

DISPENSA 5 – VETTORI GEOMETRICI

Vettori geometrici applicati

Dicesi vettore applicato in un punto A di S_N ogni segmento orientato \overrightarrow{AB} avente come primo estremo A e come secondo estremo B.

A= punto coda/ punto di applicazione o origine del vettore.

B= punta o estremo libero del vettore.

V_N = insieme di tutti i vettori applicati nello spazio S_N .

Definizioni

1. Direzione del vettore=direzione della retta passante per A e B, contenente il vettore.
2. Verso del vettore= direzione della semiretta che ha origine in A e contiene l'estremo libero B.
3. Modulo del vettore=misura del segmento non orientato \overline{AB} .

Il vettore nullo ha verso e direzione indeterminati.

Proprietà del modulo

1. $\forall \vec{v} \in V_n : |\vec{v}| \geq 0$
2. $|\vec{v}| = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$

Versore=vettore con modulo =1. Ogni vettore ha due versori associati, uno concorde e l'altro discorde.

Parallelismo tra vettori

Le due rette che contengono i due vettori son parallele. Il vettore nullo è parallelo ad ogni vettore di V_N .

Relazione di equipollenza

Due vettori sono equipollenti se hanno stessa direzione, stesso verso e stesso modulo.

È una relazione di equivalenza, quindi riflessiva, simmetrica e transitiva. Determina un nuovo insieme chiamato *insieme quoziente*, i cui elementi sono sottoinsiemi di V_N , detti classi di equipollenza.

Proprietà delle classi di equipollenza

1. $\forall \vec{a} \in V_n : [\vec{a}] \neq \emptyset$;
2. $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V_n \exists' \vec{a} \not\parallel \vec{b} : [\vec{a}] \cap [\vec{b}] = \emptyset$; (le classi sono a due a due disgiunte)
3. $\cup([\vec{a}_i]) = V_n$. (le classi sono un ricoprimento di V_N)
4. $\forall \vec{v} \in V_n, \exists! [a] \in V_n/\mathcal{R} \exists' \vec{v} \in [a]$. (unicità della classe di appartenenza)

L'insieme quoziente è una partizione di V_N .

Vettore libero/ordinario= insieme dei vettori appartenenti alla stessa classe di equipollenza. Possono essere rappresentati da un vettore *rappresentante* del vettore libero.

V_N^0 = vettori liberi applicati nell'origine.

Sistemi di riferimento nel piano e nello spazio

Sistema di riferimento cartesiano ortogonale di S_2 = ogni terna (O, \vec{i}, \vec{j}) in cui:

1. O è un punto qualsiasi di S_2 , origine del sistema di riferimento.
2. \vec{i} è un versore applicato in O .
3. \vec{j} è un versore applicato in O e ortogonale a \vec{i} .

Il riferimento è orientato positivamente se \vec{i} si sovrappone a \vec{j} descrivendo un angolo di $\pi/2$ attorno ad O in senso antiorario, negativamente se orario.

È indicato con $RC(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Piano cartesiano= ogni piano geometrico S_2 su cui è fissato un riferimento $RC(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Tra i punti P del piano cartesiano e le coppie ordinate (x,y) di numeri reali esiste una corrispondenza biunivoca. Si assume che:

1. X è la misura del segmento orientato $\overline{op_x}$, dove p_x è la proiezione ortogonale di P su x , presa positivamente se il vettore è concorde con l'asse x .
2. Y è la misura del segmento orientato $\overline{op_y}$, dove p_y è la proiezione ortogonale di P su y , presa positivamente se il vettore è concorde con l'asse y .

Sistema di riferimento cartesiano ortogonale di S_3 = ogni quaterna $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ in cui:

1. O è un punto qualsiasi di S_3 (origine del riferimento).
2. \vec{i} e \vec{j} sono due versori ortogonali tra loro e applicati in O .
3. \vec{k} è un terzo versore, applicato in O , ortogonale al piano contenente \vec{i} e \vec{j} .

Il sistema è orientato positivamente se un osservatore, posto con i piedi in O e la testa nel verso di \vec{k} vede il versore \vec{i} sovrapporsi a \vec{j} descrivendo un angolo di $\pi/2$ in senso antiorario ($(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ è una terna levogira).

Spazio cartesiano = S_3 munito di un riferimento cartesiano $RC(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ o $RC(O, x, y, z)$.

Vale anche nello spazio la corrispondenza biunivoca tra punti di S_3 e terne ordinate (x, y, z) .

Operazioni con i vettori liberi (o ordinari)

Ogni vettore è univocamente determinato dal suo estremo libero P , e P è univocamente determinato dalle sue coordinate cartesiane, quindi fra l'insieme dei vettori liberi e le coppie ordinate (x, y) esiste una corrispondenza biunivoca. Per questo ogni vettore geometrico può essere

identificato con il vettore algebrico che ha per componenti le coordinate dell'estremo libero, dette componenti cartesiane del vettore geometrico.

$$\vec{v} = \overrightarrow{OP} = (x_P, y_P)$$

Tutto ciò vale anche per S_3 .

Somma di vettori = $\vec{u} + \vec{v} = (u_x + v_x, u_y + v_y)$ (vettori applicati all'origine).

Si può usare anche il metodo del parallelogramma.

Prodotto scalare = $k \cdot \vec{u} = (k \cdot u_x, k \cdot u_y)$

Il vettore moltiplicato per uno scalare ha:

1. la stessa direzione di \vec{u} ;
2. lo stesso verso di \vec{u} se k è positivo, il verso opposto a quello di \vec{u} se k è negativo;
3. modulo proporzionale a quello di \vec{u} secondo il coefficiente $|k|$, cioè $|k \cdot \vec{u}| = |k| \cdot |\vec{u}|$.

Tutto ciò vale anche per S_3 .

L'insieme V_n^0 dei vettori liberi di S_N è uno spazio vettoriale su R , verifica le 8 proprietà.

Inoltre \vec{i} e \vec{j} sono una base ortonormale di V_2^0 e \vec{i}, \vec{j} e \vec{k} di V_3^0 .

Proprietà

$$\forall \vec{v} \in V_2^0, \exists! (v_x, v_y) \in \mathbb{R}^2 \ni \begin{cases} \vec{v} = v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} \\ |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \end{cases} \quad (\text{espressione cartesiana del vettore})$$

Analogo in S_3 .

Condizione di parallelismo

$$(\vec{v} \parallel \vec{w}) \Leftrightarrow (\exists \alpha \in R \ni \vec{w} = \alpha \cdot \vec{v})$$

$$\text{se } (\vec{v} \parallel \vec{w}) \Leftrightarrow \left(\text{rang} \begin{pmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{pmatrix} < 2 \right) \Leftrightarrow \left(\frac{w_x}{v_x} = \frac{w_y}{v_y} \right) \text{ e in } S_3:$$

$$(\vec{v} \parallel \vec{w}) \Leftrightarrow \left(\text{rang} \begin{pmatrix} v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix} < 2 \right) \Leftrightarrow \left(\frac{w_x}{v_x} = \frac{w_y}{v_y} = \frac{w_z}{v_z} \right)$$

Condizione di complanarità

$$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ sono complanari} \Leftrightarrow (\exists \alpha, \beta \in R \ni \vec{u} = \alpha \vec{v} + \beta \vec{w})$$

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ sono complanari}) \Leftrightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{pmatrix} < 3 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{vmatrix} = 0$$

Questioni metriche dei vettori ordinari

Prodotto scalare di due vettori

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_x w_x + v_y w_y \text{ e analogo in } S_3.$$

Proprietà del prodotto scalare

1. $\vec{v} \times \vec{v} = |\vec{v}|^2 \Leftrightarrow |\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \times \vec{v}}$;
2. $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 1$;
3. $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{j} \times \vec{k} = \vec{k} \times \vec{i} = 0$.

Il prodotto scalare tra due vettori ha le proprietà del prodotto scalare euclideo, quindi rende V_N^0 uno spazio vettoriale euclideo.

Ogni vettore si può esprimere come:

$$\forall \vec{v} = (v_x, v_y, v_z) \in V_3^0: \begin{cases} v_x = \vec{v} \times \vec{i} \\ v_y = \vec{v} \times \vec{j} \\ v_z = \vec{v} \times \vec{k} \end{cases} \text{ e } \vec{v} = (\vec{v} \times \vec{i}) \cdot \vec{i} + (\vec{v} \times \vec{j}) \cdot \vec{j} + (\vec{v} \times \vec{k}) \cdot \vec{k}$$

Angolo di due vettori

Angolo formato dalle semirette di origine O che contengono i due vettori.

Si dimostra che:

1. $\cos(\vartheta) = \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$
2. $\vec{u} \times \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vartheta)$.

Componente ortogonale di \vec{u} su $\vec{v} = u_\nu = \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{v}|}$ (è uno scalare).

Proiezione di \vec{u} su $\vec{v} = pr(\vec{u}_\vec{v}) = \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \cdot \vec{v}$ (è un vettore).

Componente ortogonale di \vec{u} al vettore $\vec{v} = \vec{u}_{\perp \vec{v}} = \vec{u} - \vec{u}_\vec{v}$.

Condizione di perpendicolarità

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}_n^0: \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \times \vec{v} = 0$$

Prodotto vettoriale tra vettori in S_3

Si indica con $\vec{v} \wedge \vec{w}$ ed è così definito:

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} \quad (\text{leggasi } \vec{v} \text{ vettor } \vec{w}).$$

Le componenti di $\vec{v} \wedge \vec{w}$ sono i minori estratti dalla matrice presi con segno alternato.

Prodotto vettoriale dei versori

- $\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = 0$
- $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}; \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}; \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$
- $\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}; \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}; \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$

$\vec{u} = \vec{v} \wedge \vec{w}$ è un vettore che ha:

- direzione perpendicolare al piano che contiene \vec{v} e \vec{w} ;
- modulo: $|\vec{u}| = |\vec{v} \wedge \vec{w}| = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \sin(\vartheta)$, dove ϑ è l'angolo formato da \vec{v} e \vec{w} ;
- verso tale che la terna $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u} = \vec{v} \wedge \vec{w})$ sia levogira.

Significato geometrico del modulo del prodotto vettoriale

È l'area del parallelogramma costruito su \vec{v} e \vec{w} .

Proprietà

È una legge di composizione interna sullo spazio vettoriale $V_n^0(\mathbb{R})$: $\wedge : V_n^0 \times V_n^0 \rightarrow V_n^0$

- $\vec{v} \wedge \vec{v} = 0$
- $\vec{v} \wedge \vec{w} = -\vec{w} \wedge \vec{v}$ (prop. anticommutativa)
- $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$ (prop. distributiva a dx del prod. Vettoriale rispetto a +)
- $\vec{w} \wedge (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \wedge \vec{u} + \vec{w} \wedge \vec{v}$ (prop. distributiva a sx del prod. vettoriale rispetto a +)
- $\alpha \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\alpha \cdot \vec{v}) \wedge \vec{w}$ (prop. associativa del prod. di uno scalare rispetto al p. vett.)

Si dimostrano svolgendo i calcoli con la matrice.

Prodotto vettoriale misto in S_3

$\vec{u} \times \vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{u} \times (\vec{v} \wedge \vec{w})$ (è un numero scalare)

Proprietà

- Il prodotto vettoriale misto è uno scalare il cui valore assoluto non dipende dall'ordine con cui sono scritti i vettori, cioè:

$$|\vec{u} \times \vec{v} \wedge \vec{w}| = |\vec{u} \times \vec{w} \wedge \vec{v}| = |\vec{v} \times \vec{u} \wedge \vec{w}| = |\vec{v} \times \vec{w} \wedge \vec{u}| = |\vec{w} \times \vec{v} \wedge \vec{u}| = |\vec{w} \times \vec{u} \wedge \vec{v}|$$

- Il segno del prodotto vettoriale misto dipende dall'ordine dei vettori.

$$\vec{u} \times \vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{v} \times \vec{w} \wedge \vec{u} = \vec{w} \times \vec{u} \wedge \vec{v} \quad (\text{permutazione di classe pari})$$

$$\vec{u} \times \vec{v} \wedge \vec{w} = -\vec{v} \times \vec{u} \wedge \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \times \vec{w} \wedge \vec{v} \quad (\text{permutazione di classe dispari})$$

$$3. \vec{u} \times \vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Proposizione

1. $((\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}))$ sono complanari $\Leftrightarrow (\vec{u} \times \vec{v} \wedge \vec{w} = 0)$;
2. $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3^0$ non complanari, si dimostra che $|\vec{u} \times \vec{v} \wedge \vec{w}|$ è uguale al volume del parallelepipedo costruito sui vettori $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Coseni direttori di un vettore

Sono i coseni degli angoli che il vettore forma con gli assi x, y e z.

Proprietà

1.
$$\begin{cases} \cos(\vartheta_x) = \text{ver}(\vec{v}) \times \vec{i}, & (= \text{componente del versore di } \vec{v} \text{ su } x) \\ \cos(\vartheta_y) = \text{ver}(\vec{v}) \times \vec{j}, & (= \text{componente del versore di } \vec{v} \text{ su } y) \\ \cos(\vartheta_z) = \text{ver}(\vec{v}) \times \vec{k}, & (= \text{componente del versore di } \vec{v} \text{ su } z) \end{cases}$$
2.
$$\begin{cases} v_x = |\vec{v}| \cdot \cos(\vartheta_x) \\ v_y = |\vec{v}| \cdot \cos(\vartheta_y) \\ v_z = |\vec{v}| \cdot \cos(\vartheta_z) \end{cases} \Leftrightarrow \vec{v} = |\vec{v}| \cdot \cos(\vartheta_x) \cdot \vec{i} + |\vec{v}| \cdot \cos(\vartheta_y) \cdot \vec{j} + |\vec{v}| \cdot \cos(\vartheta_z) \cdot \vec{k};$$
3. $\cos^2(\vartheta_x) + \cos^2(\vartheta_y) + \cos^2(\vartheta_z) = 1.$

Per dimostrale basta usare la formula dell'angolo tra vettori.

