

## DISPENZA 7- LE CONICHE

### La circonferenza

$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ , se con centro nell'origine  $x^2 + y^2 = r^2$ .

Se  $C(\alpha, \beta)$ :

1.  $\alpha = -\frac{a}{2}$
2.  $\beta = -\frac{b}{2}$
3.  $r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$ .

### Teorema

Se  $\gamma$  è una circonferenza di equazione  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  e se  $t$  è una retta di equazione  $a'x + b'y + c' = 0$ , indicato con  $\Delta$  il discriminante dell'equazione

risolvente il sistema  $\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$ , si dimostra che

1.  $t$  è esterna a  $\gamma \Leftrightarrow \Delta < 0$ ;
2.  $t$  è tangente a  $\gamma \Leftrightarrow \Delta = 0$ ;
3.  $t$  è secante  $\gamma \Leftrightarrow \Delta > 0$ .

### Equazioni parametriche circonferenza

$$\begin{cases} x = \alpha + r \cdot \cos(\vartheta) \\ y = \beta + r \cdot \sin(\vartheta) \end{cases}, \text{ con } 0 \leq \vartheta < 2\pi, \text{ se ha centro in } O: \begin{cases} x = r \cos(\vartheta) \\ y = r \sin(\vartheta) \end{cases}$$

### Fasci di circonferenze

1. Equazione a due parametri:  $\lambda(x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1) + \mu(x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2) = 0$
2. Equazione a un parametro:  $x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 + k(x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2) = 0$

La retta che si ottiene sottraendo membro a membro le equazioni di  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  prende il nome di *asse radicale*. L'equazione dell'asse radicale è:  $(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + (c_1 - c_2) = 0$

### Osservazioni

1. se le due generatrici del fascio sono secanti in due punti A e B, allora tutte le circonferenze del fascio passano per tali *punti base del fascio* e la retta congiungente A e B è l'asse radicale;
2. se le due generatrici del fascio sono tangenti nel punto A, allora tutte le circonferenze del fascio sono tangenti in A e la tangente comune è l'asse radicale;

3. I centri delle infinite circonferenze del fascio generato da  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  appartengono tutti alla retta che congiunge il centro  $C_1$  di  $\gamma_1$  con il centro  $C_2$  di  $\gamma_2$ : per questo, la retta  $C_1C_2$  è detta *retta dei centri del fascio*.

## L'ellisse

### Equazione canonica

È il luogo geometrico dei punti del piano la cui somma delle distanze da due punti fissi, detti fuochi, è costante.

$\mathcal{E} = \{P \in S_2 \mid \overline{PF} + \overline{PF'} = 2a\}$  dove  $F$  ed  $F'$  sono i fuochi e  $2a$  è la distanza costante.

La retta  $FF'$  si dice *asse focale* dell'ellisse, la distanza dei due fuochi,  $FF' = 2c$ , si dice *distanza focale* dell'ellisse, il punto medio  $C$  del segmento  $FF'$  si dice *centro* dell'ellisse.

Assumendo come coordinate dei fuochi  $F(c,0)$  ed  $F'(-c,0)$ , basta usare la definizione di ellisse per calcolare l'equazione canonica:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

### Proprietà geometriche dell'ellisse

1. È simmetrica rispetto all'asse  $x$ ,  $y$  e rispetto all'origine.
2. Ha un centro di simmetria quindi è detta *conica a centro*.
3. I vertici dell'ellisse sono i punti in cui l'ellisse interseca gli assi di simmetria.
4. È tutta compresa nella striscia di piano delimitata da  $x=a$ ,  $x=-a$ ,  $y=b$  e  $y=-b$ .

L'asse contenente i fuochi è detto *asse principale* dell'ellisse, o *focale*.

L'eccentricità è il rapporto tra la semidistanza focale  $c$  e la lunghezza del semiasse maggiore, ossia

$$e = \frac{c}{a}$$

La retta  $x = \frac{a^2}{c}$  dicesi *direttrice* dell'ellisse associata al fuoco  $F(C;0)$ .

L'ellisse è il luogo del piano le cui distanze da ciascun fuoco e dalla relativa direttrice hanno rapporto costante e uguale all'eccentricità:  $\frac{d(P,F)}{d(P,d)} = e$ .

### Equazioni parametriche

$\begin{cases} x = a \cdot \cos(\varphi) \\ y = b \cdot \sin(\varphi) \end{cases}$ , con  $0 \leq \varphi < 2\pi$ , dove  $a$  e  $b$  sono le misure dei semiassi dell'ellisse.

## L'iperbole

### Equazione canonica

Punti del piano le cui distanze da due punti fissi, detti fuochi, hanno una differenza, in valore assoluto, costante.

$$\mathcal{I} = \{P \in S_2 \mid |\overline{PF} - \overline{PF'}| = 2a\}$$

e ponendo  $F(c,0)$  e  $F'(-c,0)$ , dopo aver svolto i calcoli, si ottiene l'equazione canonica dell'iperbole.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

### Proprietà geometriche dell'iperbole

1. È simmetrica rispetto all'asse  $x$ ,  $y$  e rispetto all'origine.
2. Ha un centro di simmetria quindi è detta *conica a centro*.
3. Gli assi di simmetria sono gli assi dell'iperbole.
4. poiché l'asse  $x$  interseca l'iperbole nei punti  $A(a,0)$  e  $A'(-a,0)$ , l'asse  $x$  si dice *asse trasverso dell'iperbole*. I due punti  $A$  e  $A'$  si dicono *vertici reali* dell'iperbole e la loro distanza  $\overline{AA'} = 2a$  si dice *misura dell'asse trasverso*.
5. l'asse  $y$  non ha intersezioni con l'iperbole, tale asse si dice *asse non trasverso* dell'iperbole. I punti  $B(0,b)$  e  $B'(0,-b)$  di tale asse si dicono *vertici non reali* dell'iperbole e la loro distanza  $\overline{BB'} = 2b$  si dice *misura dell'asse non trasverso*.
6. l'iperbole è contenuta dalla striscia individuata dalle rette  $x = -a$  e  $x = a$ .

L'equazione  $y = \pm \frac{b}{a}x$  sono gli *asintoti dell'iperbole* e sono le diagonali del rettangolo delimitato da  $x = \pm a \wedge y = \pm b$ .

### Equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = a \cdot \cosh(\vartheta) \\ y = b \cdot \sinh(\vartheta) \end{cases}, \text{ con } 0 \leq \vartheta < 2\pi, a \text{ e } b \text{ sono i semiassi trasverso e non trasverso dell'iperbole.}$$

L'eccentricità è data dal rapporto tra la distanza focale  $c$  e la lunghezza del semiasse trasverso  $a$ .

$$x = \frac{a^2}{c}, \text{ dicesi direttrice dell'iperbole associata al fuoco } F(c,0).$$

L'iperbole è il luogo geometrico dei punti del piano le cui distanze da ciascun fuoco e dalla relativa direttrice hanno rapporto costante uguale all'eccentricità:

$$\frac{d(P, F)}{d(P, d)} = e, \quad \text{con } e > 1.$$

## La parabola

### Equazione canonica

Punti del piano aventi uguale distanza da un punto fisso F, detto fuoco, e da una retta fissa d, detta direttrice:

$$\wp = \{P \in \pi \mid d(P, F) = d(P, d)\}$$

Il rapporto costante

$$e = \frac{d(P, F)}{d(P, d)} = 1$$

dicesi eccentricità della parabola.

La retta passante per F perpendicolare alla direttrice d dicesi asse della parabola, il punto V dell'asse, equidistante dal fuoco e dalla direttrice, dicesi vertice della parabola.

Se indichiamo con p la distanza del fuoco F dalla direttrice e poniamo il vertice nell'origine, come asse delle ascisse (x) l'asse della parabola e come asse delle ordinate (y) la retta per il vertice V parallela alla direttrice d.

In tale riferimento il fuoco F ha coordinate  $(\frac{p}{2}, 0)$  e la direttrice ha equazione  $x = -\frac{p}{2}$ .

Si ha:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right| \Rightarrow x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4} \Rightarrow y^2 = 2px.$$

### Proprietà geometriche della parabola

1. la parabola non ha un centro di simmetria, quindi è una *conica non a centro*.

### Equazione generale di una conica – classificazione e calcolo dell'eq. canonica

L'equazione più generale che si ottiene è un'equazione del tipo

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

Se indichiamo con

$$\varphi(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

il complesso dei termini di 2° grado dell'equazione generale, l'equazione della conica può scriversi

$$f(x, y) = \varphi(x, y) + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

Se poniamo

$$\varphi(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

$\varphi(x, y)$  dicesi forma quadratica associata alla conica.

Ad ogni conica sono associate due matrici:

1.  $A^{00} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$  (matrice associata alla forma quadratica della conica)
2.  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$  (matrice completa della conica)

### Teorema

1. Classificazione della specie:

- $C$  è un'ellisse se  $\det(A^{00}) > 0$ ;
- $C$  è una parabola se  $\det(A^{00}) = 0$ ;
- $C$  è un'iperbole se  $\det(A^{00}) < 0$ .

2. Classificazione del genere:

- $C$  è non degenera se

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0;$$

- $C$  è degenera, cioè formata da un punto, da due rette distinte o da due rette coincidenti, se

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

### Riduzione dell'equazione di una conica alla forma canonica

#### Metodo della rotazione e del completamento dei quadrati

1. Calcola gli autovalori della matrice  $A^{00}$ ;
2. Calcola due autovettori L.I. associati alla matrice  $A^{00}$ ;
3. Si normalizzano i due autovettori associati alla matrice  $A^{00}$ , ottenendo una base ortonormale del piano  $S_2$ : tale base  $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2\} = \{\vec{i}', \vec{j}'\}$  determina un nuovo sistema di riferimento cartesiano,  $RC(O, i', j')$ , ruotato rispetto al vecchio riferimento  $RC(O, i, j)$ , in cui la conica avrà una nuova equazione che mancherà del termine rettangolare  $x \cdot y$ .
4. Le formule del cambiamento di base sono  $X = R \cdot X'$  dove  $R$  è la matrice avente per colonne le componenti dei vettori della base  $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2\} = \{\vec{i}', \vec{j}'\}$  rispetto alla base  $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ .

5. Sostituendo le equazioni fornite da  $X = R \cdot X'$  nell'equazione iniziale della conica si ottiene l'equazione della conica  $\mathbb{C}$  nel nuovo sistema di riferimento  $RC(O',x',y')$  che ha la stessa origine del riferimento  $RC(O,x,y)$  ma che è ruotato rispetto ad esso.

6. La conica avrà, in tale riferimento, un'equazione che mancherà del termine  $xy$ ,

$$\mathbb{C}: a'x'^2 + b'y'^2 + c'x' + d'y' + e' = 0.$$

7. Si applica il *metodo del completamento del quadrato* per ottenere l'origine  $O''$  del nuovo riferimento (centro/vertice della conica).

8. Si scrivono le equazioni della traslazione che portano l'origine nel centro/vertice  $O''$  della conica

$$\begin{cases} x' = x'' + b_1 \\ y' = y'' + b_2 \end{cases}$$

9. Sostituendo tali relazioni nell'equazione precedente, si ottiene una delle equazioni canoniche.