Teoremi con dimostrazione

Teoremi di media difficoltà:

1)Ogni soluzione di un sistema lineare compatibile si ottiene sommando una fissata soluzione del sistema con una soluzione del sistema omogeneo associato.

2) Se ad un sistema applico delle trasformazioni elementari sulle equazioni, ottengo un sistema ad esso equivalente.

3)Teorema di Rouché – Capelli.

5) Metodo di Cramer per risolvere i sistemi quadrati.

4) Secondo Teorema di Laplace.

5)Come cambia il determinante di una matrice se effettuo delle operazioni elementari sulle sue righe o colonne.

6) Ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette una base.

7)Le soluzioni di un sistema lineare omogeneo in n incognite formano un sottospazio di R^n. Sua dimensione.

8)Effettuando operazioni elementari sui generatori di un sottospazio di R^n, ottengo dei vettori che generano lo stesso sottospazio.

9)Sia f:V → W un'applicazione lineare. Dim V= dim Ker f + dim Imf. Kerf e Im f sono sottospazi di V e W rispettivamente.

10) Se una funzione lineare f è iniettiva, trasforma insiemi indipendenti in insiemi indipendenti.

11) Una funzione lineare f è iniettiva se e solo se Ker f={0}.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

12)Condizione necessaria e sufficiente affinché una matrice quadrata sia diagonalizzabile.

13) Due matrici simili hanno lo stesso determinante, rango, polinomio caratteristico e rappresentano lo stesso endomorfismo.

14) Se U è un sottospazio di R^n, dim $U^{\perp}$=n-dim U e R^n=U+ $U^{\perp}$.

15) Caratterizzazione delle matrici ortogonali: P=P^T se e solo se le righe e le colonne di P formano una base ortonormale di R^n.

15)Un insieme di vettori a due a due ortogonali che non contiene lo 0 è indipendente.

16)Componenti di un vettore rispetto ad una base ortonormale.

Teoremi difficili

1)Lemma di Steinitz.

2)Formula di Grassmann.

3)Autovettori associati ad autovalori distinti sono indipendenti. L'unione di insiemi indipendenti contenuti in autospazi distinti è un insieme indipendente.

5)Procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt.

6)Classificazione delle coniche col metodo degli invarianti.

th: sommare ad un'equazione un multiplo di un'altra fa ottenere un sistema equivalente

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \end{cases}$$

$n-2$ equazioni

Eseguiamo le trasformazioni aggiungendo alla 2^a equazione un multiplo della 1^a ottenendo il seguente sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{2n}x_n + \\ + h(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{1n}x_n) = b_2 + hb_1 \\ \ldots \end{cases}$$

$n-2$ equazioni

1)Ogni soluzione di un sistema lineare compatibile si ottiene sommando una fissata soluzione del sistema con una soluzione del sistema omogeneo associato.

Enunciato:

Ogni soluzione del sistema $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ (se é risolubile) si può scrivere come $c_0 + c_1$ dove $\underline{c_0}$ é soluzione del sistema omogeneo associato e c_1 é una soluzione del sistema $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$. C_1 é detta soluzione particolare.

$A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ avrà una o infinite soluzioni, perché le sue soluzioni dipendono da quelle del sistema omogeneo associato, che sono appunto una o infinite.

Dimostrazione

th: $c_1 + c_0$ é soluzione di $A\underline{x} = \underline{b}$

ip: c_1 é soluzione di $A\underline{x} = \underline{b}$ e $\underline{c_0}$ é soluzione di $A\underline{x} = \underline{0}$ (sistema omogeneo associato).

$$A \cdot (\underline{c_1} + \underline{c_0}) = A\underline{c_1} + A\,\underline{c_0} = \underline{b} + \underline{0} = \underline{b}$$

Se prendo $\underline{c_2}$ soluzione del sistema $A\underline{c_2} = \underline{b}$ allora $A(\underline{c_2} - \underline{c_1}) = A\underline{c_2} - A\underline{c_1} = \underline{b} - \underline{b} = \underline{0}$

$c_2 - c_1$ é soluzione di $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$ quindi $\underline{c_2} - \underline{c_1} = \underline{c_0}$ quindi $c_2 = c_1 + c_0$ quindi ogni soluzione é del tipo $c_0 + c_1$.

2) Se ad un sistema applico delle trasformazioni elementari sulle equazioni, ottengo un sistema ad esso equivalente.

Enunciato

Se ad un sistema applico le trasformazioni elementari ottengo un sistema a esso equivalente

Dimostrazione

th: Se moltiplico un'equazione per un $h \in \mathbb{R}$ con $h \neq 0$ ottengo un sistema equivalente.

$A \underline{x} = \underline{b}$

$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{1n} x_n = b_1$

moltiplica entrambi i lati per $h \neq 0$

$h(a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{1n} x_n) = b_1 h$

perché posso semplificare e tornare all'equazione iniziale

dato che data una soluzione, ogni suo multiplo sarà soluzione dello stesso sistema, allora $b_1 h$ sarà soluzione del sistema di partenza dato che $(a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{1n} x_n)$ é uguale a b_1 sostituisco

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{2n} x_n + \cancel{h b_1} = b_2 + \cancel{h b_1}$$

ottengo un sistema equivalente a quello iniziale

5)Come cambia il determinante di una matrice se effettuo delle operazioni elementari sulle sue righe o colonne.

1 Sia B la matrice che si ottiene da A scambiando due righe, allora $\det B = -\det A$.
Se effettuo K scambi allora $\det B = (-1)^K \det A$ dove K è il numero di scambi.

Dim. induzione

per $n=2$

$$A \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{scambio le righe:}} B \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}$$

scrivo det A e det B

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$$\det B = a_{21} \cdot a_{12} - a_{22} \cdot a_{11} = -\det A$$

Supponiamo vero per $n-1$ e dimostriamolo per $n \geq 3$. Sia B la matrice ottenuta scambiando

(2) Sia B una matrice che si ottiene da A moltiplicando una riga per uno scalare $h \neq 0$ allora $\det B = h \det A$. Quindi se $B = hA$, allora ho moltiplicato tutte le righe di A per h $\det B = h^n \det A$ dove n é il numero di righe di A

dim:

se sviluppo per la riga i che é stata moltiplicata per h ho $b_{ij} = h a_{ij}$

$$\det B = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} b_{ij} B_{ij} = \sum_{j=1}^{n} h a_{ij} A_{ij} =$$

$$= h \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = h \det A$$

$B_{ij} = A_{ij}$ poiché é il determinante di una sottomatrice di A che non é stata cambiata.

(3) Sia B ottenuta da A aggiungendo ad una riga il multiplo di un'altra allora $\det B = \det A$.

dim (per induzione)

due righe.

Sviluppiamo il determinante di B rispetto a una riga i-esima, diversa dalle due scambiate

$$\det B = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \, b_{ij} B_{ij} =$$

$$= (-1)^{i+1} b_{i,1} B_{i,1} + \dots\dots + (-1)^{i+n} b_{i,n} B_{i,n}$$

Dato che per ipotesi la i-esima riga non è stata scambiata allora $a_{ij} = b_{ij} \quad \forall j = 1, \dots, n$

B_{ij} é il determinante di una matrice di ordine $n-1$ in cui sono state scambiate due righe, (poiché non avremo la riga i che non è stata scambiata)

Dato che per le matrici $n-1$ si ha che $B_{ij} = -A_{ij}$ $\forall j = 1, \dots, n$

$$\det B = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} B_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} b_{ij} (-A_{ij}) =$$

$$- \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij} = - \det A$$

per $n=2$ $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\quad 2^a + (h) 1^a$

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + h a_{11} & a_{22} + h a_{12} \end{pmatrix}$$

$$\det B = a_{11}(a_{22} + h a_{12}) - a_{12}(a_{21} + h a_{11}) =$$

$$= a_{11} a_{22} \cancel{+ h a_{12} a_{11}} - a_{12} a_{21} \cancel{- h a_{11} a_{12}} =$$

$$= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = \det A$$

quindi $\det B = \det A$

Supponiamo che sia vero per $n-1$ e dimostriamo per n.

$$\det B = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} b_{ij} B_{ij}$$

Se sviluppiamo il determinante per una riga non cambiata allora $b_{ij} = a_{ij}$

$$\det B = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} b_{ij} B_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} B_{ij}$$

Sviluppiamo il det B rispetto alla h-esima riga

$$\det B = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{h+j} b_{hj} B_{hj} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{h+j} a_{ij} A_{hj} = 0$$

$b_{hj} = a_{ij} \quad \forall j = 1, 2, 3, \dots, n$

$B_{hj} = A_{hj}$ poiché le righe di B diverse dalla h-esima sono uguali a quelle di A

B_{ij} è il determinante di una matrice di ordine $n-1$ che si ottiene da una sottomatrice di A aggiungendo a una riga un multiplo di un'altra $\Rightarrow$ $B_{ij} = A_{ij}$

$$\det B = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} b_{ij} B_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} B_{ij} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij} = \det A$$

quindi $\det B = \det A$

5) Metodo di Cramer per risolvere i sistemi quadrati.

def: Considerando i sistemi lineari della forma $Ax = B$, dove A é una matrice quadrata $n \times n$ i valori delle incognite x_j con $j = 1, \dots, n$ sono dati da $x_j = \frac{\det B_j}{\det A}$ dove B_j si ottiene sostituendo in A la colonna dei termini noti alla colonna j-esima.

dim:

Ip: supponiamo che il sistema ha un'unica soluzione e quindi $\det A \neq 0$.

Allora esiste A^{-1}, la matrice inversa di A.

$$A \cdot X = B$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} B$$

attenzione a moltiplicare a sx di tutti e due i termini A^{-1}

$$I_n \cdot X = A^{-1} B$$

$$X = A^{-1} B$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{j1} & \cdots & c_{jn} \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

dove $A^{-1} = (c_{ij})$

4) Secondo Teorema di Laplace.

Def. Afferma che é sempre nulla la somma dei prodotti di una riga (o colonna) per i complementi algebrici di un'altra riga o colonna della matrice stessa.

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} A_{hj} = 0$$

con $h \neq i$ (tra le componenti dell'i-esima riga e i minori complementari della h-esima riga) per le colonne).

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ih} = 0 \quad \text{con } h \neq j$$

tra le componenti della j-esima colonna e i minori complementari della h-esima colonna.

Dim:

B = matrice che si ottiene da A sostituendo alla h-esima riga l'i-esima.

B avrà due righe uguali e quindi $\det B = 0$

6) Ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette una base.

def: Uno spazio $V \neq \{0\}$ finitamente generato ammette sempre una base

dim:

Ip: S é un insieme finito di generatori

Se S é indipendente allora S é una base
Se S é dipendente $\exists$ un generatore che é combinazione lineare degli altri, allora esso é un generatore non essenziale e lo posso rimuovere ottenendo S'.
Se S' é indipendente allora S é una base.
Se S' é ancora dipendente posso rimuovere un generatore non essenziale da S'.
Dopo un numero finito di passi, ottengo una base $B \subseteq S$
B é l'insieme di tutti i generatori essenziali

8)Effettuando operazioni elementari sui generatori di un sottospazio di R^ n, ottengo dei vettori che generano lo stesso sottospazio.

applichiamo le trasformazioni lineari

Def: $\langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle = \langle w_1, w_2, \dots, w_m \rangle$

Lo spazio generato dal 1° insieme é uguale allo spazio generato dal 2°.

dim:

1. cambiare l'ordine dei vettori ⇒ é ovvio

2. moltiplicare un vettore per un $h \neq 0$

$w_1 = h v_1 \quad \{w_1, w_2, \dots, w_n\} = \{h v_1, v_2, \dots, v_m\}$

$\langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle \subseteq \langle h v_1, v_2, \dots, v_m \rangle$

$v_2, \dots, v_n$ sono in comune

$v_1 = h^{-1}(h v_1)$

quindi $v_1 \in \langle h v_1, v_2, \dots, v_m \rangle$

$$c_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det A}$$ dove A_{ji} è la matrice dei cofattori trasposta.

Sviluppo il prodotto $A^{-1} \cdot B$

$$x_j = (c_{j1}, c_{j2}, \dots, c_{jn}) \cdot B =$$
$$= c_{j1} \cdot b_1 + c_{j2} b_2 + \dots + c_{jn} b_n =$$
$$= \frac{b_1 \cdot A_{1j} + b_2 A_{2j} + \dots + b_n A_{nj}}{\det A}$$

se sviluppo il det B_j rispetto alla j-esima colonna ottengo che $\frac{b_1 \cdot A_{1j} + b_2 A_{2j} + \dots + b_n A_{nj}}{\det A} = \frac{\det B_j}{\det A}$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari
www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

poiché l'uno é contenuto nell'altro allora

$$\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle = \langle v_1 + h v_2, v_2, \ldots, v_m \rangle$$

viceversa $hv_1 \in \langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle$

$\langle hv_1, v_2, \dots, v_m \rangle \subseteq \langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle$

poiche un insieme contiene l'altro

$\langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle = \langle hv_1, v_2, \dots, v_m \rangle$

3 sommare ad un vettore il multiplo di un altro

th: $\{w_1, w_2, \dots, w_n\} = \{v_1 + hv_2, v_2, \dots, v_m\}$

considero $\langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle$ e $\langle v_1 + hv_2, v_2, \dots, v_m \rangle$

in cui $v_2, \dots, v_m$ sono in comune

$v_1 + hv_2 \in \langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle$

$\langle v_1 + hv_2, v_2, \dots, v_m \rangle \subseteq \langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle$

$v_1 = (v_1 + hv_2) - h(v_2) \Rightarrow v_1 \in \langle v_1 + hv_2, v_2, \dots, v_m \rangle$

$\langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle \subseteq \langle v_1 + hv_2, v_2, \dots, v_m \rangle$

$v+w = h_1 v_1 + \dots + h_n v_n + K_1 w_1 + \dots + K_m w_m$

v é combinazione lineare di elementi di B

Devo dimostrare che B é una base per lo spazio somma

B é indipendente?

$h_1 v_1 + h_2 v_2 + \dots + h_n v_n + K_1 w_1 + K_2 w_2 + \dots + K_m w_m = \underline{0}$

$$\underbrace{h_1 v_1 + h_2 v_2 + \dots + h_n v_n}_{\in U} = \underbrace{-K_1 w_1 + K_2 w_2 + \dots + K_m w_m}_{\in W}$$

$\in U \cap W$

ma $U \cap W = \{\underline{0}\}$

$h_1 v_1 + \dots + h_n v_n = \underline{0}$ e $K_1 w_1 + \dots + K_m w_m = \underline{0}$

$\downarrow$ $\downarrow$

B_U é una base per U — é indipendente — $h_i = 0 \ \forall i$

B_W é una base di W — é indipendente — $K_i = 0 \ \forall i$

B é indipendente $\Rightarrow$ B é una base per $U+W$

$\dim U+W = |B| = |B_U \cup B_W| = |B_U| + |B_W|$

$\dim U+W = \dim U + \dim W$ $(- B_U \cap B_W)$

no perché $= \emptyset$

quindi $B_U \cap B_W = \emptyset$ e poiché non hanno vettori in comune allora $B_U \cup B_W$ da una base

2. Sia $\dim U \cap W > 0$ allora $\exists$ una base per $U \cap W$

$B_{U\cap W} = \{v_1, \dots, v_t\}$

$B_{U\cap W}$ é un insieme contenuto in U e in W.
Lo posso completare a una o 2 basi:

- Base di U $B_U = \{v_1, \dots, v_t, u_{t+1}, \dots, u_n\}$
- Base di W $B_W = \{v_1, \dots, v_t, w_{t+1}, \dots, w_m\}$

$B = \{ v_1, v_2, \dots, v_t, v_{t+1}, \dots, v_n, w_{t+1}, \dots, w_m \}$

Dobbiamo dimostrare che B é una base per lo spazio somma.

$v \in U+W \Rightarrow v = u + w \quad \underbrace{u \in U}_{\text{combinazione lineare di } B_U} \; e \; \underbrace{w \in W}_{\text{comb. lineare di } B_W}$

$\Rightarrow v$ é combinazione lineare di $\overbrace{B_U \cup B_W}^{B} \Rightarrow v$ é comb lin. di B

quindi B é un insieme di generatori di $U+W$

$h_1 v_1 + \dots + h_t v_t + h_{t+1} u_{t+1} + \dots + h_n u_n + K_{t+1} w_{t+1} + \dots$

$\dots + K_m w_m = \underline{0}$

$\underbrace{h_1 v_1 + \dots + h_t v_t + h_{t+1} u_{t+1} + \dots + h_n u_n}_{\in U} = \underbrace{-K_{t+1} w_{t+1} \dots}$

$\dots - K_m w_m$
$\in W$

tutto $\in U \cap W$

2)Formula di Grassmann.

def: U e W sono sottospazi di V

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

dim:

1) Se $U \cap W = \{\underline{0}\}$ $B_U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ e

$B_W = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$

$B = B_U \cup B_W$ B é un insieme di generatori per $U+W$

perché $v \in U+W$, $v = u + w$, $u \in U$ e $w \in W$

perché $U \cap W = \{\underline{0}\}$ parliamo di somma diretta

$u \in U$ $u = h_1 u_1 + h_2 u_2 + \dots + h_n u_n$

$w \in W$ $w = K_1 w_1 + K_2 w_2 + \dots + K_m w_m$

$$\dim U+W = |B| = |B_U \cup B_W| = |B_U| + |B_W| - |B_U \cap B_W| =$$

$$= \dim U + \dim W - \dim U \cap W$$

c.v.d.

$-k_{t+1} w_{t+1} - \dots - k_m w_m \in U \cap W \Rightarrow$ é comb. lineare di $B_{U \cap W}$

$-k_{t+1} w_{t+1} - \dots - k_m w_m = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_t v_t$

porto tutto a destra

$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_t v_t + k_{t+1} w_{t+1} + \dots + k_m w_m = \underline{0}$

dato che la combinazione lineare di B_W uguale a $\underline{0}$ allora B_W é indipendente $\Rightarrow k_i = 0 \ \forall i$

Sostituisco $k_i = 0 \ \forall i$ in

$h_1 v_1 + h_2 v_2 + \dots + h_t v_t + h_{t+1} u_{t+1} + \dots + h_n u_n = \underline{0}$

é una combinazione lineare di B_U uguale a $\underline{0}$

B_U é indipendente $\Rightarrow h_i = 0 \ \forall i$

Ogni coefficiente di é uguale a $\underline{0}$ quindi

B é una base per $U+W$

3)Teorema di Rouché – Capelli.

def: Il sistema lineare $A \cdot \underline{x} = B$ ha soluzioni se e solo se $r(A) = r(A|B)$

dim

Se $(A|B)$ ha rango r, allora A avrà rango $r-1$, poiché un pivot si troverà su B, quindi il sistema non ha soluzioni.

Se $r(A) = r(A|B) = r$ allora i pivot saranno tutti nella parte di A e ognuno dei pivot $p_1, \dots, p_r$ é il coefficiente di un'incognita. I pivot permettono di ricavare quell'incognita in funzione delle altre, quindi rimarranno $n-r$ variabili libere (∞^{n-r} soluzioni)

Lemma di Steinitz

In uno spazio vettoriale V di dimensione n, un insieme indipendente ha al più n vettori.

Dim. Sia $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ un insieme di m vettori di V con $m > n$ e sia $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base per V.

Sia $h_1u_1 + h_2u_2 + \ldots + h_mu_m = \underline{0}$. Poichè B è una base per V, possiamo scrivere ogni vettore di S come combinazione lineare di elementi di B in unico modo.

Si ha allora:

$$\begin{cases} u_1 = k_{11}v_1 + k_{12}v_2 + \ldots + k_{1n}v_n \\ u_2 = k_{21}v_1 + k_{22}v_2 + \ldots + k_{2n}v_n \\ \ldots \\ u_i = k_{i1}v_1 + k_{i2}v_2 + \ldots + k_{in}v_n \\ \ldots \\ u_m = k_{m1}v_1 + k_{m2}v_2 + \ldots + k_{mn}v_n \end{cases}$$

e sostituendo tali espressioni, si ha: $h_1u_1 + h_2u_2 + \ldots + h_mu_m = h_1(k_{11}v_1 + k_{12}v_2 + \ldots + k_{1n}v_n) + h_2(k_{21}v_1 + k_{22}v_2 + \ldots + k_{2n}v_n) + \ldots + h_m(k_{m1}v_1 + k_{m2}v_2 + \ldots + k_{mn}v_n) = \underline{0}$. Mettendo in evidenza i vettori di B, si ottiene: $(h_1k_{11} + h_2k_{21} + \ldots + h_mk_{m1})v_1 + (h_1k_{12} + h_2k_{22} + \ldots + h_mk_{m2})v_2 + \ldots + (h_1k_{1n} + h_2k_{2n} + \ldots + h_mk_{mn})v_n = \underline{0}$. Poichè B è un insieme indipendente, l'unica combinazione lineare di elementi di B uguale a $\underline{0}$ è quella banale, quindi:

$$\begin{cases} h_1k_{11} + h_2k_{21} + \ldots + h_mk_{m1} = 0 \\ h_1k_{12} + h_2k_{22} + \ldots + h_mk_{m2} = 0 \\ \ldots \\ h_1k_{1i} + h_2k_{2i} + \ldots + h_mk_{mi} \\ \ldots \\ h_1k_{1n} + h_2k_{2n} + \ldots + h_mk_{mn} = 0 \end{cases}.$$

In tale sistema, le incognite sono $\{h_1, h_2, \ldots, h_m\}$, quindi abbiamo m incognite ed n equazioni, con $m > n$, dunque il sistema è indeterminato. Esiste allora $(h_1, h_2, \ldots, h_m) \neq \underline{0}$ soluzione del sistema e dunque una combinazione lineare non banale di elementi di S uguale a $\underline{0}$. Dunque un insieme indipendente di V ha al più n vettori.

3)Autovettori associati ad autovalori distinti sono indipendenti. L'unione di insiemi indipendenti contenuti in autospazi distinti è un insieme indipendente.

def: Autovettori associati ad autovalori distinti sono indipendenti.

dim:

A= matrice di ordine n

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t$ = autovalori distinti di A

$\{v_1, v_2, \dots, v_t\} = S$ v_i é un autovettore di n associato a λ_i

dobbiamo dimostrare che S é indipendente

Per induzione su t

per $t=1$ abbiamo un solo autovettore $\{v\}$, esso é sempre indipendente se e solo se $\neq 0$ perché gli autovettori sono $\neq 0$

porto tutto al primo membro e raccolgo

$h_1(\lambda_t-\lambda_1)v_1+h_2(\lambda_t-\lambda_2)v_2+\dots+h_{t-1}(\lambda_t-\lambda_{t-1})v_{t-1}=0$

per l'ipotesi induttiva $t-1$ autovettori sono indipendenti

$h_i(\lambda_t-\lambda_i)=0 \quad \forall i=1,\dots,t-1$

gli autovalori sono distinti $\Rightarrow \lambda_t \neq \lambda_i$

$\lambda_t-\lambda_i \neq 0 \quad \Rightarrow$ necessariamente $\Rightarrow h_i=0$

questo non si può annullare

Se sostituisco $h_i=0$ ci rimane $h_t v_i=0$
poiché é un autovettore con $v_t \neq 0$ si può annullare
solo con $h_t=0 \Rightarrow h_i=0$

quindi $\forall i$ S é indipendente c.v.d.

def: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t$ autovalori distinti di a

S_i = insieme indipendente $\subset V_{\lambda_i}$ non contenente il vettore nullo poiché composto da autovettori

$S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_t$ é un insieme indipendente

dim: Una combinazione lineare di $S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_t$ é la somma di combinazioni lineari di $S_1, S_2, \ldots, S_t$

Una combinazione lineare si può scrivere come

$w_1 + w_2 + \ldots + w_t = \underline{0}$ dove w_i é combinazione lineare di s_i

w_1 = combinazione lineare di $S_i \subset V_{Ai}$

$w_1 \subset V_{\lambda i} \Rightarrow w_i = \underline{0}$ oppure w_i é un autovettore associato a λ_i

$w_1 + w_2 + \ldots + w_t = \underline{0}$

Se almeno una di essi é $\neq 0$ ottengo una combinazione lineare di autovettori associati ad autovalori distinti

I coefficienti di w_i sono uguali a 1 ho un assurdo $\lightning$
(autovalori associati ad autovalori distinti sono indipendenti

$w_i = \underline{0}$ $\forall i$

w_i = combinazione lineare di S_i = insieme indipendente

$\Rightarrow$ i coefficienti di w_i sono tutti uguali a $\underline{0}$

$S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_t$ é indipendente

$\dots A[v_n])$

$$P \cdot D = \underbrace{\left([v_1]\ [v_2]\ \ [v_n]\right)}_{P} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} =$$

$$= (\lambda_1 [v_1], \lambda_2 [v_2] \dots, \lambda_n [v_n])$$

$AP = PD$ con P invertibile $\Leftrightarrow (A[v_1], A[v_2], \dots, A[v_n]) =$

$= (\lambda_1 [v_1], \lambda_2 [v_2], \dots, \lambda_n [v_n])$

$v_i \neq 0 \ \forall i$

$A v_i = \lambda_i v_i \qquad v_i \neq 0$

v_i é un autovettore di A e λ_i é un autovalore

def: A ē diagonalizzabile se esistono n autovettori di A indipendenti, essi formano una base di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori.

dim $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ $\qquad$ P per colonne ha gli autovettori di A
D ha sulla diagonale principale gli autovalori di A

12)Condizione necessaria e sufficiente affinché una matrice quadrata sia diagonalizzabile.

Una matrice quadrata A si dice diagonalizzabile se é simile ($\det A = \det B$, $\rho(A) = \rho(B)$ e hanno lo stesso polinomio caratteristico, hanno gli stessi autovalori) ad una matrice diagonale D.

$\det A = \det D$ = prodotto degli elementi sulla diagonale

$\rho(A) = \rho(D)$

$A^K = P \cdot D^K \cdot P^{-1}$

def: Sia A una matrice quadrata di ordine n, A é diagonalizzabile $\Leftrightarrow \exists$ una base di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di A $\Leftrightarrow$ la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di A é uguale a n.

dim: $A = PDP^{-1}$ $\quad AP = PDP^{-1}P$ $\quad AP = PD$ (P é invertibile)

Scriviamo P in blocchi $P([v_1], [v_2], \dots, [v_n])$

v_i = colonne di P

poiché P é invertibile sappiamo che $v_i \neq 0$ perché una matrice con una colonna nulla ha $\det = 0$ e non sarebbe invertibile

$A \cdot P = A_{n \times n} ([\underset{n \cdot 1}{v_1}], [v_2] \dots [v_n]) = A[v_1], A[v_2], \dots$

Supponiamo che sia vero per $t-1$ e dimostriamo per t

$h_1 v_1 + h_2 v_2 + \dots + h_t v_t = \underline{0}$ combinazione lineare dei vettori di S.

moltiplichiamo ↑ per A verrà sempre ∅

$A \cdot (h_1 v_1 + h_2 v_2 + \dots + h_t v_t) = A \cdot \underline{0} = \underline{0}$

per la def di autovalori $A \cdot v_i = \lambda_i v_i$ quindi

sostituisco A con λ_i

$h_1 \lambda_1 v_1 + h_2 \lambda_2 v_2 + \dots + h_t \lambda_t v_t = \underline{0}$

inoltre moltiplico la gialla per λ_t

$h_1 \lambda_t v_1 + h_2 \lambda_t v_2 + \dots + h_{t-1} \lambda_t v_t + h_t \lambda_t v_t = \underline{0}$

uguaglio la marrone con la celeste

$h_1 \lambda_1 v_1 + h_2 \lambda_2 v_2 + \dots + \cancel{h_t \lambda_t v_t} =$

$h_1 \lambda_t v_1 + h_2 \lambda_t v_2 + \dots + h_{t-1} \lambda_t v_t + \cancel{h_t \lambda_t v_t}$

n autovalori e n autovalori contati con le loro molteplicità

$\lambda_1, \dots, \lambda_t \Rightarrow$ autovalori di A
$V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_t} \Rightarrow$ autospazi

In uno spazio vettoriale una base é il piú grande insieme di vettori indipendenti

$\left.\begin{array}{l} B_1 \text{ é base di } V_{\lambda_1} \\ B_t \text{ é base di } V_{\lambda_t} \end{array}\right\}$ sono indipendenti

$\underbrace{B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_t}$ é indipendente per teorema

é il piú grande insieme di autovettori indipendenti

$|B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_t| = |B_1| + |B_2| + \dots + |B_t| =$

$= \dim V_{\lambda_1} + \dim V_{\lambda_2} + \dots + \dim V_{\lambda_t} = \sum_{i=1}^{t} \mu_g(\lambda_i)$

max numero di autovettori indipendenti

A é diagonalizzabile $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{t} \mu_g(\lambda_i) = n$

$\sum_{i=1}^{t} \mu_g(\lambda_i) \leq \sum_{i=1}^{t} \mu_a(\lambda_i) \leq n$

10) Se una funzione lineare f è iniettiva, trasforma insiemi indipendenti in insiemi indipendenti.

def: Se ho $f: V \to U$ iniettiva

$\{v_1, v_2, \dots, v_t\}$ = insieme indipendente $\subseteq V$

Se applico una funzione $\{f(v_1), \dots, f(v_t)\}$ ottengo un insieme indipendente di U.

dim: $h_1 f(v_1) + h_2 f(v_2) + \dots + h_t f(v_t) = \underline{0}$

↓

f é lineare

$f(h_1 v_1 + h_2 v_2 + \dots + h_t v_t) = \underline{0}$

Quando Im di una funzione é zero vuol dire che il vettore appartiene al nucleo

Però so che f é iniettiva quindi $\ker f = \{\underline{0}_V\}$

quindi $h_1 v_1 + h_2 v_2 + \dots + h_t v_t = \underline{0}$

Per ipotesi $\{v_1, \dots, v_t\}$ é indipendente quindi $h_i = 0$

Perciò $\{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_t)\}$ é indipendente

11) Una funzione lineare f è iniettiva se e solo se Ker f={0}.

def: $f: V \to U$ é lineare
f é iniettiva $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Ker} f \{0_V\}$ $\dim \operatorname{Ker} f = 0$
poiché solo un vettore deve essere mandato in 0

dim: dimostro "$\Rightarrow$"
$\forall\ v \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow f(v) = 0_U = f(0_V) \Rightarrow$
$\Rightarrow f(v) = f(0_V)$

PAG 162

$\Rightarrow v = 0_V$ $\quad \operatorname{Ker} f = \{0_V\}$ $\quad$ c.v.d.

dimostro "$\Leftarrow$"

$\operatorname{Ker} f = \{0_V\}$

Prendiamo v_1 e $v_2 \in V$ $\quad f(v_1) = f(v_2) \Rightarrow$
$f(v_1) - f(v_2) = 0_U \Rightarrow f(v_1 - v_2) = 0_U$

allora so che $v_1 - v_2 \in \operatorname{Ker} f = \{0_V\}$

$v_1 - v_2 = \underline{0}$ $\quad v_1 = v_2$ $\quad$ allora f é iniettiva

c.v.d

15)Un insieme di vettori a due a due ortogonali che non contiene lo 0 è indipendente.

def: S é un insieme ortogonale e $\underline{0} \notin S \Rightarrow S$ é indipendente

dim: $S = \{v_1, \dots, v_t\}$ $v_i \cdot v_j = 0$ $\forall i \neq j$ e $V_i \neq 0$ $\forall i$

$h_1 v_1 + h_2 v_2 + \dots + h_t v_t = \underline{0}$

$v_i (h_1 v_1 + h_2 v_2 + \dots + h_t v_t) = v_i \cdot \underline{0} = \underline{0}$

$h_1 \underbrace{v_i v_1}_{= 0} + h_2 \underbrace{v_i v_2}_{= 0} + \dots + h_t v_i v_t = 0$

$h_1 \underbrace{v_i v_i}_{\neq 0} = 0$ sarà zero se $h = 0$

$v_i \neq \underline{0} \Rightarrow v_i \cdot v_i > 0$

Ripetendo per ogni $V_i \in S \Rightarrow h_i = 0$ $\forall i = 1, \dots, t \Rightarrow$

S é indipendente c.v.d

6)Classificazione delle coniche col metodo degli invarianti.

Classificazione di una conica non degenere

Una forma quadratica in x e y si puó scrivere come $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = (x, y, 1)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ con $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$. Dunque $A = A^T$, cioè A è una matrice simmetrica. Affinchè la forma sia effettivamente di grado 2, a_{11}, a_{22}, a_{12} non devono essere tutti nulli, quindi la sottomatrice $A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ deve essere diversa dalla matrice nulla. L'insieme delle soluzioni dell' equazione $(x, y, 1)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ viene detta *conica*. Vediamo ora di capire che tipo di conica rappresenta tale equazione mediante lo studio delle matrici A ed A_1.

Enunciamo il seguente Teorema senza dimostrazione.

Teorema La conica di equazione $(x, y, 1)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ è non degenere se e solo se $\det(A) \neq 0$.

Quindi ora procediamo con la classificazione assumendo che $\det(A) \neq 0$.

La matrice A_1 è simmetrica quindi ortogonalmente diagonalizzabile: esiste una matrice ortogonale P tale che $A_1 = PDP^{-1}$, con $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Ricordiamo che, poichè P è ortogonale, $P^{-1} = P^T$, e λ_1 e λ_2 sono i due autovalori di A_1. Sia $Q = \begin{pmatrix} P & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, quindi $Q^{-1} = \begin{pmatrix} P^{-1} & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^T & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Q^T$. Sia $Ox'y'$ il sistema di rifermento tale che $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, e dunque $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$. La matrice $B = QAQ^{-1}$ allora rappresenta la forma quadratica nel sistema di riferimento $Ox'y'$, poichè $(x', y', 1)QAQ^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = (Q^T\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix})^T A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = (Q^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix})^T A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix})^T A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = (x, y, 1)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$, quindi $(x, y, 1)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x', y', 1)B\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = 0$. La matrice B è simmetrica, in quanto $B = QAQ^{-1} = QAQ^T$ e $B^T = (QAQ^T)^T = QA^TQ^T = QAQ^T$, quindi $B = B^T$. Dunque

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Se ho A diagonalizzabile $n = \sum \mu_g(\lambda_i) \leq \sum \mu_a(\lambda_i) \leq n$

$\Rightarrow \sum_i \mu_a(\lambda_i) = n$ $\Rightarrow$ condizione necessaria ma non sufficiente

$\sum_i \mu_g(\lambda_i)$ $\Rightarrow \sum \mu_g(\lambda_i) = \sum \mu_a(\lambda_i)$

A é diagonalizzabile.

Quindi si ha:

- un'ellisse se $\det(A) \neq 0$ e $\det(A_1) > 0$. L'ellisse è reale se $Tr(A_1)\det(A) < 0$, non ha punti reali se $Tr(A_1)\det(A) > 0$
- un'iperbole se $\det(A) \neq 0$ e $\det(A_1) < 0$.
- una parabola se $\det(A) \neq 0$ e $\det(A_1) = 0$.

Classificazione di una conica

Una forma quadratica in x e y si puó scrivere come $a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{12}xy+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33} = (x,y,1)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ con $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$. Dunque $A = A^T$, cioè A è una matrice simmetrica. Affinchè la forma sia effettivamente di grado 2, a_{11}, a_{22}, a_{12} non devono essere tutti nulli, quindi la sottomatrice $A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ deve essere diversa dalla matrice nulla. L'insieme delle soluzioni dell' equazione $(x,y,1)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ viene detta *conica*. Vediamo ora di capire che tipo di conica rappresenta tale equazione mediante lo studio delle matrici A ed A_1. La matrice A_1 è simmetrica quindi ortogonalmente diagonalizzabile: esiste una matrice ortogonale P tale che $A_1 = PDP^{-1}$, con $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Ricordiamo che, poichè P è ortogonale, $P^{-1} = P^T$, e λ_1 e λ_2 sono i due autovalori di A_1. Sia $Q = \begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{P} & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, quindi $Q^{-1} = \begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{P^{-1}} & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{P^T} & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Q^T$. La matrice $B = QAQ^{-1}$ rappresenta la forma quadratica nel sistema di riferimento $Ox'y'$, dove $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, poichè $(x',y',1)QAQ^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = (Q^T\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix})^T A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = (Q^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix})^T A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix})^T A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = (x,y,1)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$, quindi $(x,y,1)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \Leftrightarrow (x',y',1)B\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = 0$. La matrice B è simmetrica, in quanto $B = QAQ^{-1} = QAQ^T$ e $B^T = (QAQ^T)^T = QA^TQ^T = QAQ^T$, quindi $B = B^T$. Dunque possiamo scrivere $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & b_1 \\ 0 & \lambda_2 & b_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$.

Nel nuovo sistema di riferimento abbiamo quindi l'equazione:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2b_1x' + 2b_2y' + b_3 = 0.$$

Caso 1: λ_1 **e** $\lambda_2 \neq 0$.

$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2b_1x' + 2b_2y' + b_3 = \lambda_1(x'^2 + 2\frac{b_1}{\lambda_1}x') + \lambda_2(y'^2 + 2\frac{b_2}{\lambda_2}y') + b_3 = \lambda_1(x'^2 + 2\frac{b_1}{\lambda_1}x' + \frac{b_1^2}{\lambda_1^2} - \frac{b_1^2}{\lambda_1^2}) + \lambda_2(y'^2 + 2\frac{b_2}{\lambda_2}y' + \frac{b_2^2}{\lambda_2^2} - \frac{b_2^2}{\lambda_2^2}) + b_3 = \lambda_1(x' + \frac{b_1}{\lambda_1})^2 + \lambda_2(y' + \frac{b_2}{\lambda_2})^2 - \frac{b_1^2}{\lambda_1} - \frac{b_2^2}{\lambda_2} + b_3 =$

$\lambda_1(x' + \frac{b_1}{\lambda_1})^2 + \lambda_2(y' + \frac{b_2}{\lambda_2})^2 + c = 0$, ove $c = -\frac{b_1^2}{\lambda_1} - \frac{b_2^2}{\lambda_2} + b_3$. Quindi, effettuando un nuovo cambiamento di riferimento (in questo caso una traslazione), si ha $\begin{cases} X = x' + \frac{b_1}{\lambda_1} \\ Y = y' + \frac{b_2}{\lambda_2} \end{cases}$ e l'equazione diventa: $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + c = 0$.

Caso 1a: λ_1 **e** $\lambda_2 \neq 0$**,** $c = 0$.

Si ha $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 X^2 = -\lambda_2 Y^2$. Se λ_1 e λ_2 sono concordi, allora $\lambda_1 X^2$ e $-\lambda_2 Y^2$ sono discordi a meno che $X = Y = 0$, quindi $(0,0)$ è l'unica soluzione dell'equazione. Se λ_1 e λ_2 sono discordi, possiamo supporre $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$, dunque $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = (\sqrt{\lambda_1}X + \sqrt{-\lambda_2}Y)(\sqrt{\lambda_1}X - \sqrt{-\lambda_2}Y) = 0$, quindi l'equazione rappresenta due rette. Riassumendo per $c = 0$ abbiamo un punto o due rette.

Caso 1b: λ_1 **e** $\lambda_2 \neq 0$**,** $c \neq 0$.

Possiamo dividere per c e otteniamo: $\frac{\lambda_1}{c}X^2 + \frac{\lambda_2}{c}Y^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (-\frac{\lambda_1}{c})X^2 + (-\frac{\lambda_2}{c})Y^2 = 1$.

Se $-\frac{\lambda_1}{c}$ e $-\frac{\lambda_2}{c}$ sono concordi e < 0, allora possiamo porre $\frac{1}{a^2} = \frac{\lambda_1}{c}$ e $\frac{1}{b^2} = \frac{\lambda_2}{c}$ e dunque ottenere $-\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$ che è un'ellisse con soli punti immaginari (cioè non ha punti in $\mathbb{R}^2$). Se $-\frac{\lambda_1}{c}$ e $-\frac{\lambda_2}{c}$ sono concordi e > 0, allora possiamo porre $\frac{1}{a^2} = -\frac{\lambda_1}{c}$ e $\frac{1}{b^2} = -\frac{\lambda_2}{c}$ e dunque $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ cioè un'ellisse. Se $-\frac{\lambda_1}{c}$ e $-\frac{\lambda_2}{c}$ sono discordi, ad esempio $-\frac{\lambda_1}{c} > 0$ e $-\frac{\lambda_2}{c} < 0$, possiamo porre $-\frac{\lambda_1}{c} = \frac{1}{a^2}$ e $-\frac{\lambda_2}{c} = -\frac{1}{b^2}$, quindi ottenere $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$, cioè un'iperbole.

Caso 2: uno solo degli autovalori è 0. Supponiamo $\lambda_1 = 0$ Si ha

$$\lambda_2 y'^2 + 2b_1 x' + 2b_2 y' + b_3 = 0.$$

Se anche $b_1 = 0$, otteniamo un'equazione nella sola y', quindi con nessuna, una o due soluzioni. Quindi tale equazione non ha soluzioni in $\mathbb{R}^2$ o rappresenta una o due rette. Se $b_1 \neq 0$, possiamo dividere per b_1 e quindi ottenere la parabola di equazione $x' = -\frac{\lambda_2}{2b_1}y'^2 - \frac{b_2}{b_1}y' - \frac{b_3}{2b_1}$.

Analogamente, se $\lambda_2 = b_2 = 0$ ho nessuna soluzione oppure una o due rette, se $\lambda_2 = 0 \neq b_2$, ho la parabola di equazione $y' = -\frac{\lambda_1}{2b_2}x'^2 - \frac{b_1}{b_2}x' - \frac{b_3}{2b_2}$.

Caso 3: entrambi gli autovalori sono $= 0$.

Se 0 è un autovalore di molteplicità algebrica 2 per A_1, vuol dire che anche la molteplicità geometrica è 2 (la matrice è diagonalizzabile, quindi la molteplicità geometrica e algebrica coincidono per ogni autovalore). Ciò vuol dire che $A_1 v = 0v = \underline{0}\ \forall v \in \mathbb{R}^2$ e quindi $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, contraddicendo le ipotesi.

Riassumendo si ha:

- una conica degenere se λ_1 e $\lambda_2 \neq 0$ e $c = -\frac{b_1^2}{\lambda_1} - \frac{b_2^2}{\lambda_2} + b_3 = 0$ oppure se $\lambda_i = b_i = 0$ per un certo $i \in \{1, 2\}$.
- un'ellisse se λ_1 e $\lambda_2 \neq 0$ sono concordi e $c \neq 0$. Inoltre ho un'ellisse reale se c è discorde con essi, mentre ho un'ellisse con soli punti immaginari se c è concorde con gli autovalori.
- un'iperbole se λ_1 e $\lambda_2 \neq 0$ sono discordi e $c \neq 0$.
- una parabola se $\lambda_1 = 0$ e $b_1 \neq 0$ oppure $\lambda_2 = 0$ e $b_2 \neq 0$.

Vediamo come possiamo ricavare queste informazioni dalle matrici A ed A_1. Le matrici A e B sono simili, quindi $\det A = \det B = \lambda_1\lambda_2 b_3 - b_1^2\lambda_2 - b_2^2\lambda_1$. Inoltre, il polinomio caratteristico di A_1 è $\det A_1 - \lambda I_2 = \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \lambda^2 - Tr(A_1)\lambda + \det(A_1)$. Poichè λ_1 e λ_2 sono le due radici del trinomio, si ha $Tr(A_1) = \lambda_1 + \lambda_2$ e $\det(A_1) = \lambda_1\lambda_2$. Dunque osserviamo che se $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 \neq 0$, $\det(A) = \lambda_1\lambda_2(b_3 - \frac{b_1^2}{\lambda_1} - \frac{b_2^2}{\lambda_2}) = \lambda_1\lambda_2 c$, possiamo scrivere $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & b_1 \\ 0 & \lambda_2 & b_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$.

Nel nuovo sistema di riferimento abbiamo quindi l'equazione:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2b_1 x' + 2b_2 y' + b_3 = 0.$$

raggruppo x v. y.

Caso 1: λ_1 e $\lambda_2 \neq 0$.
$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2b_1 x' + 2b_2 y' + b_3 = \lambda_1(x'^2 + 2\frac{b_1}{\lambda_1}x') + \lambda_2(y'^2 + 2\frac{b_2}{\lambda_2}y') + b_3 = \lambda_1(x'^2 + 2\frac{b_1}{\lambda_1}x' + \frac{b_1^2}{\lambda_1^2} - \frac{b_1^2}{\lambda_1^2}) + \lambda_2(y'^2 + 2\frac{b_2}{\lambda_2}y' + \frac{b_2^2}{\lambda_2^2} - \frac{b_2^2}{\lambda_2^2}) + b_3 = \lambda_1(x' + \frac{b_1}{\lambda_1})^2 + \lambda_2(y' + \frac{b_2}{\lambda_2})^2 - \frac{b_1^2}{\lambda_1} - \frac{b_2^2}{\lambda_2} + b_3 = \lambda_1(x' + \frac{b_1}{\lambda_1})^2 + \lambda_2(y' + \frac{b_2}{\lambda_2})^2 + c = 0$, ove $c = -\frac{b_1^2}{\lambda_1} - \frac{b_2^2}{\lambda_2} + b_3$. Quindi, effettuando un nuovo cambiamento di riferimento (in questo caso una traslazione), si ha $\begin{cases} X = x' + \frac{b_1}{\lambda_1} \\ Y = y' + \frac{b_2}{\lambda_2} \end{cases}$ e l'equazione diventa: $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + c = 0$. Si noti che $c = \frac{\det(B)}{\lambda_1\lambda_2} = \frac{\det(B)}{\lambda_1\lambda_2}$ poichè A e B sono simili. Dunque $c \neq 0$.

Possiamo dividere per c e otteniamo: $\frac{\lambda_1}{c}X^2 + \frac{\lambda_2}{c}Y^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (-\frac{\lambda_1}{c})X^2 + (-\frac{\lambda_2}{c})Y^2 = 1$.

Se $-\frac{\lambda_1}{c}$ e $-\frac{\lambda_2}{c}$ sono concordi e < 0, allora possiamo porre $\frac{1}{a^2} = \frac{\lambda_1}{c}$ e $\frac{1}{b^2} = \frac{\lambda_2}{c}$ e dunque ottenere $-\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$ che è un'ellisse con soli punti immaginari (cioè non ha punti in $\mathbb{R}^2$). Se $-\frac{\lambda_1}{c}$ e $-\frac{\lambda_2}{c}$ sono concordi e > 0, allora possiamo porre $\frac{1}{a^2} = -\frac{\lambda_1}{c}$ e $\frac{1}{b^2} = -\frac{\lambda_2}{c}$ e dunque $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ cioè un'ellisse. Se $-\frac{\lambda_1}{c}$ e $-\frac{\lambda_2}{c}$ sono discordi, ad esempio $-\frac{\lambda_1}{c} > 0$ e $-\frac{\lambda_2}{c} < 0$, possiamo porre $-\frac{\lambda_1}{c} = \frac{1}{a^2}$ e $-\frac{\lambda_2}{c} = -\frac{1}{b^2}$, quindi ottenere $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$, cioè un'iperbole.

Caso 2: uno solo degli autovalori è 0. Supponiamo $\lambda_1 = 0$ Si ha

$$\lambda_2 y'^2 + 2b_1 x' + 2b_2 y' + b_3 = 0.$$

Si noti che allora $\det(A) = \det(B) = \lambda_2 b_1^2$ dunque, poichè $\det(A) \neq 0$, si ha $b_1 \neq 0$. Possiamo allora dividere per b_1 e quindi ottenere la parabola di equazione $x' = -\frac{\lambda_2}{2b_1}y'^2 - \frac{b_2}{b_1}y' - \frac{b_3}{2b_1}$.

Analogamente, se $\lambda_2 = 0$, si ha $\neq b_2$, e otteniamo la parabola di equazione $y' = -\frac{\lambda_1}{2b_2}x'^2 - \frac{b_1}{b_2}x' - \frac{b_3}{2b_2}$.

Caso 3: entrambi gli autovalori sono $= 0$.
In questo caso si avrebbe $\det(A) = \det(B) = 0$, contraddicendo le ipotesi.
Riassumendo si ha:

- un'ellisse se λ_1 e $\lambda_2 \neq 0$ sono concordi. Inoltre ho un'ellisse reale se c è discorde con essi, mentre ho un'ellisse con soli punti immaginari se c è concorde con gli autovalori.
- un'iperbole se λ_1 e $\lambda_2 \neq 0$ sono discordi e $c \neq 0$.
- una parabola se λ_1 o $\lambda_2 = 0$.

Vediamo come possiamo ricavare queste informazioni dalle matrici A ed A_1. λ_1 e λ_2 sono concordi se e solo se $\lambda_1\lambda_2 > 0$, sono discordi se e solo se $\lambda_1\lambda_2 < 0$ e uno degli autovalori è nullo se e solo se $\lambda_1\lambda_2 = 0$. La matrice A_1 è diagonalizzabile, cioè simile alla matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, dunque $\lambda_1\lambda_2 = \det(A_1)$. Inoltre, λ_1 e λ_2 sono entrambi concordi con c se e solo se $c\lambda_1 > 0$ e $c\lambda_2 > 0$, quindi $c(\lambda_1 + \lambda_2) > 0$. Ancora una volta, A_1 e D sono simili, dunque hanno la stessa traccia, cioè $Tr(A_1) = \lambda_1 + \lambda_2$. Quindi λ_1 e λ_2 sono entrambi concordi con c se e solo se $\det(A)Tr(A_1) > 0$.

16) Componenti di un vettore rispetto ad una base ortonormale.

def: B = base ortonormale $= \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

$[v]_B = (v \cdot v_1, v \cdot v_2, \dots, v \cdot v_n)$ le componenti rispetto a una base ortonormale è il prodotto scalare

dim: $[v]_B = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ tali che $v = h_1 v_1 + \dots + h_n v_n$

$$v \cdot v_i = (h_1 v_1 + \dots + h_n v_n) v_i = h_1 \underbrace{v_i v_1}_{=0} + \dots +$$

$$+ h_i \underbrace{v_i v_i}_{=1} + \dots + h_n \underbrace{v_n v_i}_{=0} = h_i$$

$$[v]_B = \begin{pmatrix} v v_1 \\ \vdots \\ v v_n \end{pmatrix}$$ c.v.d.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari
www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari
www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

se $\lambda_1 = 0$, $\det(A) = -b_1^2\lambda_2$, infine se $\lambda_2 = 0$, $\det(A) = -b_2^2\lambda_1$. Inoltre, λ_1 e λ_2 sono concordi se e solo se $\lambda_1\lambda_2 > 0 \Leftrightarrow \det(A_1) > 0$ e sono concordi con c se e solo se $c\lambda_1 > 0$ e $c\lambda_2 > 0$, quindi $c(\lambda_1 + \lambda_2) > 0 \Leftrightarrow \det(A)Tr(A_1) > 0$. Uno dei due autovalori è nullo se e solo se $\lambda_1\lambda_2 = 0 \Leftrightarrow \det(A_1) = 0$.

Quindi si ha:

- una conica degenere $\Leftrightarrow \det(A) = 0$
- un'ellisse se $\det(A) \neq 0$ e $\det(A_1) > 0$. L'ellisse è reale se $Tr(A_1)\det(A) < 0$, non ha punti reali se $Tr(A_1)\det(A) > 0$
- un'iperbole se $\det(A) \neq 0$ e $\det(A_1) < 0$.
- una parabola se $\det(A) \neq 0$ e $\det(A_1) = 0$.

14) Se U è un sottospazio di R^n, dim $U^{\perp}$=n-dim U e R^n=U+ $U^{\perp}$.

Come trovare $U^{\perp}$? Sia $v = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $u = (a_1, a_2, \dots, u_n) \in U$, allora $u \cdot v = 0 \Leftrightarrow a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_nx_n = 0$, cioè v deve soddisfare l'equazione definita dal vettore u. Dalla

Proposizione1, si evince che $v \in U^{\perp} \Leftrightarrow v \cdot u = 0$ per ogni U appartentente ad una fissata base di U. Sia $\dim U = k$ e sia $B = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ una base di U. Allora $v \cdot u_i = 0 \forall\ i = 1, 2, \dots, k$ definisce un sistema con k equazioni. Poichè abbiamo preso dei vettori di una base, le k equazioni sono indipendenti, dunque $U^{\perp}$ è l'insieme delle soluzioni di k equazioni indipendenti in n incognite $\Rightarrow \dim U^{\perp} = n - k = n - \dim U$.

Osservazione. $(U^{\perp})^{\perp} = U$.

Proposizione3. $\mathbb{R}^n = U \oplus U^{\perp}$.

Dimostrazione Sappiamo già che $U \cap U^{\perp}$, in quanto spazi ortogonali fra loro, dunque $U + U^{\perp} = U \oplus U^{\perp}$. Inoltre, dalla formula di Grassmann, si ha $\dim U \oplus U^{\perp} = \dim U + \dim U^{\perp} = k + n - k = n \Rightarrow U \oplus U^{\perp} = \mathbb{R}^n$.

5)Procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt.

def: Sia V uno spazio euclideo e siano $v_1, \dots, v_s \in V$ dei vettori linearmente indipendenti, allora esistono $w_1, \dots, w_s \in V$ tali che:

- $w_1, \dots, w_s$ sono ortonormali;
- $\forall K = 1, \dots, s$, $\langle v_1, \dots, v_K \rangle = \langle w_1, \dots, w_K \rangle$

dim: I vettori w_i sono costruiti come $w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$

$\langle w_1 \rangle = \langle v_1 \rangle$ e che

$$\|w_1\| = \left\| \frac{v_1}{\|v_1\|} \right\| = \frac{\|v_1\|}{\|v_1\|} = 1$$

poniamo poi $w_2 = v_2 - (v_2 \cdot w_1) w_1$

$$w_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|}$$

si procede così definendo $\forall K = 2, \dots, n$

$$w_K = v_K - (v_K \cdot w_1) w_1 - \dots - (v_K \cdot w_{K-1}) \cdot w_{K-1}$$

e $w_K = \frac{w_K}{\|w_K\|}$

Vediamo che $\forall K, 1 \dots, s$, i $w_1, \dots, w_K$ sono ortonormali. In particolare la loro norma è 1 perché

$$\|w_i\| = \left\| \frac{w_i}{\|w_i\|} \right\| = \frac{\|w_i\|}{\|w_i\|} = 1$$

Bisogna vedere che sono ortogonali.

Per induzione

Per $K=2$ $\{w_1, w_2\}$ è ortogonale perché

$$w_2 \cdot w_1 = \frac{[v_2 - (v_2 \cdot w_1) w_1]}{\|w_2\|} \cdot w_1 =$$

$$= \frac{1}{\|w_2\|} \left[\left(v_2 - (v_2 \cdot w_1) w_1 \right) w_1 \right] =$$

$$= \frac{1}{\|w_2\|} \left[v_2 \cdot w_1 - (v_2 \cdot w_1) \cdot (w_1 \cdot w_1) \right] = 0$$

Vediamo che se $\{w_1, \dots, w_K\}$ è un insieme ortogonale anche $\{w_1, \dots, w_K, w_{K+1}\}$ lo è.

9)Sia f:V → W un'applicazione lineare. Dim V= dim Ker f + dim Imf. Kerf e Im f sono sottospazi di V e W rispettivamente.

def: Sia $f: V \to W$ un'applicazione lineare fra gli spazi vettoriali V e W, con $\dim V = n$. Vale che

$$\dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\operatorname{Ker} f) = n$$

dim: Sia $\dim \operatorname{Ker} f = r \leq n$ e sia $\{v_1, \dots, v_r\}$ una base di Ker f.

Completo la base a una base di V

$\{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$

Voglio dimostrare che gli $n-r$ vettori che ho aggiunto sono tali che

$\{f(v_{r+1}), \dots, f(v_n)\}$ é una base di Im f.

perché avremo

$$\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = (n-r) + r = n = \dim V$$

di $v_1, \dots, v_i$.

Poiché sia i vettori $w_i, \dots, w_K$ e $v_i, \dots, v_K$ sono linearmente indipendenti allora avremo che

$$\dim \langle w_1, \dots, w_K \rangle = \dim \langle v_i, \dots, v_K \rangle = K$$

$$\langle w_1, \dots, w_K \rangle = \langle v_i, \dots, v_K \rangle$$

Sappiamo che $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ é un insieme di generatori per Im f per il teorema che dice che data una base B di V, allora $f(B)$ é un insieme di generatori per Im f.

per essere una base devo dimostrare che siano indipendenti

$$a_{r+1} f(v_{r+1}) + \dots + a_n f(v_n) = 0_W$$

dobbiamo avere che gli a_i sono tutti nulli

$$f(a_{r+1} v_{r+1} + \dots + a_n v_n) = 0_W$$

quindi $a_{r+1} v_{r+1} + \dots + a_n v_n \in \operatorname{Ker} f$

Ma poiché $\{v_1, \dots v_r\}$ é un una base di Ker f

esprimo la gialla come combinazione lineare di B

$$a_{r+1} v_{r+1} + \dots + a_n v_n = a_1 v_1 + \dots + a_r v_r$$

$$a_1 v_1 + \dots + a_r v_r - a_{r+1} v_{r+1} - \dots - a_n v_n = 0$$

ma $\{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ sono linearmente indipendenti quindi gli a_i devono essere uguali a 0

da ciò segue che $\{f(v_{r+1}), \dots, f(v_n)\}$ sono linearmente indipendenti che è quello che volevo dimostrare. c.v.d.

Quindi dobbiamo verificare che $w_{K+1} \cdot w_i = 0$

$$w_{K+1} w_i = \frac{1}{\|w_{K+1}\|} \cdot \left(w_{K+1} \cdot w_i \right) =$$

$$= \frac{\left[v_{K+1} - \left(v_{K+1} \cdot w_1 \right) w_1 - \dots - \left(v_{K+1} \cdot w_K \right) \cdot w_K \right] \cdot w_1}{\|w_{K+1}\|} =$$

dato che abbiamo presupposto $\{w_1, \dots, w_K\}$ siano ortogonali all'ora l'unico prodotto non nullo sarà

$$= \frac{\left[v_{K+1} \cdot w_i - \left(v_{K+1} \cdot w_i \right) \left(w_i \cdot w_i \right) \right]}{\|w_{K+1}\|} =$$

$$= \frac{v_{K+1} \cdot w_i - v_{K+1} \cdot w_i}{\|w_{K+1}\|} = 0$$

quindi per il processo induttivo $\{w_1, \dots, w_K\}$

é ortogonale.

Si ha che $\forall K = 1, \dots, s \quad \langle w_1, \dots, w_K \rangle \subset \langle v_1, \dots v_K \rangle$ in quanto ogni w_i é costruito come combinazione lineare

7)Le soluzioni di un sistema lineare omogeneo in n incognite formano un sottospazio di R^n. Sua dimensione.

def: Sia $W \subseteq \mathbb{R}^n$ l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in n incognite $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$. Allora W é un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$

dim: ho un sistema nella forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Siano v e w due soluzioni del sistema, dobbiamo dimostrare che anche $v+w$ e λv sono soluzioni.

Dire che v e w sono soluzioni equivale a dire

$$\begin{cases} a_{11}v_1 + \dots + a_{1n}v_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}v_1 + \dots + a_{mn}v_n = 0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} a_{11}w_1 + \dots + a_{1n}w_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}w_1 + \dots + a_{mn}w_n = 0 \end{cases}$$

Sommando otteniamo:

$$\begin{cases} a_{11}(v_1 + w_1) + \dots + a_{1n}(v_n + w_n) = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}(v_1 + w_1) + \dots + a_{mn}(v_n + w_n) = 0 \end{cases}$$

ho dimostrato che $v_1 + w_1$ é soluzione del sistema

Analogamente se moltiplico per λ ottengo

$$\begin{cases} a_{11}(\lambda v_1) + \dots + a_{1n}(\lambda v_n) = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}(\lambda v_1) + \dots + a_{mn}(\lambda v_n) = 0 \end{cases}$$

λv é soluzione del sistema c.v.d.

$$\det(P^{-1}BP - \lambda_i) = \det(P^{-1}BP - P^{-1}\lambda I P) =$$

$$= \det(P^{-1}(B - \lambda_i)P) =$$

per il teorema di binet

$$\det(P^{-1}) \cdot \det(B - \lambda_i) \cdot \det P =$$

$$= \det(B - \lambda_i)(\det P)^{-1} \cdot \det P =$$

$$= \det(B - \lambda_i) \quad \text{c.v.d.}$$

def: due matrici simili hanno lo stesso rango.

$rkA = rkB$

15) Caratterizzazione delle matrici ortogonali: P=P^T se e solo se le righe e le colonne di P formano una base ortonormale di R^n.

def: Una matrice quadrata P si dice ortogonale se $P^T = P^{-1}$

Le seguenti condizioni sono equivalenti:

- P é ortogonale
- le colonne di P sono un sistema ortonormale.
- le righe di P sono un sistema ortonormale.

Dim: Se P é ortogonale allora $P \cdot P^T = I$

Siano $r_1, \dots, r_n$ le righe di P.

L'elemento di posto (i, j) della matrice prodotto da $P \cdot P^T$ é il prodotto scalare dell' i-esima riga di P per la j-esima colonna di P^T.

13) Due matrici simili hanno lo stesso determinante, rango, polinomio caratteristico e rappresentano lo stesso endomorfismo.

def Due matrici simili hanno lo stesso determinante

dim $A = M^{-1} B M$ voglio che $\det A = \det B$

$\det A = \det (M^{-1} B M) =$

per Binet il prodotto dei determinanti è uguale al det del prodotto

$= \det(M^{-1}) \det B \det M =$

$= \det B \cdot (\det M)^{-1} \det M = \det B$ c.v.d

def: Due matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico

$A = P^{-1} B \cdot P$

dim: $\det(A - \lambda I) = \det(P^{-1} B P - \lambda I)$

posso scrivere λI con $\lambda I = \lambda P^{-1} \cdot I \cdot P$

$\lambda I = P^{-1} \lambda I P$

si ha che :

Nel calcolare $P \cdot P^T$ stiamo eseguendo il prodotto scalare delle righe di P per se stesse.

La condizione $P \cdot P^T = I$ equivale ad affermare che il prodotto scalare di $r_i \cdot r_i = 1$ e $r_i \cdot r_j = 0$ se $i \neq j$, cioé se le righe formano un sistema ortonormale. Un analogo ragionamento può essere fatto per le colonne di P osservando che $P^T \cdot P = I$ c.v.d.