$, lo spazio $V + W$ si dice somma diretta di V_1, V_2 e si indica:

$$\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$$

MATRICE DEL CAMBIAMENTO DI BASE

Vogliamo cioé rappresentare uno spazio vettoriale tramite un'altra base. Consideriamo un vettore $w_B \in V$ espresso tramite una base B e lo stesso vettore $w_{B'} \in V$ espresso peró tramite un'altra base B'. Vogliamo trovare una matrice tale che:

$$w_{B'} = M_{B \to B'} \cdot w_B$$

Es. Scrivere la matrice del cambiamento di base che permette di passare dalla base $B = \{(1,2), (3,4)\}$ alla base canonica. $(V = \mathbb{R}^2)$.

$e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$

- $(1,2) = \alpha(1,0) + \beta(0,1) \longrightarrow \alpha = 1,\ \beta = 2$ $\quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- $(3,4) = \alpha(1,0) + \beta(0,1) \longrightarrow \alpha = 3,\ \beta = 4$ $\quad \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Quindi la matrice del cambiamento di base é $M_{B \to B'} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

*Nota: se una delle due basi é la base canonica i calcoli si semplificano:

① $M_{B \to \mathcal{E}}$. Cioé la nuova base é la base canonica. Semplicemente scriviamo la nuova matrice che ha per colonne le coordinate dei vettori di B. (come nell'esempio precedente)

② $M_{\mathcal{E} \to B}$. Cioé la vecchia base é la base canonica. Allora facciamo come prima e calcoliamo la matrice inversa.