

Lavoreremo nello spazio tridimensionale della geometria euclidea, dove utilizzeremo un sistema di coordinate cartesiane ortogonali.

Fissiamo dunque un punto O nello spazio, e considereremo l'insieme di tutti i vettori dello spazio applicati in tale insieme e' lo spazio vettoriale V_0^3 .

Vogliamo adesso identificare V_0^3 , tramite un isomorfismo, con lo spazio vettoriale \mathbb{R}^3 .
Introduciamo un sistema $Oxyz$. Tramite una base ortogonale $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ogni vettore $\vec{OP} \in V_0^3$ si scrive in modo unico nella forma:

$$\vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \text{dove } x, y, z \in \mathbb{R} \text{ e prendono il nome di coordinate del punto}$$

Definiamo dunque l'isomorfismo $j: V_0^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ che ci permette di "passare" dai vettori ai punti individuati dalle triple di coordinate.

PIANI NELLO SPAZIO

Possiamo rappresentare un piano nello spazio tramite equazioni parametriche o equazioni cartesiane:

① **Equazioni parametriche** \rightarrow tre equazioni di un sistema lineare che descrivono le coordinate dei punti del piano. Vengono scritte in funzione di un suo punto e delle componenti di due vettori paralleli ad esso.

Cio' equivale a dire che il piano π passante per P_0 e parallelo ai vettori v, w e' l'insieme dei punti P tali che il vettore \vec{PP}_0 e' linearmente dipendente da v e da w , cioè che \vec{PP}_0, v, w appartengono allo stesso piano.

$$\vec{PP}_0 = sv + tw \quad \text{con } s, t \in \mathbb{R}$$

I vettori v, w vengono detti **vettori di giacitura** di π .

Consideriamo un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \pi$, $P = (x, y, z)$ un generico punto del piano. Siano inoltre $v = l_1\vec{i} + m_1\vec{j} + n_1\vec{k}$ e $w = l_2\vec{i} + m_2\vec{j} + n_2\vec{k}$ due vettori giacenti di π .

$$\vec{PP}_0 = (x-x_0)\vec{i} + (y-y_0)\vec{j} + (z-z_0)\vec{k}$$

$$\vec{PP}_0 = sv + tw = s(l_1\vec{i} + m_1\vec{j} + n_1\vec{k}) + t(l_2\vec{i} + m_2\vec{j} + n_2\vec{k}) = (sl_1 + tl_2)\vec{i} + (sm_1 + tm_2)\vec{j} + (sn_1 + tn_2)\vec{k}$$

$$(x-x_0)\vec{i} + (y-y_0)\vec{j} + (z-z_0)\vec{k} = (sl_1 + tl_2)\vec{i} + (sm_1 + tm_2)\vec{j} + (sn_1 + tn_2)\vec{k}$$

$$\begin{cases} x = sl_1 + tl_2 + x_0 \\ y = sm_1 + tm_2 + y_0 \\ z = sn_1 + tn_2 + z_0 \end{cases}$$

*Note: i due vettori di giacitura (v, w) DEVONO essere linearmente indipendenti. Altrimenti NON identificano un piano.

* Se sono noti tre punti e dobbiamo determinare il piano passante per essi, consideriamo i vettori $\vec{P_0P_1}$ e $\vec{P_0P_2}$, (P_0, P_1, P_2 sono tre punti noti)

② **EQUAZIONE CARTESIANA** \rightarrow un'equazione lineare in tre incognite, i cui coefficienti NON sono contemporaneamente nulli.

Pel tipo $ax + by + cz + d = 0$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$, dove $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e' il

punto contenuto nel piano.

* In generale dato un vettore $v = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ e un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, l'equazione cartesiana del piano passante per P_0 e ortogonale a v è

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

* L'equazione generale di un piano passante per tre punti distinti P_1, P_2, P_3 è:

$$\det \begin{pmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{pmatrix} = 0$$

* Per determinare l'equazione generale di un piano passante per un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e parallelo a due vettori $v = l_1\vec{i} + m_1\vec{j} + n_1\vec{k}$, $w = l_2\vec{i} + m_2\vec{j} + n_2\vec{k}$, troviamo il vettore ortogonale a v, w tramite il prodotto vettoriale, e poi operiamo normalmente.

Es. $P_0 = (-2, 3, 1)$, $v = 3\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$, $w = \vec{j} + \vec{k}$

① Calcolo l'ortogonale: $\det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (3+2)\vec{i} + (0-3)\vec{j} + (3-0)\vec{k} = 5\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k} = 0$

② Utilizziamo la formula: $5(x+2) - 3(y-3) + 3(z-1) = 0$
 $5x + 10 - 3y + 9 + 3z - 3 = 0$
 $5x - 3y + 3z + 16 = 0$

Casi particolari:

① Se $d=0$, allora il piano passa per l'origine.

② Se uno dei coefficienti delle incognite è nullo, il piano è parallelo all'asse avente il nome dell'incognita che manca. Se è nullo anche il termine noto d , allora il piano passa per quell'asse.

Es. $\pi: ax + by + d = 0 \rightarrow$ piano parallelo all'asse z . $\pi': ax + cz = 0 \rightarrow$ piano passante per l'asse y

③ Se i due coefficienti delle incognite sono nulli, il piano è parallelo al piano corrispondente alle incognite mancanti. Inoltre se d è nullo il piano è proprio quello individuato dalle incognite.

Es. $\pi: ax + d = 0 \rightarrow$ piano parallelo al piano $[yz]$. $\pi': by = 0 \rightarrow$ piano $[xz]$

PASSAGGIO TRA I DUE TIPI DI EQUAZIONE

① Dall'equazioni parametriche all'equazioni cartesiane. \rightarrow Si tratta quasi di "risolvere" il sistema lineare cercando di esplicitare tutte le coordinate senza i vettori direttori.

Es. Riprendendo l'esempio precedente (eq. cartesiane dati due vettori), calcoliamo prima la forma parametrica, poi ricaviamo quella cartesiana:

$$\begin{cases} x = -2 + 3s \\ y = 3 + 3s + t \\ z = 1 - 2s + t \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 3s = x + 2 \\ y = 3 + x + 2 + t + \frac{2(x+2)}{3} - 1 \\ t = z + 2s - 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y &= x + z + 4 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \\ y &= \frac{5}{3}x + z + \frac{16}{3} \\ 3y &= 5x + 3z + 16 \\ 5x - 3y + 3z + 16 &= 0 \end{aligned}$$

② Dall'equazione cartesiana all'equazione parametriche. \longrightarrow Procediamo "al contrario": assegnamo a due incognite rispettivamente s e t , e riscriviamo il tutto rispetto alla terza incognita.

Es. $3x + 5y - z + 2 = 0$

$$x = s, y = t \longrightarrow \begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = 3s + 5t + 2 \end{cases}$$

* Note: se non compaiono tutte e tre le incognite, assegnamo sempre s e t ma: se compaiono solo un'incognita allora le assegnamo alle altre; se compaiono due incognite assegnamo s all'incognita mancante e t a una delle due incognite.

Es. $6x + 5y - z = 0$

$$x = s, z = t \longrightarrow \begin{cases} x = s \\ z = t \\ y = \frac{3-6s}{5} \end{cases}$$

$$z - 3 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = \frac{3}{2} \end{cases}$$

RELAZIONI TRA PIANI

① **Piani PARALLELI** \longrightarrow Dati due piani π, π' , essi si dicono **paralleli** se $\pi = \pi'$ o $\pi \cap \pi' = \emptyset$. In particolare parleremo rispettivamente di piani coincidenti o disgiunti.

Per studiare il parallelismo verificiamo che il rango della matrice incompleta associata ai due piani sia 1. Se è 1 il rango della matrice completa, allora i due piani sono coincidenti.

$$\begin{aligned} \pi: & ax + by + cz + d = 0 \\ \pi': & a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{aligned}$$

$$r \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 1 \quad \text{Piani disgiunti}$$

$$r \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix} = 1 \quad \text{Piani coincidenti}$$

② **Piani INCIDENTI** \longrightarrow Due piani che non sono paralleli sono incidenti.

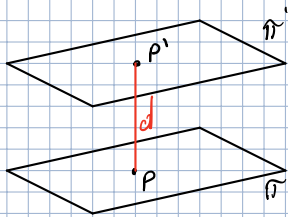
Verifichiamo l'incidenza studiando il rango della matrice incompleta associata ai due piani. Se il rango è massimo (quindi pari a 2), allora i due piani sono **incidenti**.

$$\begin{aligned} \pi: & ax + by + cz + d = 0 \\ \pi': & a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{aligned}$$

$$r \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2$$

Se inoltre il prodotto scalare dei coefficienti dei piani è uguale a zero ($aa'+bb'+cc'=0$) allora i due piani sono **perpendicolari** cioè se comunque fissiamo un punto P sulla retta di intersezione dei piani, esiste un punto T appartenente a $\pi-\pi'$, tale che $PT \perp \pi'$.

③ **DISTANZA TRA DUE PIANI** \longrightarrow Dati due piani paralleli definiamo distanza tra i due piani la distanza tra due punti $P \in \pi, P' \in \pi'$ generati da una retta perpendicolare ai piani.



$$d(\pi, \pi') = \frac{|d-d'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

④ **ANGOLO TRA DUE PIANI** \longrightarrow Definiamo angolo tra due piani l'angolo che formano i vettori direttori di due piani espressi in forma cartesiana.

$$\begin{aligned} \pi: ax+by+cz+d=0 & \quad n_{\pi} = (a, b, c) \\ \pi': a'x+b'y+c'z+d'=0 & \quad n_{\pi'} = (a', b', c') \end{aligned} \quad \cos(\widehat{\pi\pi'}) = \frac{|n_{\pi} \cdot n_{\pi'}|}{\|n_{\pi}\| \|n_{\pi'}\|}$$

*Note: se $\cos(\widehat{\pi\pi'})=0$ allora i due piani sono perpendicolari. Se $\cos(\widehat{\pi\pi'})=1$ allora i due piani sono paralleli.

⑤ **FASCI DI PIANI** \longrightarrow Un insieme infinito di piani che possono essere paralleli o avere una retta in comune.

① **FASCI PROPRI** \longrightarrow retta in comune. (sostegno del fascio)

② **FASCI IMPROPRI** \longrightarrow tutti paralleli.

* Per determinare un fascio improprio a partire da un piano π , sostituiamo il coefficiente K al termine noto J.

* Per determinare un fascio proprio a partire da due piani NON paralleli, determiniamo prima la retta sostegno, e poi la scriviamo come combinazione lineare per due scalari λ, μ .

Es. $\pi: x-y+2z-5=0$

$\pi': x-3y+z=0$

Per determinare un fascio improprio per il primo piano scriviamo $\pi: x-y+2z+K=0$

Per determinare un fascio proprio per i due piani:

$$\pi: \begin{cases} x-y+2z-5=0 \\ x-3y+z=0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lambda(x-y+2z-5) + \mu(x-3y+z) &= 0 \\ (\lambda+\mu)x - (\lambda+3\mu)y + (2\lambda+\mu)z - 5\lambda &= 0 \end{aligned}$$

RETTA NELLO SPAZIO

Come per il piano possiamo rappresentare la retta nello spazio sia tramite equazioni parametriche che tramite equazioni cartesiane.

① **EQUAZIONI PARAMETRICHE** \longrightarrow La retta r passante per P_0 e parallela a $v \neq 0$ è il luogo geometrico dei punti P dello spazio che soddisfano la condizione $\vec{P_0P} \parallel v$. O in modo equivalente $\vec{P_0P} = t v$, con $t \in \mathbb{R}$.

Consideriamo un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in r$, un vettore $v = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$ parallelo a r . Detto $P = (x, y, z)$ un punto qualsiasi dello spazio, possiamo scrivere:

$$\vec{P_0P} = P - P_0 = (x-x_0)\vec{i} + (y-y_0)\vec{j} + (z-z_0)\vec{k}$$

$$\vec{P_0P} = t v = t(l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k})$$

$$(x-x_0)\vec{i} + (y-y_0)\vec{j} + (z-z_0)\vec{k} = t(l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k})$$

$$\begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \\ z = z_0 + tn \end{cases}$$

② **EQUAZIONI CARTESIANE** \rightarrow Una retta può sempre essere individuata dall'intersezione di due piani.

$$r: ax + by + cz + d = 0$$

$$r: ax + by + cz + d = 0$$

$$r = \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$$

* Dati due punti $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ per determinare la retta passante per essi:

$$\begin{cases} x = (x_1 - x_0)t + x_0 \\ y = (y_1 - y_0)t + y_0 \\ z = (z_1 - z_0)t + z_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} \\ \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0} \end{cases}$$

Qualora $x_1 = x_0$ o $y_1 = y_0$ o $z_1 = z_0$, si scrive direttamente $x = x_0$ o $y = y_0$ o $z = z_0$.

In forma parametrica

In forma cartesiana

* Dato un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e un vettore $v = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$:

$$\begin{cases} x = lt + x_0 \\ y = mt + y_0 \\ z = nt + z_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} \\ \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} \end{cases}$$

In forma parametrica

Es. $P_0 = (3, 1, 1)$ $v = \vec{i} + \vec{j}$

$P_0 = (2, 2, 4)$, $P_1 = (2, 1, 4)$

$$\begin{cases} z = z_0 \\ \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x-2}{2-2} = \frac{y-2}{1-2} \\ \frac{y-2}{1-2} = \frac{z-4}{4-4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ z = 4 \end{cases}$$

Oppure calcolo il vettore parallelo e applico l'altra formula.

$$v = \vec{P_0P_1} = (0, -1, 0)$$

PASSAGGIO TRA I DUE TIPI DI EQUAZIONI

① Dalla forma parametrica alla forma cartesiana \rightarrow Come per i piani dobbiamo "risolvere" il sistema lineare

Es.
$$\begin{cases} x=3 \\ y=2+3t \\ z=3-t \end{cases} \quad \begin{cases} x=3 \\ y=2+q-3z \\ t=3-z \end{cases} \quad \begin{cases} x=3 \\ y+3z-11=0 \end{cases}$$

② Dall'equazione cartesiana all'equazione parametrica \rightarrow come per i piani assegniamo ad una variabile incognita il parametro t e sostituiamo nelle altre equazioni.

Es.
$$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ -x+y-2z+1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=t \\ y=-t-z-1 \\ -t-t-z-2z+1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=t \\ y=-t-z-1 \\ z=-\frac{2}{3}t \end{cases} \quad \begin{cases} x=t \\ y=-\frac{1}{3}t-1 \\ z=-\frac{2}{3}t \end{cases}$$

POSIZIONI RECIPROCHE DI DUE RETTE

-) **Complanari**: se contenute nello stesso piano. \rightarrow In particolare perpendicolari, incidenti o parallele.
-) **Sghembe**: se non contenute nello stesso piano.

③ DISTANZA PUNTO-PIANO

Definita come la distanza tra un punto P e la sua proiezione P' su un piano π .

$$d(P, \pi) = \frac{|ax_p + by_p + cz_p + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

④ ANGOLO TRA DUE RETTE

Date due rette r, s ed i vettori ad esse associate v_r, v_s definiamo \hat{r}_s l'angolo che esse formano:

$$\cos(\hat{r}_s) = \frac{v_r \cdot v_s}{\|v_r\| \|v_s\|}$$

Se $\cos(\hat{r}_s) = 0$, allora le due rette sono ortogonali ($|r|s + m_r m_s + n_r n_s = 0$). Se $\cos(\hat{r}_s) = \pm 1$, allora le due rette sono parallele.

Es.
$$r: \begin{cases} x=t \\ y=-1+t \\ z=2t \end{cases} \quad s: \begin{cases} 2x+y-4=0 \\ x+y-z-2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=t \\ 2t+y-4=0 \\ t=z+2-y \end{cases} \quad \begin{cases} x=t \\ 2z+t-2y-4=0 \\ t=z+2-y \end{cases}$$

① Ricaviamo i vettori direttori.

$$v_r = (1, 1, 2) \quad v_s = (1, -2, -1)$$

$$\begin{cases} x=t \\ y=2z \\ z=t+y-2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=t \\ y=2t+2y-4 \\ z=t+y-2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=t \\ y=4-2t \\ z=-t+2 \end{cases}$$

$$\cos(\hat{r}_S) = \frac{(1,1,2) \cdot (1,-2,-1)}{\|(1,1,2)\| \|(1,-2,-1)\|} = \frac{-3}{\sqrt{6} \sqrt{6}} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\hat{r}_S = \frac{2}{3}\pi$$

5) PIANO ORTOGONALE A UNA RETTA PASSANTE PER UN PUNTO

Dopo aver ricavato i vettori direttori della retta, scriviamo l'equazione generale del piano con i coefficienti direttori della retta. Impostiamo quindi il passaggio per il punto dato.

Es. $P=(5,-1,3)$, $r: \begin{cases} x=-t \\ y=2+3t \\ z=4 \end{cases}$

$$v_r = (-1, 3, 0) \quad \text{a: } \begin{cases} x+my+nz+d=0 \\ -x+3y+d=0 \\ -x+3y+8=0 \end{cases} \longrightarrow d = x_p - 3y_p = 5 - 3(-1) = 8$$

6) DISTANZA PUNTO-RETTA

Per trovare la distanza tra un punto P e una retta r , determiniamo prima il piano passante per P e ortogonale a r (per trovare l'ortogonale di P), poi mettiamo a sistema la retta r e il piano per trovare P_0 . Procediamo dunque con la classica formula.

Es. $P(1,1,1)$ $r: \begin{cases} x=2-t \\ y=-3t \\ z=4 \end{cases}$

$$\textcircled{1} v_r = (-1, -3, 0) \quad \text{a: } \begin{cases} -x-3y+d=0 \\ -x-3y+4=0 \end{cases} \longrightarrow d = x_p + 3y_p = 4$$

$$\textcircled{2} \text{ Sostituiamo: } \begin{cases} -(2-t) - 3(-3t) + 4 = 0 \\ -2+t + 9t + 4 = 0 \\ 10t = -2 \\ t = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \text{ Risolviamo: } \begin{cases} x = 2 - (-\frac{1}{5}) \\ y = -3(-\frac{1}{5}) \\ z = 4 \end{cases} \quad H = \left(\frac{11}{5}, \frac{3}{5}, 4\right)$$

$$\textcircled{4} \text{ Calcoliamo la distanza: } d(P,H) = \sqrt{\left(\frac{11}{5}-1\right)^2 + \left(\frac{3}{5}-1\right)^2 + (4-1)^2} \\ = \sqrt{\left(\frac{6}{5}\right)^2 + \left(-\frac{2}{5}\right)^2 + 3^2} \\ = \sqrt{\frac{36}{25} + \frac{4}{25} + 9} = \sqrt{\frac{840}{25} + 9} = \sqrt{\frac{53}{5}}$$

* Nota: se il punto $P \in r$, allora la distanza è zero

PRODOTTI VETTORIALE (Nota: il prodotto vettoriale è definito soltanto in V_3)

DEFINIZIONE

Dati due vettori $\vec{v}, \vec{w} \in V_3$, definiamo **prodotto vettoriale** una operazione $\wedge: V^3 \times V^3 \rightarrow V^3$, così definita:

① $|\vec{v} \wedge \vec{w}| = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \sin \theta$.

② La direzione è data dalla retta perpendicolare a \vec{v} e \vec{w} .

③ Il verso è dato dalla "regola della mano destra". (indica e medio i due vettori, pollice la risultante).

Proprietà del prodotto vettoriale:

① $\vec{v} \wedge \vec{w} = -\vec{w} \wedge \vec{v}$ (anticommutatività)

② $\vec{v} \wedge (\vec{w} + \vec{x}) = \vec{v} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{x}$ (distributiva rispetto alle somme di vettori)

③ $(\lambda \vec{v}) \wedge \vec{w} = \lambda(\vec{v} \wedge \vec{w}) = \vec{v} \wedge (\lambda \vec{w})$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ (bilinearietà rispetto al prodotto per uno scalare)

Se $\vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{0}$, allora i due vettori sono PARALLELI

In \mathbb{R}^3 : $\vec{v} = (a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k})$, $\vec{w} = (a'\vec{i} + b'\vec{j} + c'\vec{k})$

$$\begin{aligned} \vec{v} \wedge \vec{w} &= (a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}) \wedge (a'\vec{i} + b'\vec{j} + c'\vec{k}) = ab'\vec{k} - ac'\vec{j} - ba'\vec{k} + bc'\vec{i} + ca'\vec{j} - cb'\vec{i} \\ &= (bc' - cb')\vec{i} + (ca' - ac')\vec{j} + (ab' - ba')\vec{k} \end{aligned}$$

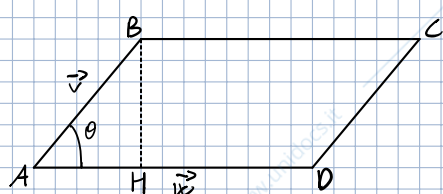
Perché $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$, dunque

$$\begin{aligned} \vec{i} \wedge \vec{k} &= -\vec{j} \\ \vec{j} \wedge \vec{k} &= \vec{i} \end{aligned}$$

Es. $(2, 1, 0) \wedge (1, -1, 1) = [(1 \cdot 1) - (0 \cdot 1)], (0 \cdot 1) - (2 \cdot 1), (2 \cdot (-1)) - (1 \cdot 1)]$
 $= [1, -2, -3]$

Per ricordare la formula utilizziamo una finta matrice: $\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$ e ne calcoliamo il "determinante".

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA



Consideriamo due vettori \vec{v}, \vec{w} aventi lo stesso punto di applicazione. L'area del parallelogramma è data da $\overline{AD} \cdot \overline{BH}$.
Ma \overline{AD} corrisponde a $|\vec{w}|$, mentre \overline{BH} corrisponde a $|\vec{v}| \sin \theta$.
Quindi $A_{\text{par}} = |\vec{w}| |\vec{v}| \sin \theta$

Applicazioni:

1) Se abbiamo una retta in forma cartesiana e vogliamo un suo vettore direzionale: $(a, b, c) \wedge (a', b', c')$

↑
coordinata
↑
dei due piani

2) Se abbiamo due rette non parallele e vogliamo un piano parallelo ad entrambe: $(a, b, c) = (l, m, n) \wedge (l', m', n')$

↑
vettori
↑
direzionali