

DISPENSA 6 – GEOMETRIA ANALITICA / LA RETTA

Distanza tra due punti = modulo del vettore $\overline{P_1P_2}$.

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Punto medio di un segmento = punto M appartenente al segmento tale che $\overline{P_1M} = \overline{MP_2}$.

(la formula del baricentro si dimostra con il fatto che il baricentro divide la mediana in due pezzi l'uno il doppio dell'altro).

Retta (equazione vettoriale) = luogo geometrico dei punti tali che $\overline{P_0P} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \overline{P_0P} = t \cdot \vec{v}$.

Retta (equazioni parametriche) = $\begin{cases} x - x_0 = t \cdot \ell \\ y - y_0 = t \cdot m \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

M e L sono i parametri direttori, componenti del vettore direttore.

Retta passante per due punti (equazioni parametriche) = $\begin{cases} x = x_A + (x_B - x_A) \cdot t \\ y = y_A + (y_B - y_A) \cdot t \end{cases}$

Retta (sotto forma di determinante) e condizione di allineamento di tre punti

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Retta (equazione cartesiana)

Sviluppando il determinante della matrice di prima rispetto alla prima riga si ottiene:

$$x \cdot (y_1 - y_2) - y \cdot (x_1 - x_2) + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0$$

da cui, posto

$$\begin{cases} a = y_1 - y_2 \\ b = -(x_1 - x_2) = x_2 - x_1 \\ c = x_1y_2 - x_2y_1 \end{cases}$$

si ottiene

$$ax + by + c = 0.$$

Parametri direttori della retta = $\begin{cases} \ell = x_2 - x_1 = b \\ m = y_2 - y_1 = -a \end{cases}$

Vettore direttore = $\vec{v} = (b, -a)$

Vettore perpendicolare alla retta = $\vec{n} = (a, b)$

Ogni retta passante per l'origine è il luogo geometrico dei punti del piano le cui coordinate hanno rapporto $\frac{y}{x}$ costante.

Equazione segmentaria di una retta

Dividendo per c l'equazione $ax + by + c = 0$ si ottiene $\frac{x}{-\frac{c}{a}} + \frac{y}{\frac{c}{b}} = 1$.

Posto $p = -\frac{c}{a}$ e $q = \frac{c}{b}$, si ha $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$.

P= punto in cui la retta interseca l'asse x. Q=punto in cui la retta interseca asse y.

Equazione ridotta di una retta non parallela all'asse y

$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, ponendo $m = -\frac{a}{b}$ e $q = -\frac{c}{b}$ si ha $y = mx + q$, equazione ridotta o esplicita.

Osservazione

1. se $m > 0$, $\tilde{\alpha}$ è acuto.
2. se $m < 0$, $\tilde{\alpha}$ è ottuso.
3. se $m = 0$, $\tilde{\alpha} = 0$.

Significato geometrico di m e q

1. $m = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
2. $m = \text{tg}(\tilde{\alpha})$
3. q è l'ordinata d'intersezione della retta con l'asse y.

Equazione della retta sotto forma di rapporti uguali

Come abbiamo visto prima,

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \quad \forall P_1, P_2 \in \begin{cases} x_1 \neq x_2 \\ y_1 \neq y_2 \end{cases}$$

Poiché

$$x_2 - x_1 = \ell \quad \text{e} \quad y_2 - y_1 = m$$

Allora $\frac{x - x_1}{\ell} = \frac{y - y_1}{m}$, dove ℓ ed m sono i parametri direttori.

Posizione reciproca tra rette

Se r è una retta di equazione $ax + by + c = 0$ e se r' è una retta di equazione $a'x + b'y + c' = 0$, detta

A la matrice dei soli coefficienti e A' la matrice completa dei coefficienti e dei termini noti:

1. (r e r' sono incidenti) $\Leftrightarrow (\text{rang}(A) = \text{rang}(A') = 2)$
2. (r e r' sono parallele e distinte) $\Leftrightarrow (\text{rang}(A) = 1 \text{ e } \text{rang}(A') = 2)$
3. (r e r' sono parallele e coincidenti) $\Leftrightarrow (\text{rang}(A) = \text{rang}(A') = 1)$

(si dimostra con Rouchè-Capelli)

Corollario

1. ($r \parallel r'$) $\Leftrightarrow \left(\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}\right)$, se $c = c'$ allora sono coincidenti, altrimenti distinte.
2. ($r \parallel r'$) $\Leftrightarrow \left(\frac{\ell}{\ell'} = \frac{m}{m'}\right)$
3. $r \parallel r' \Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \Leftrightarrow -\frac{a}{b} = -\frac{a'}{b'} \Leftrightarrow m_r = m_{r'}$ (condizione di parallelismo tra rette in forma esplicita)

Equazione della retta per un punto e // a una retta data

1. (forma implicita) $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$
2. (forma esplicita) $y - y_0 = m(x - x_0)$.

Condizione di perpendicolarità tra rette

1. $(r \perp r') \Leftrightarrow (\ell \cdot \ell' + m \cdot m' = 0)$
2. $(r \perp r') \Leftrightarrow (a \cdot a' + b \cdot b' = 0)$
3. $(r \perp r') \Leftrightarrow (m \cdot m' + 1 = 0)$ ovvero $(m' = -\frac{1}{m})$

(si dimostrano con la condizione di perpendicolarità tra vettori)

Corollario

1. l'equazione della generica retta r' perpendicolare ad r ha equazione:

$$b \cdot x - a \cdot y + c' = 0$$

2. l'equazione della retta passante per $P_0(x_0, y_0)$ e perpendicolare alla retta r è:

$$b \cdot (x - x_0) - a \cdot (y - y_0) = 0$$

3. l'equazione della generica retta r' perpendicolare ad r ha equazione:

$$y = -\frac{1}{m} \cdot x + q'$$

4. l'equazione della retta passante per $P_0(x_0, y_0)$ e perpendicolare alla retta r è:

$$y - y_0 = -\frac{1}{m} (x - x_0).$$

Angolo di due rette

1. (con parametri direttori) $\cos(\widehat{rr'}) = \frac{\ell \cdot \ell' + m \cdot m'}{\sqrt{\ell^2 + m^2} \cdot \sqrt{\ell'^2 + m'^2}}$;
2. (con equazione cartesiana) $\cos(\widehat{rr'}) = \frac{a \cdot a' + b \cdot b'}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2}}$;
3. (con equazione esplicita) $tg(\widehat{rr'}) = \frac{m - m'}{1 + m \cdot m'}$.

Distanza di un punto da una retta

Dicesi distanza di P_0 da r la misura del segmento non orientato $\overline{P_0Q}$, dove Q è il piede della perpendicolare condotta da P_0 ad r .

1. (equazione implicita) $d(P_0, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$,

$$2. \text{ (equazione esplicita) } d(P_0, r) = \frac{|y_0 - mx_0 - q|}{\sqrt{1+m^2}}$$

Formula dell'area di un triangolo noti i 3 vertici

Se $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ sono tre punti non allineati del piano, si dimostra che l'area del triangolo di vertici P_1, P_2, P_3 è data da:

$$\mathcal{A}(P_1 P_2 P_3) = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

(scrivi A, B, C in senso antiorario)

Fasci di rette nel piano

Fasci propri

$$\lambda(ax + by + c) + \mu(a'x + b'y + c') = 0, \text{ con } (\lambda, \mu) \neq (0, 0) \text{ o } ax + by + c + k(a'x + b'y + c') = 0$$

Le rette generatrici del fascio si ottengono per $\mu = 0$ e $\lambda = 0$ o per $k=0$ e $k=\infty$.

Fasci impropri

$ax + by + k = 0$ con k variabile in \mathbb{R} .

Teorema

Se $r: ax + by + c = 0$, $r': a'x + b'y + c' = 0$ ed $r'': a''x + b''y + c'' = 0$ sono tre rette del piano cartesiano, condizione necessaria e sufficiente perché esse appartengano ad uno stesso fascio è che sia nullo il determinante formato dai coefficienti e dai termini noti delle loro equazioni:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0.$$

Cambiamento di basi (rototraslazione)

Due riferimenti $RC(O, \vec{i}, \vec{j})$ e $RC(O', \vec{i}', \vec{j}')$ sono equiversi se le corrispondenti basi sono equiverse nel senso che definiscono nel piano lo stesso verso di rotazione (orario/antiorario).

$\mathcal{R}' = RC(O', i', j')$ è noto non appena si assegnano le coordinate della sua nuova origine $O'(b_1, b_2)$ e l'angolo ϑ che l'asse x' forma con l'asse x .

Formule di passaggio

$$\begin{cases} x = x' \cdot \cos(\vartheta) - y' \cdot \sin(\vartheta) + b_1 \\ y = x' \cdot \sin(\vartheta) + y' \cdot \cos(\vartheta) + b_2 \end{cases}$$

(b_1 e b_2 sono le coordinate dell'origine di R')

Formule inverse

$$\begin{cases} x' = x \cdot \cos(\vartheta) + y \cdot \text{sen}(\vartheta) + b'_1 \\ y' = -x \cdot \text{sen}(\vartheta) + y \cdot \cos(\vartheta) + b'_2 \end{cases}$$

(b'_1 e b'_2 sono le coordinate di O in R')

Casi particolari

1. Assi paralleli e concordi, è una traslazione.
2. $O' \equiv O$, è una rotazione.

Equazioni matriciali delle trasformazioni di coordinate

Se indichiamo con:

1. $X = (x, y)_T$, dove (x, y) sono le coordinate del punto P nel riferimento $RC(O, x, y)$,
2. $X' = (x', y')_T$, dove (x', y') sono le coordinate del punto P nel riferimento $RC(O', x', y')$,
3. $A = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\text{sen}(\vartheta) \\ \text{sen}(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$, dove ϑ è l'angolo di cui è ruotato $RC(O', x', y')$ rispetto ad $RC(O, x, y)$,
4. $B = (b_1, b_2)_T$, dove (b_1, b_2) sono le coordinate della nuova origine O' rispetto ad $RC(O, x, y)$,

l'equazione matriciale è $X = A \cdot X' + B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\text{sen}(\vartheta) \\ \text{sen}(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

La matrice A è una matrice ortogonale, quindi i vettori riga e i vettori colonna sono due basi ortonormali di S_2 . Ogni matrice ortogonale può essere considerata come una matrice di rotazione.

