

DISPENZA 3 (SPAZI VETTORIALI E SPAZI EUCLIDEI)

Legge di composizione interna

Se A è un insieme non vuoto, si dice legge di composizione interna (o operazione interna) ogni applicazione $\omega; A \times A \rightarrow A$ tale che $\forall (a, b) \in A \times A \rightarrow c \in A$. L'unico elemento c di A , corrispondente ad (a, b) in ω , si indica con $\omega(a, b)$ o con $a\omega b$.

Struttura algebrica= ogni insieme non vuoto A dotato di un'operazione interna ω . Si denota con (A, ω) .

Elemento neutro

e è un elemento neutro di A rispetto a ω se $\forall a \in A: \begin{cases} a\omega e = a \\ e\omega a = a \end{cases}$

se (A, ω) ha un elemento neutro, esso è unico.

Elemento simmetrizzabile

L'elemento $a \in A$, con A dotato di elemento neutro, è simmetrizzabile per ω se $\exists a' \in A \ni a\omega a' = a'\omega a = e$.

Tale a' si dice simmetrico e non è detto che sia unico.

Gruppo= struttura algebrica che verifica le seguenti proprietà:

- $\forall a, b, c \in A: a\omega(b\omega c) = (a\omega b)\omega c$ (ω è associativa)
- $\exists e \in A \ni \forall a \in A: a\omega e = e\omega a = a$ (esistenza elemento neutro)
- $\forall a \in A, \exists a' \in A \ni a\omega a' = a'\omega a = e$ (esistenza dell'elemento simmetrico)

Proprietà dei gruppi: ogni elemento di A ha un unico simmetrico.

Gruppo abeliano= un gruppo in cui l'operazione interna ω è commutativa, cioè $\forall a, b \in A: a\omega b = b\omega a$.

Esempi di gruppi abeliani sono $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R}^n, +)$ e l'addizione tra matrici.

Sottogruppo

Se A' è un sottoinsieme proprio di A (gruppo), si dice che A' è un sottogruppo se di A se A' , munito della legge di composizione interna di A , è un gruppo. Es. $(\mathbb{Z}, +)$ e $(\mathbb{Q}, +)$ sono sottogruppi di $(\mathbb{R}, +)$.

Anello

Se A è un insieme in cui sono definite due operazioni interne $(A, +, \cdot)$, è un anello se:

$(A, +)$ è un gruppo abeliano

- | | |
|---|---|
| 1. $\forall a, b, c \in A: e + (b + c) = (a + b) + c$ | (prop. associativa di +) |
| 2. $\forall 0 \in A \ni \forall a \in A: a + 0 = 0 + a = a$ | (esistenza elemento neutro per +) |
| 3. $\forall a \in A, \exists -a \in A \ni a + (-a) = -a + a = 0$ | (esistenza simmetrico per +) |
| 4. $\forall a, b \in A: a + b = b + a$ | (prop. commutativa per +) |
| 5. $\forall a, b, c \in A: e \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ | (prop. associativa di \cdot) |
| 6. $\forall a, b, c \in A: a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ | (prop. distributiva a sinistra di \cdot) |
| 7. $\forall a, b, c \in A: (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ | (prop. distributiva a destra di \cdot) |
| 8. $\exists 1 \in A \ni \forall a \in A: 1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ | (esistenza elemento neutro per \cdot) |

$(A, +, \cdot)$ è un corpo se:

1. $(A, +, \cdot)$ è un anello;
2. Ogni elemento di A è simmetrizzabile per la \cdot , cioè se $\forall a \in A, a \neq 0, \exists a^{-1} \in A \exists' a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = 1$

Campo

$(A, +, \cdot)$ è un campo se:

1. $(A, +, \cdot)$ è un corpo;
2. $\forall a, b \in A: a \times b = b \times a$ (x è commutativa)

Proprietà campo

1. $\forall a \in A: a \times 0 = 0 \times a = 0$;
2. $\forall a, b \in A: (a \times b = 0) \Leftrightarrow (a = 0 \vee b = 0)$ (legge di annullamento di x)

$(M, +, \cdot)$ delle matrici non singolari è un corpo ma non un campo perché non vale la proprietà commutativa per la moltiplicazione.

Spazi vettoriali

Operazione esterna = ogni applicazione su V avente K come dominio degli operatori tale che:

$$\omega: K \times V \rightarrow V \quad \exists' \forall (k, v) \rightarrow v' = \omega(k, v) \in V$$

cioè che ad ogni coppia ordinata di $K \times V$ associa un unico elemento dell'insieme V .

$(V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale se sono verificate le seguenti proprietà:

1. $\forall u, v \in V: u + v = v + u$
2. $\forall u, v, w \in V: u + (v + w) = (u + v) + w$
3. $\exists 0 \in V \exists' \forall v \in V: v + 0 = 0 + v = v$
4. $\forall v \in V, \exists -v \in V \exists' v + (-v) = -v + v = 0$
5. $\forall h, k \in K \wedge \forall v \in V: (h * k) * v = h * (k * v)$ associativa rispetto al prodotto di scalari (legge esterna)
6. $\forall h, k \in K \wedge \forall v \in V: (h + k) * v = h * v + k * v$ distributiva rispetto al prodotto di scalari
7. $\forall h \in K \wedge \forall v, u \in V: h * (u + v) = h * u + h * v$
8. $\forall v \in V: 1_k * v = v$

Proprietà spazi vettoriali

1. $\forall v \in V: 0_k * v = v * 0_k = 0_v$
2. $\forall h \in K: k * 0_v = 0_v$
3. $(h * v = 0_v) \Leftrightarrow (h = 0_k \vee v = 0_v)$ (legge di annullamento del prodotto esterno)
4. $\forall v \in V: (-1_k) * v = -v$ (ottengo il vettore opposto)

Esempi notevoli di spazio vettoriale

1. Insieme V dei vettori geometrici (con somma tra vettori e prodotto per uno scalare);
2. Insieme \mathbb{R} dei numeri reali è uno spazio vettoriale su sé stesso;
3. Insieme \mathbb{R}^n con somma delle componenti e prodotto per uno scalare.
4. Insieme delle matrici di ordine $m * n$;
5. Insieme delle matrici di ordine n ;
6. Insieme $\mathbb{R}^{[n]} [x]$ dei polinomi nell'incognita x a coefficienti reali;
7. Insieme delle $f: I \rightarrow \mathbb{R}$.

(tutti muniti di operazione interna (somma) e operazione esterna (prodotto))

Sottospazio vettoriale = V' è un sottospazio vettoriale di V se è un suo sottoinsieme non vuoto e le operazioni di V , ristrette a V' , sono anch'esse operazioni di V' e verificano le 8 proprietà di uno spazio vettoriale.

$$V' \times V' \rightarrow V' \exists' \forall v'_1, v'_2 \in V': v'_1 + v'_2 \in V'$$

$$K \times V' \rightarrow V' \exists' \forall k \in K \text{ e } \forall v' \in V': k \cdot v' \in V'$$

Teorema fondamentale sottospazio vettoriale

C.N.S. affinché $V' \ll V$, sono:

1. $\forall u, v \in V': u + v \in V'$
2. $\forall k \in K \text{ e } \forall v \in V': k \cdot v \in V'$

La dimostrazione è implicita nella definizione di sottospazio (8 proprietà).

Esempi di sottospazi vettoriali

1. Se 0 è l'elemento neutro per $+$ di $V(K)$, allora $V' = \{0\}$ è sottospazio banale di $V(K)$.
2. V è un sottospazio vettoriale di sé stesso detto sottospazio improprio di $V(K)$.
3. Insieme delle matrici triangolari.
4. Insieme delle matrici diagonali.

Sistemi di vettori linearmente dipendenti/ indipendenti

Combinazione lineare = $h_1 v_1 + h_2 v_2 + \dots + h_n v_n$ con h =scalari (coefficienti) e v =vettori.

Ogni combinazione lineare di elementi di $V(K)$ è ancora elemento di $V(K)$.

Vettori linearmente dipendenti

Si dice che un sistema $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ di vettori di $V(K)$ è un sistema di vettori *linearmente dipendenti* (sistema legato) se:

$$\exists (h_1, h_2, \dots, h_n) \in K^n, (h_1, h_2, \dots, h_n) \neq (0, 0, \dots, 0), \exists' h_1 v_1 + h_2 v_2 + \dots + h_n v_n = 0$$

Vettori linearmente indipendenti

Si dice che un sistema $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ di vettori di $V(K)$ è un sistema di vettori linearmente *indipendenti* (sistema libero) se

$\nexists (h_1, h_2, \dots, h_n) \in K^n, (h_1, h_2, \dots, h_n) \neq (0, 0, \dots, 0), \exists' h_1 v_1 + h_2 v_2 + \dots + h_n v_n = 0$, ovvero, se $h_1 v_1 + h_2 v_2 + \dots + h_n v_n = 0 \Leftrightarrow (h_1 = h_2 = \dots = h_n = 0)$.

Proprietà vettori L.D.

Se $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ è un sistema di n vettori di $V(K)$, allora:

1. Se $0 \in S \Rightarrow S$ è un sistema di vettori L.D.;
2. Se S è un sistema di vettori L.D., allora ogni altro sistema contenente S è L.D.;
3. S è un sistema di vettori L.D. \Leftrightarrow almeno un vettore di S è combinazione lineare dei rimanenti con coefficienti non tutti nulli.

Proprietà vettori L.I.

1. $(S = \{v\}, v \neq 0_V) \Rightarrow (S \text{ è un sistema di vettori L.I. });$
2. $(S \text{ sistema di vettori L.I.}) \Rightarrow (\forall S' \subseteq S: S' \text{ sistema di vettori L.I.});$
3. Se $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ è un sistema di vettori L.I., nessuno dei vettori di S è combinazione lineare dei rimanenti vettori.

Sistemi di generatori di uno spazio vettoriale

Sia $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ un sistema di vettori di $V(K)$ e sia U l'insieme di tutti i vettori di $V(K)$ che sono combinazione lineare degli n vettori di S ,

$$U = \{u \in V(K) | \exists (h_1, h_2, \dots, h_n) \in K^n \exists' u = h_1 v_1 + h_2 v_2 + \dots + h_n v_n\}$$

Si dimostra che U è un sottospazio vettoriale di $V(K)$, $U \subset V(K)$.

Dimostrazione

$$\begin{cases} (1) U \neq \emptyset \\ (2) \forall u, u' \in U: u + u' \in U \\ (3) \forall h \in K \text{ e } \forall u \in U: h \cdot u \in U \end{cases}$$

(svolgi calcoli)

Definizione

Se U è il sottospazio di $V(K)$ formato da tutte le possibili combinazioni lineari di un sistema

$S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ di vettori di $V(K)$, $U = \{u \in V(K) | \exists (h_1, h_2, \dots, h_n) \in K^n \exists' u = h_1 v_1 + h_2 v_2 + \dots + h_n v_n\}$, allora

1. l'insieme U dicesi *sottospazio* di $V(K)$ *generato* da $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$;
2. l'insieme $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dicesi *sistema di generatori* del sottospazio $U(K)$.

Si scrive: $U = \mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \text{Span}(v_1, v_2, \dots, v_n)$.

U si dice *finitamente generato* se il numero di vettori di S è finito.

Basi di uno spazio vettoriale

$S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ è una base dello spazio $V[K]$ se:

1. S è un sistema di generatori per $V(K)$.
2. S è un sistema di vettori L.I.

Si indica con $\mathcal{B}_V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Ogni spazio vettoriale ha almeno una base.

Proprietà delle basi

1. Se $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ è una base di $V(K)$, ogni vettore di $V(K)$ è esprimibile in uno e un solo modo come combinazione lineare degli elementi di B .

2. I coefficienti (h_1, h_2, \dots, h_n) della combinazione lineare si dicono *componenti di v* nella base B e si scrive $v = (h_1, h_2, \dots, h_n)$.
3. Se la base B è ordinata, si dice che B è un riferimento di $V(K)$ e, in tal caso, le componenti di v rispetto alla base ordinata B si dicono coordinate di v nel riferimento B .

Ad esempio, $(e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1))$ dicesi *riferimento canonico* di \mathbb{R}^n .

Se v è un vettore di componenti (x_1, x_2, \dots, x_n) rispetto a una base B di \mathbb{R}^n , allora (x_1, x_2, \dots, x_n) sono anche le coordinate di v rispetto alla base canonica $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ di \mathbb{R}^n :

$$v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n.$$

4. Ogni base di uno spazio vettoriale $V(K)$ è un sistema massimale (insieme più grande di vettori L.I. che si può prendere) di vettori linearmente indipendenti di $V(K)$.

Dimostrazione

Sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base di $V(K) \Leftrightarrow \begin{cases} (1) \mathcal{B} \text{ è un sistema di generatori di } V(K) \\ (2) \mathcal{B} \text{ è un sistema di vettori L.I.} \end{cases}$

Di conseguenza, se v è un ulteriore vettore di $V(K)$,

$\exists (h_1, h_2, \dots, h_n) \in K^n \exists ' v = h_1 v_1 + h_2 v_2 + \dots + h_n v_n \Rightarrow h_1 v_1 + h_2 v_2 + \dots + h_n v_n - v = 0$,
con $(h_1, h_2, \dots, h_n, -1) \neq (0, 0, \dots, 0) \Rightarrow \{v_1, v_2, \dots, v_n, v\}$ sono L.D. e ciò dimostra che n è il massimo numero di vettori L.I. di $V(K)$.

5. Se $V(K)$ è uno spazio finitamente generato, tutte le basi hanno lo stesso numero di vettori.

Dimensione di uno spazio vettoriale

Se $V(K)$ è uno spazio vettoriale finitamente generato, si dice *dimensione* di $V(K)$ il numero n di vettori di una qualunque sua base ovvero il numero massimo di vettori L.I. di $V(K)$.

Mentre ogni base è un sistema di generatori di uno spazio vettoriale, non è detto che un sistema di generatori sia una base dello spazio vettoriale: sarà una base solo se i vettori sono L.I.

Teorema del completamento della base

Se $V(K)$ è uno spazio vettoriale di dimensione n , $\dim V = n$, e se v_1, v_2, \dots, v_r sono $r < n$ vettori linearmente indipendenti di V , esistono $(n - r)$ vettori di $V(K)$, $(v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_n)$, tali che l'insieme $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, \dots, v_r, v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_n\}$ sia una base di $V(K)$.

Proprietà delle dimensioni

Se $V(K)$ è uno spazio vettoriale di dimensione finita e se U è un sottospazio di $V(K)$:

1. U ha dimensione finita ed è $\dim(U) \leq \dim(V)$;
2. $(\dim(U) = \dim(V)) \Leftrightarrow (U = V)$.

Teorema rango e lineare dipendenza/indipendenza

Sia $V(K)$ uno spazio vettoriale di dimensione m e siano (u_1, u_2, \dots, u_n) n vettori di $V(K)$ di componenti rispettivamente

$$u_1 = (x_{11}, x_{21}, \dots, x_{m1}),$$

$$u_2 = (x_{12}, x_{22}, \dots, x_{m2})$$

, ...,

$$u_n = (x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{mn})$$

rispetto a una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ di $V(K)$.

Detta A la matrice avente per **colonne** le componenti dei vettori, si dimostra che:

1. (u_1, u_2, \dots, u_n) sono L.I. se $\text{rang}(A) = n$;
2. (u_1, u_2, \dots, u_n) sono L.D. se $r = \text{rang}(A) < n$;

In tal caso, i vettori L.I. sono solo r e sono quelli che formano il minore estratto che ha determinato il rango di A .

Dimostrazione

Sia $h_1 u_1 + h_2 u_2 + \dots + h_n u_n = 0$, scrivi matrici associate e ragiona con Rouchè-Capelli.

Se il numero n di vettori è maggiore del numero m delle componenti, gli n vettori sono linearmente dipendenti.

Operazioni con i sottospazi

Sottospazio intersezione

$W_1 \cap W_2 = \{v \in V(K) | v \in W_1 \text{ e } v \in W_2\}$ è un sottospazio di $V(K)$.

Sottospazio somma

$W_1 + W_2 = \{v \in V \mid \exists w_1 \in W_1 \text{ e } \exists w_2 \in W_2 \exists' v = w_1 + w_2\}$ è un sottospazio di $V(K)$.

Teorema di Grassmann o delle dimensioni

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$$

Somma diretta tra sottospazi

Si dice che V è somma diretta di w_1 e w_2 se:

1. $V = w_1 + w_2$
2. $w_1 \cap w_2 = 0$

In tal caso si dice che w_1 e w_2 sono sottospazi supplementari di $V(K)$.

Proprietà somma diretta

1. $\forall v \in V, \exists! w_1 \in W_1 \text{ e } \exists! w_2 \in W_2 \exists' v = w_1 + w_2$, cioè ogni vettore di V è esprimibile in uno e un solo modo come somma di vettori di W_1 e W_2 .
2. Se U_1 e U_2 sono due sottospazi vettoriali di $V(K)$ e se $B_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ una base di U_1 e $B_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_s\}$ una base di U_2 , si dimostra che:
 - $B = B_1 \cup B_2 = \{u_1, u_2, \dots, u_r, v_1, v_2, \dots, v_s\}$ è un sistema di generatori dello spazio somma $U = U_1 + U_2$;
 - $(B = B_1 \cup B_2 = \{u_1, u_2, \dots, u_r, v_1, v_2, \dots, v_s\})$ è una base dello spazio vettoriale somma $U = U_1 + U_2 \Leftrightarrow U_1 \cap U_2 = \{0\}$

Cambiamento di base in uno spazio vettoriale

Formule di passaggio

Sia $V(K)$ uno spazio vettoriale di dimensione n e siano $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ e $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$

due basi di $V(K)$. Se $v \in V(K)$ è un vettore di $V(K)$ di componenti (x_1, x_2, \dots, x_n) rispetto alla base \mathcal{B}

e $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ rispetto alla base \mathcal{B}' , si dimostra che:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + \dots + a_{1n}x'_n \\ x_2 = a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + \dots + a_{2n}x'_n \\ \dots \\ x_n = a_{n1}x'_1 + a_{n2}x'_2 + \dots + a_{nn}x'_n \end{cases}$$

 $(a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1})$ sono le componenti di e'_1 rispetto alla base \mathcal{B} ,

$(a_{12}, a_{22}, \dots, a_{n2})$ sono le componenti di e'_2 rispetto alla base B,

...

1. $(a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{nn})$ sono le componenti di e'_n rispetto alla base B.

Forma matriciale (forma compatta)

$$X_T = P \cdot X'_T$$

2. X_T il vettore colonna delle componenti di v nella base B, $X_T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

3. X'_T il vettore colonna delle componenti di v nella base B', $X'_T = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$

4. P la matrice di passaggio avente per colonne le componenti dei vettori della base B' calcolate rispetto alla base B,

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

P è invertibile, essendo non singolare, quindi $X' = P^{-1} \cdot X$ è l'equazione di passaggio dalla base B' alla base B. P^{-1} ha per colonne le componenti dei vettori e_i della base B rispetto alla base B'.

Autovalori, autovettori, autospazi di matrici quadrate reali

Autovalore

$(\lambda \text{ è un autovalore di } A) \Leftrightarrow (\exists X_{n,1} \in \mathcal{M}_{n,1}, X_{n,1} \neq 0_{n,1}, \exists' A \cdot X_{n,1} = \lambda \cdot X_{n,1})$

Il vettore colonna $X_{n,1}$ dicesi autovettore di A relativo all'autovalore λ .

Autovettore

$(X \text{ è un autovettore di } A) \Leftrightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{R} \exists' A \cdot X = \lambda \cdot X)$.

Il numero reale λ dicesi autovalore relativo all'autovettore X.

Proprietà autovalori e autovettori

1. Se A è una matrice quadrata di ordine n e se $X \in \mathcal{M}_{n,1}$ è un autovettore di A, si dimostra che è unico l'autovalore di A relativo ad X.
2. Se A è una matrice quadrata di ordine n e se λ è un autovalore di A, si dimostra che esistono infiniti autovettori di A relativi a λ (dim. Come in analisi per Rouchè-Capelli).

Autospazi

Se A è una matrice di ordine n e se λ è un autovalore di A , si dice autospazio di A relativo a λ , e si indicherà con V_λ , l'insieme

$$V_\lambda = \{X \in \mathcal{M}_{n,1} \mid X = 0 \vee A \cdot X = \lambda \cdot X\}.$$

V_λ è l'insieme formato da tutti gli autovettori associati a λ e dal vettore nullo $0_{n,1}$.

(gli autovettori con stesso autovalore + il vettore nullo formano uno spazio vettoriale, si dimostra con dimostrazione sottospazio vettoriale)

Molteplicità geometrica = dimensione autospazio relativo a λ .

Proprietà

(λ è un autovalore di A) $\Leftrightarrow (\det(A - \lambda \cdot I) = 0)$

(stessa dimostrazione analisi, non ammette solo la soluzione banale quindi $\det(A) \neq 0$)

Polinomio caratteristico $P(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I)$

Equazione caratteristica $P(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I) = 0$

Il numero massimo di autovalori di una matrice di ordine n è n .

Molteplicità algebrica = la molteplicità con la quale l'equazione caratteristica $P(\lambda) = 0$ ammette la soluzione λ .

Proprietà

1. la molteplicità geometrica = $n - \text{rang}(A - \lambda I)$
2. $1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$.
3. Gli autospazi relativi a due λ distinti sono supplementari.
4. Gli autovettori di due autospazi relativi a due autovalori distinti sono l.i..

Proprietà

Se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ sono r autovalori distinti di $A \in \mathcal{M}_n$ e se X_1, X_2, \dots, X_r sono i rispettivi autovettori associati, si dimostra che (X_1, X_2, \dots, X_r) sono r vettori linearmente indipendenti di $\mathcal{M}_{n,1}$.

Matrici simili, matrici diagonalizzabili

Matrici simili

(A è simile a B) $\Leftrightarrow (\exists P \in M_n, \text{ non singolare (invertibile)}, \exists' B = P^{-1} \cdot A \cdot P)$

Proprietà similitudine tra matrici

1. A è simile ad A. (prop. riflessiva)
2. A simile a B \Rightarrow B simile ad A. (prop. simmetrica)
3. A simile a B, B simile a C \Rightarrow A simile a C. (prop. transitiva)

Proprietà delle matrici simili

1. $\text{rang}(A) = \text{rang}(B)$
2. $\det(A) = \det(B)$ (per il teorema di Binet)
3. A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico.
4. A e B hanno stessi autovalori e stessi autospazi.

Matrice diagonalizzabile

Si dice che A è diagonalizzabile se esiste una matrice D diagonale tale che A sia simile a D:

$(A \in M_n \text{ è diagonalizzabile}) \Leftrightarrow (\exists D \in D_n \text{ ed } \exists P \in M_n, \text{ invertibile } \exists' D = P^{-1} \cdot A \cdot P).$

la matrice P dicesi matrice che diagonalizza A. (*matrice diagonalizzante*)

Criteri di diagonalizzazione di una matrice

1. $(A \text{ è diagonalizzabile}) \Leftrightarrow (A \text{ ammette } n \text{ autovettori L.I.})$
(in tal caso P che diagonalizza A ha per colonne gli autovettori L.I. di A e gli elementi della diagonale di D saranno gli autovalori di A)
2. $(A \text{ è diagonalizzabile}) \Leftrightarrow (\dim V_{\lambda_1} + \dim V_{\lambda_2} + \dots + \dim V_{\lambda_k} = n)$ cioè la somma delle dimensioni dei suoi autospazi è uguale all'ordine della matrice.
3. $(A \text{ è diagonalizzabile}) \Leftrightarrow (\text{ammette } n \text{ autovalori distinti})$, e si verifica se:
 - o L'equazione caratteristica ha n radici tutte reali (semplici o multiple)
 - o Ogni autovalore ha molteplicità algebrica uguale a quella geometrica.
4. Ogni matrice simmetrica è diagonalizzabile.

Matrice ortogonalmente diagonalizzabile

Una matrice $A \in M_n$ si dice *ortogonalmente* diagonalizzabile se esiste una matrice ortogonale P che diagonalizza A , cioè se:

$$\exists D \in M_n, \text{ diagonale, ed } \exists P \in M_n, \text{ ortogonale, tale che } D = P^{-1} \cdot A \cdot P.$$

Proprietà

Ogni matrice simmetrica è ortogonalmente diagonalizzabile.

Spazi Euclidei

Prodotto scalare euclideo= ogni applicazione $\times: V \times V \rightarrow R$ che associa

$$\forall (v_1, v_2) \in V \times V \rightarrow v_1 \times v_2 \in R \quad (\text{leggasi } v_1 \text{ scalare } v_2)$$

ed è tale che soddisfa le seguenti condizioni:

- $\forall v_1, v_2 \in V: v_1 \times v_2 = v_2 \times v_1$ (proprietà commutativa del p.s.)
- $\forall v_1, v_2, v_3 \in V: (v_1 + v_2) \times v_3 = v_1 \times v_3 + v_2 \times v_3$ (proprietà distributiva a destra)
- $\forall v_1, v_2 \in V \text{ e } \forall h \in R: (h \cdot v_1) \times v_2 = h \cdot (v_1 \times v_2)$ (proprietà associativa a destra)
- $\forall v \in V: v \times v \geq 0$ (il prodotto scalare è definito positivo)
- $\forall v \in V: v \times v = 0_R \Leftrightarrow v = 0_V$.

Proprietà del prodotto scalare

- $\forall v_1, v_2, v_3 \in V: v_1 \times (v_2 + v_3) = v_1 \times v_2 + v_1 \times v_3$ (proprietà distributività a sinistra)
- $\forall v_1, v_2 \in V \text{ e } \forall h \in R: v_1 \times (h \cdot v_2) = h \cdot (v_1 \times v_2)$ (proprietà associativa a sinistra)
- $\forall v_1 \in V: v_1 \times v_2 = 0_R \Leftrightarrow v_2 = 0_V$.

Spazi euclidei= spazi vettoriali dove è definito il prodotto scalare euclideo. Si indica con

$$(V(R), +, \cdot, \times)$$

- $+$ è una legge di composizione interna su V ,
- \cdot è una legge di composizione esterna su V avente R come dominio degli operatori,
- \times è un prodotto scalare euclideo su V .

Esempi notevoli di spazio euclideo

- Spazio vettoriale dei vettori geometrici con il prodotto scalare: $\vec{u} \times \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vartheta)$
- Spazio vettoriale R^n con il prodotto scalare
 $\forall x, y \in R^n \exists' x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ e } y = (y_1, y_2, \dots, y_n): x \times y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$

Norma= $\|v\| = \sqrt{v \times v}$.

Versore= vettore con norma=1, $ver(v) = \frac{v}{\|v\|}$.

Vettori ortogonali= (v_1 è ortogonale a v_2) $\Leftrightarrow (v_1 \times v_2 = 0)$.

Sistema ortogonale di vettori= spazio euclideo i cui vettori sono a due a due ortogonali. Si dimostra che esso è un sistema di vettori L.I. dello spazio $V(\mathbb{R})$.

Dimostrazione

Moltiplicando scalarmente ambo i membri per v_1 , si ha

$$(h_1 \cdot v_1 + h_2 \cdot v_2 + \dots + h_p \cdot v_p) \times v_1 = 0 \times v_1 \Leftrightarrow h_1 v_1 \times v_1 + h_2 v_2 \times v_1 + \dots + h_p v_p \times v_1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\text{tenendo conto che } v_1 \text{ è ortogonale a } v_2, \dots, v_p) \quad h_1 \cdot \|v_1\|^2 = 0 \Rightarrow (\text{essendo } v_1 \neq 0) \quad h_1 = 0.$$

Dopo il primo passo, la combinazione diventa:

$$h_2 \cdot v_2 + \dots + h_p \cdot v_p = 0$$

Analogamente, moltiplicando scalarmente ambo i membri per v_2 e ripetendo i calcoli, si ottiene $h_2 = 0$.

Reiterando il procedimento, si ottiene: $h_3 = h_4 = \dots = h_p = 0$.

Angolo di due vettori= il numero reale dato da $\vartheta = \arccos\left(\frac{v_1 \times v_2}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|}\right) \Leftrightarrow \cos(\vartheta) = \frac{v_1 \times v_2}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|}$.

Proprietà angolo tra due vettori

1. $\cos(\vartheta) = \cos(\widehat{v_1 v_2}) = \text{vers}(v_1) \times \text{ver}(v_2)$;
2. $v_1 \times v_2 = \|v_1\| \cdot \|v_2\| \cdot \cos(\vartheta)$.

Proiezione ortogonale di V_1 su V_2 = vettore multiplo di V_1 secondo il coefficiente $\frac{v_1 \times v_2}{\|v_1\|^2}$:

$$v_{2v_1} = pr_{v_1}(v_2) = \frac{v_1 \times v_2}{\|v_1\|^2} \cdot v_1.$$

Proiezione di v sul sottospazio U = vettore somma delle proiezioni di v su ciascuna componente della base di U .

$$pr_U(v) = \frac{u_1 \times v}{\|u_1\|} \cdot \text{vers}(u_1) + \frac{u_2 \times v}{\|u_2\|} \cdot \text{vers}(u_2) + \dots + \frac{u_m \times v}{\|u_m\|} \cdot \text{vers}(u_m).$$

Complemento ortogonale di un sottospazio

Se $V(\mathbb{R})$ è uno spazio euclideo e se U è un sottospazio vettoriale di $V(\mathbb{R})$, si dice **complemento ortogonale di U** il sottoinsieme di $V(\mathbb{R})$ così definito:

$$U^\perp = \{v \in V(\mathbb{R}) \mid \forall u \in U: v \perp u\},$$

(ogni vettore di U^\perp è ortogonale a ogni vettore di U)

Si può dimostrare che è un sottospazio vettoriale.

Proprietà complemento ortogonale

1. Se U è il sottospazio di V generato dai vettori (u_1, u_2, \dots, u_p) , $U = \text{Span}(u_1, u_2, \dots, u_p)$,

si dimostra che $(v \in U^\perp) \Leftrightarrow (v \perp u_i, \forall i = 1 \dots p)$

cioè $U^\perp = \{v \in V(R) | \forall u \in U: v \perp u\} = \{v \in V(R) | \forall i = 1, 2, \dots, p: v \perp u_i\}$

2. Se B_U è una base di U , allora il complemento ortogonale di U , U^\perp , è costituito da tutti e soli i vettori ortogonali a ciascun vettore della base B_U .

Base ortogonale = i vettori della base sono a due a due ortogonali.

Base ortonormale = i vettori sono a due a due ortogonali e hanno norma uguale a 1.

1. $\forall i \neq j: e_i \times e_j = 0$,
2. $\forall i = 1 \dots n: \|e_i\|=1 \Leftrightarrow e_i \times e_i = 1$.

Proposizione

Se A è una matrice quadrata di ordine n , le seguenti proposizioni sono equivalenti:

1. A è una matrice ortogonale.
2. I vettori riga di A sono una base ortonormale di \mathbb{R}^n .
3. I vettori colonna di A sono una base ortonormale di \mathbb{R}^n .

Proprietà

1. $\forall v_1, v_2 \in V(\mathbb{R})$, con $v_1 = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $v_2 = (y_1, y_2, \dots, y_n)$: $v_1 \times v_2 = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$;
2. $\forall v \in V(\mathbb{R})$, $v = (x_1, x_2, \dots, x_n)$: $\|v\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$.

Proposizione

Se \mathcal{B} e \mathcal{B}' sono due basi ortonormali dello spazio euclideo $V(\mathbb{R})$, la matrice P di passaggio dalla base \mathcal{B} alla base \mathcal{B}' è una matrice ortogonale ($P_T = P^{-1}$) $\Rightarrow P \cdot P_T = I$.

(si dimostra con la semplice matrice di passaggio)

Metodo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt

Se $V(R)$ è uno spazio vettoriale euclideo e se $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ è una base di $V(R)$, allora

$\exists \mathcal{B}' = \{e_1, e_2, \dots, e_n\} \ni \mathcal{B}'$ sia una base ortonormale di $V(R)$.

Tale base ortonormale \mathcal{B}' , ottenuta a partire da \mathcal{B} , dicesi base ortonormale associata alla base \mathcal{B} di $V(R)$.

Dimostrazione

1. Porre $u_1 = v_1$ e $e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{v_1}{\|v_1\|}$
 u_1 è il primo elemento di una base ortogonale;
 e_1 è il primo elemento della base ortonormale che si vuole calcolare.
2. Porre $u_2 = v_2 + \lambda \cdot e_1$ e si calcola λ in modo tale che $u_2 \perp e_1$.
 Si ha:
 $u_2 \perp e_1 \Rightarrow u_2 \times e_1 = 0 \Leftrightarrow (v_2 + \lambda \cdot e_1) \times e_1 = 0 \Rightarrow v_2 \times e_1 + \lambda \cdot e_1 \times e_1 = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow v_2 \times e_1 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -v_2 \times e_1$.

Sostituendo tale valore di λ in u_2 , si ha:

$$u_2 = v_2 + \lambda \cdot e_1 = v_2 - (v_2 \times e_1) \cdot e_1 = v_2 - \frac{v_2 \times v_1}{\|v_1\|} \cdot \frac{v_1}{\|v_1\|} = v_2 - \frac{v_2 \times v_1}{\|v_1\|^2} \cdot v_1.$$

3. Quindi, si pone

$$e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}.$$

Si osservi che:

- $u_2 \perp u_1$;
- e_2 è un versore ortogonale a e_1 , $e_2 \perp e_1$.

Infatti:

$$u_2 \times u_1 = (v_2 - (v_2 \times e_1) \cdot e_1) \times u_1 = (v_2 - v_2) \times u_1 = 0;$$

$$e_2 \times e_1 = \frac{u_2}{\|u_2\|} \times e_1 = \frac{u_2 \times e_1}{\|u_2\|} = 0, \text{ essendo } u_2 \perp e_1.$$

u_2 , secondo elemento di una base ortogonale, è :

$$u_2 = v_2 - \frac{v_2 \times u_1}{\|u_1\|^2} \cdot u_1$$

e_2 , secondo elemento della base ortonormale che si vuole calcolare, è:

$$e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}.$$

4. Porre

$$u_3 = v_3 + \lambda_1 \cdot e_1 + \lambda_2 \cdot e_2$$

e si calcolano λ_1 e λ_2 in modo tale che

$$u_3 \perp e_1 \text{ ed } u_3 \perp e_2.$$

Imponendo tali condizioni, si ha:

$$\begin{cases} u_3 \times e_1 = 0 \\ u_3 \times e_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (v_3 + \lambda_1 \cdot e_1 + \lambda_2 \cdot e_2) \times e_1 = 0 \\ (v_3 + \lambda_1 \cdot e_1 + \lambda_2 \cdot e_2) \times e_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_3 \times e_1 + \lambda_1 \cdot e_1 \times e_1 + \lambda_2 \cdot e_2 \times e_1 = 0 \\ v_3 \times e_2 + \lambda_1 \cdot e_1 \times e_2 + \lambda_2 \cdot e_2 \times e_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_3 \times e_1 + \lambda_1 = 0 \\ v_3 \times e_2 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -v_3 \times e_1 \\ \lambda_2 = -v_3 \times e_2 \end{cases}$$

Sostituendo tali λ_1 e λ_2 in u_3 , si ha:

$$\begin{aligned} u_3 &= v_3 - (v_3 \times e_1) \cdot e_1 - (v_3 \times e_2) \cdot e_2 = v_3 - \frac{v_3 \times u_1}{\|u_1\|} \cdot \frac{u_1}{\|u_1\|} - \frac{v_3 \times u_2}{\|u_2\|} \cdot \frac{u_2}{\|u_2\|} = \\ &= v_3 - \frac{v_3 \times u_1}{\|u_1\|^2} \cdot u_1 - \frac{v_3 \times u_2}{\|u_2\|^2} \cdot u_2 \Rightarrow u_3 = v_3 - \frac{v_3 \times u_1}{\|u_1\|^2} \cdot u_1 - \frac{v_3 \times u_2}{\|u_2\|^2} \cdot u_2. \end{aligned}$$

Quindi si pone

$$e_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|}.$$

- u_3 è un vettore ortogonale ad u_1 e u_2 ;
- e_3 è un versore ortogonale a e_1 e e_2 .

Quindi:

- u_3 è il terzo elemento di una base ortogonale:

$$u_3 = v_3 - \frac{v_3 \times u_1}{\|u_1\|^2} \cdot u_1 - \frac{v_3 \times u_2}{\|u_2\|^2} \cdot u_2$$

- e_3 è il terzo elemento della base ortonormale che si vuole calcolare:

$$e_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|}$$

- Iterando il procedimento, si calcolano i restanti vettori (u_4, u_5, \dots, u_n) e (e_4, e_5, \dots, e_n).

Formule di ortogonalizzazione di una base

$\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ è una base ortogonale di $V(K)$, dove:

- $u_1 = v_1$;
- $u_2 = v_2 - \frac{v_2 \times u_1}{\|u_1\|^2} \cdot u_1$;
- $u_3 = v_3 - \frac{v_3 \times u_1}{\|u_1\|^2} \cdot u_1 - \frac{v_3 \times u_2}{\|u_2\|^2} \cdot u_2$;
- ...
- $u_n = v_n - \frac{v_n \times u_1}{\|u_1\|^2} \cdot u_1 - \frac{v_n \times u_2}{\|u_2\|^2} \cdot u_2 - \dots - \frac{v_n \times u_{n-1}}{\|u_{n-1}\|^2} \cdot u_{n-1}$.

Formule di normalizzazione di una base

$\mathcal{B}'' = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ è una base ortonormale di $V(K)$, dove:

- $e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$,
- $e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}$,
- ...
- $e_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$.

Teorema

Se V è uno spazio vettoriale euclideo e se U è un sottospazio di V , allora V è somma diretta di U e

$$U^\perp: V = U \oplus U^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} V = U + U^\perp \\ U \cap U^\perp = \{0\} \end{cases}$$

Due sottospazi ortogonali di uno spazio euclideo $V(\mathbb{R})$ sono sempre somma diretta di $V(\mathbb{R})$.

