DISPENSA 8- GEOMETRIA ANALITICA NELLO SPAZIO

Coordinate cartesiane del punto

$$\begin{cases} x = \overrightarrow{OP_x} \\ y = \overrightarrow{OP_y} \\ z = \overrightarrow{OP_z} \end{cases}$$

Componenti di un vettore in funzione delle coordinate dei suoi estremi

$\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2} \in V_3$ ha componenti $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Distanza di 2 punti e punto medio

La distanza tra due punti è data dal modulo del vettore $\overrightarrow{P_1P_2}$.

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

(il punto medio si dimostra con la sua definizione $\overrightarrow{P_1M} = \overrightarrow{MP_2}$)

Baricentro

$$G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}\right)$$

Equazione vettoriale di un piano

Esiste ed è unico il piano α passante per tre punti P_0, P_1, P_2 non allineati.

Se indichiamo con $\vec{v} = \overrightarrow{P_0P_1}$ *e con* $\vec{w} = \overrightarrow{P_0P_2}$, un piano π è anche univocamente individuato se si assegnano un suo punto P_0 e una coppia di vettori *non paralleli* (linearmente indipendenti) $\vec{v}$ e $\vec{w}$ appartenenti al piano.

Di conseguenza, $\forall P \in \pi$, $(\overrightarrow{P_0P}, \vec{v}, \vec{w})$ risultano tre vettori di π linearmente dipendenti (ricorda che ogni piano ha dimensione 2 e perciò due è il massimo numero di vettori l.i.) e quindi tali che

$\forall P \in \alpha$: $\overrightarrow{P_0P} = h\vec{v} + k\vec{w}$, con $h, k \in \mathbb{R}$.

I vettori $\vec{v}, \vec{w}$ si dicono vettori di giacitura del piano α.

Equazioni parametriche del piano

Se $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{v} = (\ell, m, n)$ *e* $\vec{w} = (\ell', m', n')$,

$$\overrightarrow{P_0P} = h\vec{v} + k\vec{w} \Longrightarrow \begin{cases} x = x_0 + h\ell + k\ell' \\ y = y_0 + hm + km' \\ z = z_0 + hn + kn' \end{cases}$$

Condizione di complanarità di 4 punti / equazione del piano sotto forma di determinante

(P,P_1,P_2,P_3 sono complanari) $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

Equazione cartesiana di un piano

Si ottiene sviluppando il determinante della matrice dell'equazione del piano rispetto alla prima riga.

Si ha ax + by + cz + d = 0, i coefficienti a, b e c sono i parametri di giacitura del piano.

Osservazione

Un piano π si può assegnare con :

1. Un punto e due vettori non paralleli.
2. Tre punti non allineati.

Piani paralleli agli assi coordinati

1. //asse x ⇒ by+cz=0
2. //asse y ⇒ ax+cz=0
3. //asse z ⇒ ax+by=0

Equazione segmentaria di un piano

$a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = -d$, dividendo tutto per –d ⇒ $-\frac{a}{d}x - \frac{b}{d}y - \frac{c}{d}x = 1$

Posto $-\frac{a}{d} = \frac{1}{p}, -\frac{b}{d} = \frac{1}{q}, -\frac{c}{d} = \frac{1}{r}$, ho $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1.$

P è l'ascissa, q l'ordinata e r la quota dei punti di intersezione con i piani cartesiani.

Equazione di un piano passante per un punto

$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

I piani passanti per un punto assegnato sono ∞^2: l'insieme di tutti questi piani passanti per P_0 dicesi *stella di piani* di centro P_0.

Posizione relativa di due piani nello spazio

Condizione di parallelismo

π: ax + by + cz + d = 0 e π': a'x + b'y + c'z + d' = 0,

detta A la matrice dei coefficienti $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$

e detta A’ la matrice completa con i termini noti $A' = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}$

si dimostra che π e π' sono:

1. *incidenti* se rang(A) = 2;
2. paralleli e distinti se rang(A) = 1 e rang(A’) = 2;
3. paralleli e coincidenti se rang(A) = rang(A’) = 1.

Dimostrazione

Per il teorema di Rouchè-Capelli, si ha che:

1. se rang(A) = 2 = rang(A’), il sistema è compatibile e ammette $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni, ovvero i due piani hanno una retta in comune e sono perciò incidenti;
2. se rang(A) = 1 < rang(A’) = 2, il sistema è impossibile: i due piani sono paralleli e distinti.
3. Infine, se rang(A) = rang(A’) = 1, il sistema è compatibile e ammette $\infty^{3-1} = \infty^2$ soluzioni: i due piani hanno tutti i punti in comune e sono coincidenti.

Corollario

1. $(\pi \parallel \pi' \; e \; \pi \neq \pi') \Leftrightarrow \left(\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \neq \frac{d}{d'}\right)$;
2. $(2) \; (\pi \parallel \pi' \; e \; \pi \equiv \pi') \Leftrightarrow \left(\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'}\right)$

(si dimostra con i minori comlementari)

Significato dei coefficienti a, b e c

1. Sono le componenti di un vettore ⊥ al piano π.
2. Ogni retta perpendicolare l piano ha parametri direttori proporzionali ai coefficienti del piano π.

Fasci di piani

1. Fascio proprio: i due piani sono incidenti e si intersecano secondo la retta r, chiamata sostegno del fascio.
2. Fascio improprio: tutti i piani sono paralleli e l’equazione è $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + k = 0$, al variare del parametro k in R.

Classificazione di un fascio

Se $\mathcal{F}$ è un fascio di piani generato da π: a x + b y + c z + d = 0 e da π': a'x + b'y + c'z + d' = 0, dette

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \; e \; A' = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}$$

si dimostra che:

1. $(\mathcal{F} \text{ è un fascio di piani proprio}) \Leftrightarrow (rang(A) = 2)$

2. $(\mathcal{F}$ è un fascio di piani improprio$) \Leftrightarrow (rang(A) = 1)$.

(conseguenza del parallelismo tra piani)

Condizione di appartenenza di un piano a un fascio

$$rang\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix} < 3$$

(minore estratto del secondo ordine =0)

Equazioni della retta nello spazio

Equazione vettoriale

$\overrightarrow{P_0P} = t \cdot \vec{v}$, al variare di t in R.

Equazioni parametriche

P(x,y,z), $P_0(x_0,y_0,z_0)$ e $\vec{v} = (\ell, m, n)$, passando alle componenti dei vettori, si ha:

$$\overrightarrow{P_0P} = t \cdot \vec{v} \Leftrightarrow (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t \cdot (\ell, m, n)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x - x_0 = t \cdot \ell \\ y - y_0 = t \cdot m \\ z - z_0 = t \cdot n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + t \cdot \ell \\ y = y_0 + t \cdot m, \\ z = z_0 + t \cdot n \end{cases} \quad \forall t \in R.$$

Condizione di allineamento di tre punti

$$(P, P_1, P_2 \; sono \; allineati) \Leftrightarrow rang\begin{pmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{pmatrix} = 1.$$

(si dimostra attraverso i vettori)

Equazione della retta per due punti

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

osservato che

$$\ell = x_2 - x_1, m = y_2 - y_1, n = z_2 - z_1$$

si ottiene l'equazione della retta sotto forma di rapporti uguali

$$\frac{x - x_1}{\ell} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$$

Equazioni cartesiane di una retta

Ogni retta si può ottenere come intersezione di due piani non paralleli

$$r = \pi \cap \pi' : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

i parametri direttori di r sono i minori del 2° ordine che si ottengono dalla matrice dei coefficienti$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \Rightarrow \ell = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}, m = -\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}, n = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$

Condizione di parallelismo tra rette

$$(r \parallel r') \Leftrightarrow \left(\frac{\ell}{\ell'} = \frac{m}{m'} = \frac{n}{n'}\right)$$

Posizione relativa tra rette e piani

1. (r è incidente il piano π) $\Leftrightarrow$ $(r \cap \pi = \{P\})$;
2. r è parallela al piano π se r è contenuta nel piano oppure r non ha punti in comune col piano:

$$(r \parallel \pi) \Leftrightarrow (r \subset \pi \vee r \cap \pi = \emptyset).$$

Se π è un piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$ e r è una retta di equazioni $\begin{cases} a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \end{cases}$ si dimostra che:

1. $(r \cap \pi = \{P\}) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \neq 0;$ (r incidente π)
2. $(r \parallel \pi) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0.$

Dimostrazione

Considerato il sistema formato dalle equazioni di π e di r, $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \end{cases}$

le matrici associate al sistema sono $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ (matrice dei coefficienti)

e $A' = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix}$ (matrice completa)

1. Se $rang(A) = rang(A') = 3 \Leftrightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \neq 0$, per il teorema di Rouchè-Capelli, il sistema ha un'unica soluzione: la retta è incidente il piano.
2. Se rang(A) = rang(A') = 2, il sistema è compatibile e ammette infinite $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni: in tal caso la retta è contenuta nel piano ed è parallela al piano.
3. Se rang(A) = 2 $\neq rang(A') = 3$, il sistema è incompatibile: la retta è parallela e non è contenuta nel piano.

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0$ è la condizione di parallelismo fra retta e piano.

Proprietà

$$(r \parallel \pi) \Leftrightarrow (a \cdot \ell + b \cdot m + c \cdot n = 0)$$

(si dimostra con la condizione di parallelismo per vettori)

Angolo di due rette

È dato dall'angolo dei vettori direttori.

$$\cos(\widehat{rr'}) = \frac{\ell \cdot \ell' + m \cdot m' + n \cdot n'}{\sqrt{\ell^2 + m^2 + n^2} \cdot \sqrt{\ell'^2 + m'^2 + n'^2}}$$

Corollario

$$(r \perp r') \Leftrightarrow (\ell \cdot \ell' + m \cdot m' + n \cdot n' = 0).$$

Angolo fra retta e piano

Angolo che la retta forma con la sua proiezione ortogonale sul piano.

$$\widetilde{\mathrm{r}\pi} = \frac{\pi}{2} - \widetilde{\mathrm{rn}}$$

Dove n è la perpendicolare al piano.

$$sen(\widehat{r\alpha}) = \left|\frac{a \cdot \ell + b \cdot m + c \cdot n}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{\ell^2 + m^2 + n^2}}\right|$$

Condizione di perpendicolarità/parallelismo tra retta e piano

$$(r \text{ è } parallela\ ad\ \alpha) \Leftrightarrow (a\ell + bm + cn = 0).$$

$$(r \text{ è } perpendicolare\ al\ piano\ \pi) \Leftrightarrow \left(\frac{a}{\ell} = \frac{b}{m} = \frac{c}{n}\right)$$

Angolo di due piani

È definito come l'angolo formato dalle rette perpendicolari ai piani.

$$\cos(\widehat{\alpha\beta}) = \frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}$$

Condizione di perpendicolarità tra piani

$$(\alpha \perp \beta) \Leftrightarrow (aa' + bb' + cc' = 0) = 0$$

Distanza di un punto da un piano

Se P0 è un punto di S3 e π è un piano di S3, detta P1 la proiezione ortogonale di P0 su π, dicesi distanza di P0 da π la misura del segmento P0P1:

d(P0, π) = d(P0,P1).

$$d(P_0, \pi) = \left|\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right|.$$

Formula della distanza di due piani paralleli

$$d(\pi,\pi')=d(P,\pi'),\ \forall P\in\pi.$$

Proprietà

$$d(\pi,\pi')=\frac{|d-d'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Distanza di un punto da una retta

Dicesi distanza di P0 da r la distanza di P0 da H, dove H è la proiezione ortogonale di P0 su r.

Procedimento

1. Si scrive l'equazione del piano π passante per P0 e perpendicolare ad r;
2. Si calcola il punto H di intersezione di π con r;
3. Si calcola d(P0, H): è questa la distanza di P0 da r, d(P0,r) = d(P0,H).

Distanza di due rette

1. $(r\ e\ r'\, sono\ incidenti) \Leftrightarrow (r\cap r' = \{P\}) \Longrightarrow (d(r,r')=0)$
2. Se r e r’ sono due rette complanari e parallele si dice distanza di r da r’ quanto segue:

   $d(r,r')=d(P,r')$, dove P è un punto qualsiasi di r.

3. Se r e r’ sono due rette sghembe, detti H un punto di r e H’ un punto di r’ tali che $\vec{v}=\overrightarrow{HH'}$ sia perpendicolare sia a r sia a r’, dicesi distanza delle due rette sghembe la distanza di H da H’:

$$d(r,r')=d(H,H')=\overline{HH'}.$$

La retta HH’ dicesi retta di minima distanza delle rette sghembe r e r’.

Procedimento

1. Si scelgono un punto generico H di r e un punto generico H’ di r’
2. Si impone che il vettore $\vec{v}=\overrightarrow{HH'}$ sia perpendicolare sia a r sia ad r'
3. Si ottengono le coordinate di H e H’;
4. Si calcola la distanza d(H,H');
5. d(r,r') = d(H,H') (distanza delle due rette sghembe)
6. La retta passante per H e H’ è la retta di minima distanza.

Coseni direttori di una retta = coseni degli angoli che r forma con gli assi cartesiani.

$$\begin{cases}\cos(\vartheta_x)=u_x\\ \cos(\vartheta_y)=u_y\\ \cos(\vartheta_z)=u_z\end{cases}$$

$$\cos^2(\vartheta_x)+\cos^2(\vartheta_y)+\cos^2(\vartheta_z)=1.$$

$$\cos(\mathcal{J}_x) = \frac{\ell}{\sqrt{\ell^2 + m^2 + n^2}}, \cos(\mathcal{J}_y) = \frac{m}{\sqrt{\ell^2 + m^2 + n^2}}, \cos(\mathcal{J}_z) = \frac{n}{\sqrt{\ell^2 + m^2 + n^2}}.$$

(per dimostrarlo basta calcolare il versore del vettore direttore)