

DISPENSA 4 – APPLICAZIONI LINEARI

Definizione di applicazione lineare

Se V e V' sono due spazi vettoriali su \mathbb{R} , dicesi applicazione lineare di V in V' ogni applicazione $f: V \rightarrow V'$ tale che:

1. $\forall u, v \in V: f(u + v) = f(u) + f(v)$;
2. $\forall k \in \mathbb{R} \text{ e } \forall v \in V: f(k \cdot v) = k \cdot f(v)$.

(è compatibile con somma di vettori e prodotto per uno scalare)

Proprietà applicazioni lineari

1. $f(0_V) = 0_{V'}$;
2. $\forall v \in V: f(-v) = -f(v)$
3. $\forall v_1, v_2, \dots, v_r \in V(\mathbb{R}): f(h_1 v_1 + h_2 v_2 + \dots + h_r v_r) = h_1 \cdot f(v_1) + h_2 \cdot f(v_2) + \dots + h_r \cdot f(v_r)$;

(f trasforma combinazioni lineari di $V(\mathbb{R})$ in combinazioni lineari di $V'(\mathbb{R})$);

4. $\forall S = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ sistema di m vettori L. D. di $V(\mathbb{R})$:
 $S' = \{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_m)\}$ sistema di m vettori L. D. di $V'(\mathbb{R})$,

(f trasforma sistemi di vettori L.D. di $V(\mathbb{R})$ in sistemi di vettori L.D. di $V'(\mathbb{R})$).

(si dimostrano attraverso la definizione di applicazione lineare)

Proprietà applicazioni lineari e sottospazi

Se W è un sottospazio vettoriale di $V(\mathbb{R})$:

1. $f(W)$ sottospazio (immagine) di $V'(\mathbb{R})$; (f trasforma sottospazi vettoriali in sott. vettoriali)
2. $\dim f(W) \leq \dim(W) \leq \dim(V)$
3. $\dim f(W) \leq \dim V'$;
4. (Se W' è un sottospazio di $V'(\mathbb{R}) \Rightarrow (f^{-1}(W'))$ è un sottospazio di $V(\mathbb{R})$)

(si dimostrano con definizione di sottospazio vettoriale e definizione di applicazione lineare)

Proposizione

Siano $f, g: V \rightarrow V'$ due applicazioni lineari di V in V' e sia $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ una base di V . Si dimostra che:

$$(f = g) \Leftrightarrow (\forall i = 1, 2, \dots, n: f(e_i) = g(e_i)).$$

Immagine di un'applicazione lineare

Se $f: V \rightarrow V'$ è un'applicazione lineare, il sottospazio vettoriale $f(V)$ di $V'(\mathbb{R})$ dicesi sottospazio immagine di f e si denota con $\text{Im}(f)$.

La dimensione di $\text{Im}(f)$ si dice *rango* di f e si denota con $\text{rang}(f)$.

$\text{Im}(f)$ è l'insieme di tutte le immagini degli elementi di V , $\text{Im}(f) = f(V) = \{v' \in V' \mid \exists v \in V \ni f(v) = v'\}$

La dimensione dell'immagine di f è sempre \leq della dimensione di V e V' .

Suriiettività e iniettività in relazione a $\text{Im}(f)$

1. (f è surgettiva) $\Leftrightarrow (\dim \text{Im}(f) = \dim V')$
2. (f è ingettiva) $\Leftrightarrow (\dim \text{Im}(f) = \dim V)$.

Dimostrazione 2

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione m e sia $B = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ una sua base \Leftrightarrow

$$\Leftrightarrow \forall v \in V, \exists! (h_1, h_2, \dots, h_m) \in \mathbb{R}^m \exists' v = h_1 v_1 + h_2 v_2 + \dots + h_m v_m.$$

Quindi, per definizione di $\text{Im}(f)$, si ha:

$$\begin{aligned} " v' \in \text{Im}(f) = f(V), \exists v \in V ' f(v) = v' \Rightarrow v' = f(v) = f(h_1 v_1 + h_2 v_2 + \dots + h_m v_m) = \\ = f(h_1 v_1) + f(h_2 v_2) + \dots + f(h_m v_m) = h_1 f(v_1) + h_2 f(v_2) + \dots + h_m f(v_m) \Rightarrow \\ \Rightarrow (f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_m)) \text{ è un sistema di generatori di } f(V). \end{aligned}$$

Dimostriamo ora che $(f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_m))$ è un sistema di vettori L.I. di $f(V)$.

Sia:

$$\begin{aligned} h_1 f(v_1) + h_2 f(v_2) + \dots + h_m f(v_m) = 0 \Leftrightarrow f(h_1 v_1 + h_2 v_2 + \dots + h_m v_m) = 0 = f(0) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\text{essendo } f \text{ ingettiva}) h_1 v_1 + h_2 v_2 + \dots + h_m v_m = 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (\text{essendo } (v_1, v_2, \dots, v_m) \text{ una base di } V(\mathbb{R})) h_1 = h_2 = \dots = h_m = 0 \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow (f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_m)) \text{ è un sistema di vettori L.I. di } f(V).$$

Pertanto, $(f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_m))$ è una base di $\text{Im}(f) \Rightarrow \dim \text{Im}(f) = m = \dim V$.

Nucleo di un'applicazione lineare = sottoinsieme di $V(\mathbb{R})$ tale che $\text{Ker}(f) = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$.

(insieme dei vettori di V che hanno immagine uguale a 0)

Proprietà del nucleo

$\text{Ker}(f)$ è un sottospazio vettoriale di $V(\mathbb{R})$. (si dimostra con definizione di sottospazio vettoriale)

Proprietà delle funzioni iniettive

Caratterizzazione delle applicazioni lineari ingettive

Le seguenti tre proposizioni sono equivalenti:

1. f è iniettiva;

2. $\text{Ker}(f)=0$;
3. f trasforma vettori L.I. in vettori L.I.

(si dimostrano con le proprietà delle funzioni iniettive)

4. (corollario) f trasforma basi di V in basi di $\text{Im}(f)$, cioè se $\mathcal{B} \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ è una base dello spazio vettoriale $V(\mathbb{R}) \Rightarrow \mathcal{B}' = \{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_m)\}$ è una base di $f(V) = \text{Im}(f)$.

(si dimostra dimostrando che \mathcal{B}' è un sistema di generatori ed è un sistema di vettori L.I.)

Teorema della dimensione

$$\text{Dim}(V)=\text{dim Ker}(f)+\text{dim Im}(f)$$

Dimostrazione

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e sia S una base di $\text{Ker}(f)$.

$\text{Ker}(f)$ è un sottospazio di V , quindi S è un sistema di vettori L.I. anche di V .

Per il teorema del completamento delle basi, esistono $n-r$ vettori L.I di V tali che tutti insieme siano una base di V .

A questo punto dimostro che $\{f(v_{r+1}), f(v_{r+2}), \dots, f(v_n)\}$ è un sistema di generatori di $\text{Im}(f)$ e che sono linearmente indipendenti.

Quindi $\{f(v_{r+1}), f(v_{r+2}), \dots, f(v_n)\}$ è una base di $\text{Im}(f)$ e $\text{dim}(\text{Im}(f)) = n - r$.

Pertanto $\text{dim Ker}(f)+\text{dim Im}(f)=r+(n-r)=n=\text{dim}(V)$.

Endomorfismi, automorfismi

Endomorfismo = ogni applicazione $f: V \rightarrow V$ tale che:

1. $\forall u, v \in V(\mathbb{R}): f(u + v) = f(u) + f(v)$;
2. $\forall k \in \mathbb{R} \text{ e } \forall v \in V(\mathbb{R}): f(k \cdot v) = k \cdot f(v)$.

Proprietà endomorfismo

Se f è un endomorfismo, allora $(f \text{ è iniettiva}) \Leftrightarrow (f \text{ è surgettiva})$

(ogni endomorfismo iniettivo è anche suriettivo e viceversa, si dimostra con il teorema delle dimensioni)

Automorfismo = endomorfismo bigettivo di V in V .

$$(f : V \rightarrow V \text{ è automorfismo}) \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ è iniettiva} \Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{0\} \\ e \\ f \text{ è surgettiva} \Leftrightarrow \text{Im}(f) = V \end{cases} .$$

Matrice associata ad un'applicazione lineare

Equazioni dell'applicazione lineare

Sia f un'applicazione lineare di V in V' e siano $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ una base di V e $B' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_m\}$ una base di V' .

Poiché sono basi, si ha che $\forall v \in V, \exists (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ni v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$ e in maniera analoga anche per B' .

Da entrambe le relazioni deriva che $\Rightarrow \forall v \in V : f(v) = y_1 \cdot e'_1 + y_2 \cdot e'_2 + \dots + y_m \cdot e'_m$

In particolare, siccome $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$ sono vettori di V' , per essi si ha:

$$\begin{cases} f(e_1) = a_{11}e'_1 + a_{21}e'_2 + \dots + a_{m1}e'_m \\ f(e_2) = a_{12}e'_1 + a_{22}e'_2 + \dots + a_{m2}e'_m \\ \dots \\ f(e_n) = a_{1n}e'_1 + a_{2n}e'_2 + \dots + a_{mn}e'_m \end{cases}$$

e quindi $\forall v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n \in V$, si ha:

$$f(v) = f(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \dots + x_n f(e_n) = x_1 (a_{11}e'_1 + a_{21}e'_2 + \dots + a_{m1}e'_m) + x_2 (a_{12}e'_1 + a_{22}e'_2 + \dots + a_{m2}e'_m) + \dots + x_n (a_{1n}e'_1 + a_{2n}e'_2 + \dots + a_{mn}e'_m) \Rightarrow$$

$$\forall v \in V : f(v) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n) \cdot e'_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n) \cdot e'_2 + \dots + (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n) \cdot e'_m$$

poiché le componenti di un vettore rispetto ad una base sono uniche,

$$\begin{cases} f(v) = y_1 e'_1 + y_2 e'_2 + \dots + y_m e'_m \\ f(v) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n) e'_1 + \dots + (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n) e'_m \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{aligned}$$

Queste sono le relazioni tra le componenti di v nella base B e le componenti di $f(v)$ nella base B' , ossia le equazioni dell'applicazione lineare f rispetto alle basi B e B' .

Matrice associata all'applicazione lineare

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(le colonne sono le componenti dei vettori $f(e_i)$ rispetto alla base B')

Ha dimensione $m \times n$, dove $m = \dim(V')$ e $n = \dim(V)$.

Forma matriciale compatta

$$Y_T = A \cdot X_T$$

Dove X è il vettore delle componenti di v nella base B e Y è il vettore formato dalle componenti di $f(v)$ nella base B' .

Proprietà della matrice associata all'applicazione lineare

1. Il rango della matrice associata è uguale alla dimensione dell'immagine di f .
2. f è iniettiva $\Leftrightarrow \text{rang}(A) = \dim V$.
3. f è suriettiva $\Leftrightarrow \text{rang}(A) = \dim V'$.

Proposizione (C.N.S.)

Affinché un'applicazione lineare sia un automorfismo è che la matrice A associata ad f risulti non singolare.

Proprietà 1

Siano $V(\mathbb{R})$ e $V'(\mathbb{R})$ sono due spazi vettoriali e siano $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ una base di $V(\mathbb{R})$ e $S' = \{v'_1, v'_2, \dots, v'_n\}$ n vettori di $V'(\mathbb{R})$. Si dimostra che esiste ed è unica l'applicazione lineare

$$f: V \rightarrow V' \ni f(e_1) = v'_1, f(e_2) = v'_2, \dots, f(e_n) = v'_n.$$

Proprietà 2

Se V e V' sono due spazi vettoriali di dimensione n e se $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ è una base di V e $B' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$ è una base di V' , si dimostra che:

$$\exists! f: V \rightarrow V' \ni f(e_1) = e'_1, f(e_2) = e'_2, \dots, f(e_n) = e'_n.$$

Proprietà delle matrici associate

Se $f: V \rightarrow V'$ e $g: V \rightarrow V'$ sono due applicazioni lineari di V in V' e se A_f e A_g sono le rispettive matrici associate rispetto alle basi B e B' :

1. $A_{f+g} = A_f + A_g$;
2. $A_{k \cdot f} = k \cdot A_f$;

$$3. A_{g \circ f} = A_g \cdot A_f;$$

$$4. A_{f^{-1}} = (A_f)^{-1} \text{ (con } f \text{ isomorfismo)}$$

Teorema

(metodo per calcolare la matrice associata quando si cambiano le basi rispetto alle quali deve essere calcolata la matrice associata)

Sia $f: V \rightarrow V'$,

$A_f^{(B, B')}$ la matrice associata all'app. lineare rispetto alle basi B e B' ,

$A_f'^{(\bar{B}, \bar{B}')}$ la matrice associata all'app. lineare rispetto alle basi \bar{B} e \bar{B}' .

Si dimostra che

$$A_f'^{(\bar{B}, \bar{B}')} = Q^{-1} * A_f^{(B, B')} * P$$

dove P è la matrice di passaggio da B a \bar{B} di V e Q^{-1} è la matrice inversa della matrice di passaggio da B' a \bar{B}' di V' .

Dimostrazione

Poiché $A_f^{(B, B')}$ è la matrice associata all'app. lineare si ha che $Y_T = A_f^{(B, B')} * X_T$

e per $A_f'^{(\bar{B}, \bar{B}')}$ si ha che $Y_T' = A_f'^{(\bar{B}, \bar{B}')} * X_T'$.

Siccome B e \bar{B} sono due basi dello spazio vettoriale V , per le formule del cambiamento di base

$X_T = P \cdot X_T'$, ed analogamente $Y_T = Q \cdot Y_T'$.

Svolgendo i calcoli si ottiene l'asserto.

