DISPENSA 2 (MATRICI/DETERMINANTI/SISTEMI LINEARI)

Proprietà matrici trasposte

1. $(A_T)_T = A$
2. A è simmetrica ⇔ A=A_T
3. A è antisimmetrica ⇔ A= -A_T
4. I=I_T (la matrice unità coincide con la sua trasposta).

Matrici dello stesso tipo= matrici con stesso numero di righe e colonne.

Proprietà prodotto matrice per uno scalare

1. $h \cdot (k \cdot A) = (h \cdot k) \cdot A$ (prop. associativa del prodotto per uno scalare)
2. $(h + k) \cdot A = h \cdot A + k \cdot A$ (prop. distributiva prodotto rispetto alla somma di scalari)
3. $h \cdot (A + B) = h \cdot A + h \cdot B$ (prop. distributiva prodotto rispetto alla somma di matrici)

Matrice prodotto righe per colonne

Il numero delle righe della prima matrice deve essere uguale a quello delle colonne della seconda.

Non vale proprietà commutativa e legge di annullamento del prodotto.

Matrici permutabili = $A \times B = B \times A$

Potenza m-esima di una matrice = $A \times A \times \ldots A$ (m volte)

Proprietà matrici quadrate

1. $A + B = B + A$ (prop. commutativa dell'addizione)
2. $(A + B) + C = (A + C) + B$ (prop. associativa dell'addizione)
3. $A + 0 = 0 + A = A$ con 0=matrice nulla (esistenza elemento neutro per l'addizione)
4. $A + A' = A' + A = 0$ con A'=matrice opposta (esistenza elemento simmetrico per l'addizione)
5. $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ (prop. associativa per la moltiplicazione)
6. $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ (prop. distributiva a sinistra della moltiplicazione)
7. $(B + C) \times A = B \times A + C \times A$ (prop. distributiva a destra della moltiplicazione)
8. $A \times I = I \times A = A$ con I=matrice identica (esistenza elemento neutro per la moltiplicazione)

$$B = C \Rightarrow \begin{cases} A \times B = A \times C \\ B \times A = C \times A \end{cases}$$

(non vale l'implicazione inversa, quindi per le matrici non vale la legge della semplificazione)

Proprietà matrici trasposte

1. $(A + B)_T = A_T + B_T$
2. $(k \cdot A)_T = k \cdot A_T$ con k scalare
3. $(A \times B)_T = B_T \times A_T$ con A e B matrici quadrate

Matrice invertibile

Una matrice quadrata si dice invertibile se esiste una matrice A' tale che:

$$A \times A' = A' \times A = I_n$$

la matrice A' prende il nome di matrice inversa e si denota con A^{-1}, essa è unica.

Proprietà matrici invertibili

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(A_T)^{-1} = (A^{-1})_T$
3. $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$

4. $I_n^{-1} = I_n$

Determinante matrici quadrate

1. Se A è una matrice quadrata di ordine 1, allora si pone il determinante uguale all'unico elemento della matrice.
2. Se A è una matrice quadrata di ordine 2, allora si pone

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad |A| = a_{11} * a_{22} - a_{21} * a_{12}$$

3. Se A è una matrice quadrata di ordine superiore, bisogna dare ulteriori definizioni.

Minore complementare

Il minore complementare associato all'elemento a_{ij} è il determinante che si ottiene sopprimendo nella matrice A la riga *i* e la colonna *j*. Si indica con A_{ij}.

Complemento algebrico

Il complemento algebrico associato all'elemento a_{ij} è il numero:

$$(-1)^{i+j} \cdot A_{ij}$$

Sviluppo di Laplace per calcolare il determinante di una matrice quadrata di ordine qualunque

Il determinante di una matrice quadrata di ordine qualunque è dato dalla somma dei prodotti degli elementi di una qualsiasi riga (o colonna) per i rispettivi complementi algebrici.

Matrice singolare= matrice con det(A)=0.

Matrice non singolare= matrice con det(A)$\neq 0$.

Proprietà del determinante

1. Il determinante è nullo se tutti gli elementi di una riga o di una colonna sono nulli.
2. Il determinante è nullo se due righe o colonne sono uguali.
3. Il determinante è nullo se due righe o colonne sono proporzionali.
4. Il determinante è nullo se una riga o colonna è combinazione lineare di altre due righe o colonne.
5. Il determinante di I_n è 1.
6. Il determinante di una matrice triangolare o diagonale è uguale al prodotto degli elementi della diagonale principale
7. Se aggiungiamo a una riga o colonna gli elementi di un'altra riga o colonna moltiplicati per una costante, il determinante non cambia valore. (riduzione di Gauss)
8. Scambiando di posto due righe o due colonne il determinante cambia segno. (riduzione di Gauss)
9. Se moltiplichiamo o dividiamo gli elementi di una riga o colonna per un numero, il determinante risulta moltiplicato\diviso per quel numero.

Altre proprietà del determinante

1. det(A)=det(A_T)
2. det($A \times B$)=det(A)×det(B) (teorema di Binet)
3. det(A^{-1})=1/det(A)

Teorema

Condizione necessaria è sufficiente affinché una matrice sia invertibile è che essa sia non singolare.

Matrice ortogonale=matrice invertibile la cui inversa coincide con la trasposta.

Proprietà matrici ortogonali

1. il loro determinante è ± 1
2. la loro trasposta è ortogonale
3. la loro inversa è ortogonale
4. $A \times B$ è ancora ortogonale

5. Condizione necessaria e sufficiente affinché una matrice sia ortogonale è che
   - La somma dei quadrati di ogni riga o colonna sia uguale a 1
   - La somma dei prodotti degli elementi corrispondenti di due colonne/righe distinte sia uguale a zero.

Matrice aggiunta= matrice indicata con A^+ i cui elementi sono i complementi algebrici di A.

Teorema

La matrice inversa di A è

$$A^{-1} = \frac{A^{T^+}}{|A|}$$

Dimostrazione (C.N.)

Dimostriamo che se A è invertibile allora det(A)≠0

det$(A^{-1} \cdot A)$ =det(I)=1 $\neq 0$

Dimostrazione (C.S.)

Calcola la matrice aggiunta di una generica matrice 2x2, fanne la trasposta.

Posto $A^{-1} = \frac{A^{T^+}}{|A|}$, verifica che $\begin{cases} A \times A' = I \\ A' \times A = I \end{cases}$.

Minore estratto di ordine r =determinante calcolato con *r* righe e *r* colonne di A.

Rango (o caratteristica) di una matrice = massimo ordine r fra i minori estratti $\neq 0$.

Rang(A)=r significa che

1. Esiste almeno un minore estratto di ordine r $\neq 0$.
2. Ogni minore estratto di ordine >r è =0.

Per calcolare il rango di una matrice si usa il metodo degli orlati o di Kronecker.

Proprietà del rango

1. rang(I_n)=n , rang(0)=0
2. rang(A)=rang(A_T)
3. rang(A)=rang(A^{-1})
4. rang($A \times B$)$\leq \begin{cases} rang(A) \\ rang(B) \end{cases}$ (per matrici rettangolari)
5. il rango di una matrice non cambia se viene moltiplicata a destra o a sinistra per una matrice non singolare.

Sistemi di equazioni lineari

Se indichiamo con A la matrice dei coefficienti, con X il vettore colonna delle incognite e con B il vettore colonna dei termini noti, ogni sistema lineare si può indicare nella forma compatta (forma matriciale del sistema):

$$A \cdot X = B$$

Dicesi soluzione del sistema ogni n-pla di numeri che soddisfa tutte le equazioni del sistema.

Classificazione dei sistemi lineari

Compatibile = ammette soluzioni;

Incompatibile =non ha soluzioni;

Determinato=unica soluzione;

Indeterminato=infinite soluzioni;

Omogeneo = tutti i termini noti sono nulli; è sempre compatibile perché ammette almeno la soluzione banale (0,0,0…0)

Non omogeneo = qualcuno dei termini noti è $\neq 0$.

Teorema di Rouchè-Capelli

1. Il sistema è compatibile se rang(A)=rang(A')=r, e in tal caso ammette ∞^{n-r} soluzioni, dove n è il numero delle incognite. Se n=r la soluzione è unica e il sistema è determinato.
2. Se rang(A)<rang(A') il sistema è incompatibile.

Sistema di Cramer

Un sistema lineare si dice di Cramer se:

1. Il numero delle equazioni è = al numero delle incognite (m=n);
2. det(A)≠0.

Teorema di Cramer

Se un sistema è un sistema di Cramer, allora è determinato e l'unica soluzione è data da:

$$x_j = \frac{\det(A, a_{ij}, B)}{\det(A)}$$

Dove il numeratore è il det. Che si ottiene sostituendo nella matrice A la colonna j con la colonna dei termini noti B.

Teorema

Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema lineare omogeneo di n equazioni in n incognite ammetta soluzioni non banali è che det(A)=0.

Dimostrazione (conseguenza di Rouchè-Capelli)

det(A)=0, r=rang(A)<n.

Essendo l'ultima colonna della matrice A' un vettore nullo, rang(A)=rang(A'), quindi il sistema è compatibile e ammette ∞^{n-r} soluzioni non banali (autosoluzioni).