

SCHEMA ESERCIZI # 1

Struttura lineare e struttura metrica su \mathbb{R}^n

1. Siano $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -5 \\ -8 \\ -9 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$;

calcolare $2X - 3Y$, $Y + 2Z$, $X - 3Y + Z$, $(\log_4 64)X - 3Y + 3Z$.

2. Siano $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$;

calcolare $3X - 3Y + 3Z$, $2X + Y - Z$ e dedurre dal risultato che X , Y , Z sono linearmente dipendenti.

3. Provare che $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ formano una base di \mathbb{R}^3 .

4. Provare che $X = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, formano una base di \mathbb{R}^2 e scrivere le coordinate di $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispetto a questa base.

5. Provare che $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ non formano una base di \mathbb{R}^3 e determinare un elemento di \mathbb{R}^3 che non sia combinazione lineare di X, Y, Z .

6. Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$Z_k = \begin{pmatrix} 1 \\ -k \\ 1 \end{pmatrix}$ formano una base di \mathbb{R}^3 .

7. Siano $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$;

calcolare $\langle X + Y, Z - W \rangle$, $\langle 3X, Y - Z + 2W \rangle$, $\|X + 2Z + W\|$.

8. Determinare una base ortogonale di \mathbb{R}^3 contenente il vettore $X = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

9. Determinare la proiezione ortogonale di $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ su $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

10. Determinare l'angolo fra $X = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

SCHEMA ESERCIZI # 2

Lo spazio $M_{n,m}(\mathbb{R})$ delle matrici $n \times m$ a elementi reali

1. Siano $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$; calcolare $A - 3B$, $2A + 3B$.
2. Provare che $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti.
3. Provare che $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ -7 & -8 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, sono linearmente dipendenti.
4. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$; calcolare $2trA$.
5. Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$; calcolare $A({}^tB) - B({}^tA)$, $A({}^tB) + B({}^tA)$, AB , BA , $[A, B]$.
6. Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; calcolare $(BA)^{-1}$, è possibile calcolare $(AB)^{-1}$?
7. Sia $A \in \mathbb{R}(n)$, $A \neq 0$, tale che $trA = 0$ e sia $B \in \mathbb{R}(n)$ tale che $trB \neq 0$; provare che A e B sono linearmente indipendenti.
8. Siano $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$; calcolare $X({}^tY)$ e discuterne l'invertibilità.
9. Siano $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; calcolare l'insieme delle combinazioni lineari di A, B, C, D e discutere l'esistenza di $E \in \mathbb{R}(2)$, E non combinazione lineare di A, B, C, D .
10. Sia $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; scrivere A come somma di una matrice simmetrica e di una antisimmetrica.
11. Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; calcolare A^2 e A^3 e determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali I, A, A^2, \dots, A^k sono linearmente indipendenti.

12. Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; discutere l'esistenza di $C \in \mathbb{R}(3)$ tale che $BC = A$ e quella di $D \in \mathbb{R}(3)$ tale che $AD = B$.

13. Siano $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; calcolare $\langle A, B \rangle$, $\|A\|$, $\|B\|$.

SCHEDA ESERCIZI # 3

Numeri complessi

1. Siano $z = 4 + 3i$, $w = 7 - 5i \in \mathbb{C}$; calcolare: $3z - w$, $2z + 4w$, $2z : w$.
2. Siano $z = 3 - 6i$, $w = 1 + 2i \in \mathbb{C}$; calcolare: $\Re(2w)$, $\Im(3z)$, $z\bar{w}$, $\text{Arg}(2w^3)$, $|z + 2w|$, $3\bar{w}^2$.
3. Scrivere la forma trigonometrica dei seguenti numeri complessi: $z = 3 - 3i$, $w = 5i$, $u = 11$, $2z^3$, $3\bar{w}$, zw .
4. Risolvere le seguenti equazioni nell'incognita $z \in \mathbb{C}$:
 $z^2 - 4z + 7 = 0$, $z^5 = 243$, $z^6 = 64$, $z^5 = 2 + 2i$, $(z^3 - 1)(2z^2 + z + 1) = 0$.
5. Scomporre il binomio $x^4 + 81$ come prodotto di due polinomi reali di grado 2.
6. Calcolare i^{328} e $(-i)^{2540}$.
7. Risolvere le seguenti equazioni nell'incognita $z \in \mathbb{C}$: $\sin z = 2$, $\cos z = -2$, $e^z + 1 = 0$.
8. Siano $Z = \begin{pmatrix} -i \\ i \\ -2 \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} 2i \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$; calcolare: $3Z - 2\bar{W}$, (Z, W) , $\|2Z + W\|$.
9. Siano $A = \begin{pmatrix} 3i & 0 \\ -6 & 1 + 2i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 5i \\ -3i & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}(2)$; calcolare $A + 2B$, $A({}^t\bar{B}) - B({}^t\bar{A})$.
10. Determinare i valori di $k \in \mathbb{C}$ tali che $A(k) = \begin{pmatrix} ki & 5i \\ k & 1 \end{pmatrix}$ è hermitiana.
11. Determinare i valori di $k \in \mathbb{C}$ tali che $A(k) = \begin{pmatrix} 0 & 5i \\ k^2 & 0 \end{pmatrix}$ è antihermitiana.
12. Siano $A = \begin{pmatrix} i3 & 2i \\ i & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2i \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}(2)$; calcolare (A, B) , $\|A\|$, $\|A - 2B\|$.

SCHEDA ESERCIZI # 4**Vettori liberi - Spazi vettoriali**

1. Sia \mathcal{V} lo spazio dei vettori liberi e sia $\mathcal{B} = \{i, j, k\}$ una base di \mathcal{V} , siano $u = j + k$, $v = -i + 2k$, $w = i + 3j$; provare che $\{u, v, w\}$ è una base di \mathcal{V} .
2. Sia $\mathcal{B} = \{i, j, k\}$ una base di \mathcal{V} ortonormale e positivamente orientata e siano $u = 3i - 4j + k$, $v = 2i - 5j + 2k$, calcolare $\langle u, v \rangle$, $u \wedge v$, $\langle u - v, k \rangle$.
3. Sia $\mathcal{B} = \{i, j, k\}$ una base ortonormale e positivamente orientata di \mathcal{V} e siano $u = i - 2k$, $v = k + 3j$, $w = 2i - 3j$, calcolare: $u \wedge 2w$, $\langle 3u, v \rangle$, $\langle u - v, v \wedge w \rangle$, $u \wedge v \wedge w$.
4. Siano u , v e w i vettori liberi dell'esercizio precedente, provare che essi sono linearmente indipendenti ed esprimere $i + 2j - k$ come combinazione lineare di u , v e w .
5. Sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base di \mathcal{V} ; determinare i valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali $v_1 + \lambda v_2$, $v_1 - 2v_3$, $2v_1 - v_2 + v_3$ generano \mathcal{V} .
6. Sia $\mathcal{B} = \{i, j, k\}$ una base ortonormale e positivamente orientata di \mathcal{V} e siano $u_\lambda = i - j + \lambda k$, $v = 2i + 2j - k$, determinare i valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali $\{u_\lambda, v, u_\lambda \wedge v\}$ è una base di \mathcal{V} .
7. Sia $\mathcal{B} = \{i, j, k\}$ una base ortonormale di \mathcal{V} e siano $u = i + 2j$, $v = 4j - 3k$, determinare la proiezione ortogonale di u su v e quella di v su u .
8. Sia $\mathcal{B} = \{i, j, k\}$ una base di \mathcal{V} ortonormale e positivamente orientata; siano $u_\lambda = i + 2j - \lambda k$, $v = i - 3j - 2k$, $w = 2i + 3k$, determinare i valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali $\{u_\lambda, v, w\}$ è una base di \mathcal{V} .
9. Siano u_λ , v e w i vettori liberi dell'esercizio precedente, calcolare $\langle u_\lambda \wedge v, w \rangle$ e dare un'interpretazione geometrica del risultato ottenuto.
10. Provare che lo spazio delle matrici simmetriche reali di ordine 3 è uno spazio vettoriale reale con le operazioni di somma e moltiplicazione per scalari definite nello spazio delle matrici e calcolarne la dimensione.
11. Provare che lo spazio delle matrici antisimmetriche reali di ordine 3 è uno spazio vettoriale reale con le operazioni di somma e moltiplicazione per scalari definite nello spazio delle matrici e calcolarne la dimensione.
12. Provare che lo spazio delle matrici reali di ordine 3 con traccia nulla è uno spazio vettoriale reale con le operazioni di somma e moltiplicazione per scalari definite nello spazio delle matrici e calcolarne la dimensione.

SCHEDE ESERCIZI # 5

Sottospazi vettoriali - Applicazioni lineari

1. Dire quali dei seguenti sottoinsiemi di \mathbb{R}^2 sono sottospazi vettoriali:

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 0 \right\},$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 2y)(2x - 3y) = 0 \right\},$$

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid e^{x+2y} = \ln e \right\}.$$

2. Sia $H_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x + 3y = \lambda + 1 \right\}$; determinare i valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali H_λ è un s.s.v. di \mathbb{R}^2 .

3. Provare che l'insieme delle matrici antisimmetriche di ordine 3 forma un s.s.v. di $\mathbb{R}(3)$ e calcolarne la dimensione.

4. Sia $u_o \in \mathcal{V} \setminus \{O\}$ e sia $H = \{v \in \mathcal{V} \mid 3u_o \wedge v = O\}$; provare che H è un s.s.v. di \mathcal{V} e calcolare $\dim_{\mathbb{R}} H$.

5. Sia $H_\lambda = \left[\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \right]$; calcolare $\dim_{\mathbb{R}} H_\lambda$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

6. Sia $\mathcal{B} = \{i, j, k\}$ una base ortonormale di \mathcal{V} e sia

$H = \{v \in \mathcal{V} \mid \langle v, 2i - 3j \rangle = 0\}$, provare che H è un s.s.v. di \mathcal{V} e calcolarne la dimensione e una base.

7. Dire quali delle seguenti applicazioni sono lineari:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y + 1 \\ 2x - y \end{pmatrix}, \quad g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - 2y \\ y \end{pmatrix},$$

$$h \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ 3x - y \end{pmatrix}.$$

8. Sia $f_\lambda : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $f_\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y - \lambda z \\ 2y + 3z \\ 5x - 3y \end{pmatrix}$; per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ f_λ è lineare?

9. Sia $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ definita da $f(X) = \langle X, X_o \rangle X_o$ essendo $X_o = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; descrivere $\ker f$ e $\text{Im } f$.

10. Sia $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ definita da $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y - 4z \\ 2x + y \\ x - 3y - z \end{pmatrix}$; scrivere $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$.

11. Sia $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ definito da: $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y - 3z \\ 2x + 3z \\ 3x - 2y \end{pmatrix}$; scrivere la

matrice di f rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^3 in partenza e in arrivo, descrivere inoltre $\ker f$ e $\text{Im } f$ calcolandone la dimensione e una base.

12. Sia $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ provare che \mathcal{B} è una base di \mathbb{R}^3 e

scrivere $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbb{R}^3})$, scrivere inoltre $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(id_{\mathbb{R}^3})$ e stabilire una relazione fra le due matrici.

SCHEDE ESERCIZI # 6

Applicazioni lineari - Spazi di applicazioni lineari - Spazio duale

1. Sia $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ definita da $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y - 4z \\ x - 3y + 3z \\ x + 2y - 3z \end{pmatrix}$; scrivere $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$ e discutere l'invertibilità di f .
2. Sia $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, e sia $\mathcal{L}_A \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ definito da $\mathcal{L}_A(X) = AX$; descrivere $\ker \mathcal{L}_A$ e $\text{Im } \mathcal{L}_A$.
3. Sia $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ provare che \mathcal{B} è una base di \mathbb{R}^3 e scrivere $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbb{R}^3})$.
4. Sia $f_a \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ definito da: $f_a \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y - az \\ 2x - y - z \\ 8y \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}$; scrivere la matrice di f_a rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^3 in partenza e in arrivo; descrivere $\ker f_a$ e $\text{Im } f_a$ calcolandone la dimensione e una base al variare di a .
5. Sia $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ definito da: $f \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$; scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^3 in partenza e in arrivo; descrivere $\ker f$ e $\text{Im } f$ calcolandone la dimensione e una base.
6. Sia $H = \{f \in \text{End}(\mathbb{R}^3) \mid f(A) \subseteq B\}$ essendo: $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y = 0 \right\}$ e $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} \alpha = -2\beta \\ \beta = -\gamma \end{cases} \right\}$; calcolare la dimensione e una base di \mathcal{A} e di \mathcal{B} ; calcolare inoltre la dimensione di H .
7. Sia $H = \left\{ f \in \text{End}(\mathbb{R}^3) \mid f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, H è un sottospazio vettoriale di $\text{End}(\mathbb{R}^3)$? In caso affermativo determinarne la dimensione.
8. Sia \mathcal{V} lo spazio dei vettori liberi e sia $\mathfrak{B} = \{i, j, k\}$ una base di \mathcal{V} ortonormale e positivamente orientata, sia $f \in \text{End}(\mathcal{V})$ definito da: $f(v) = \langle v, 2j \rangle ((2i -$

$3k) \wedge (2k - 3j)$); scrivere la matrice di f rispetto alla base \mathfrak{B} in partenza e in arrivo; descrivere $\ker f$ e $\text{Im } f$ calcolandone la dimensione e una base.

9. Sia $H = \{f \in \text{End}(\mathbb{R}^3) \mid f(A) \subseteq A\}$ essendo $A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y = 0 \right\}$;

calcolare la dimensione e una base di A ; provare che H è un sottospazio vettoriale di $\text{End}(\mathbb{R}^3)$, e calcolarne la dimensione.

10. Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x + 3y + 2z$; provare che il grafico di f è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^4 , calcolarne la dimensione e una base.

11. Sia $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ provare che \mathcal{B} è una base di \mathbb{R}^2 e scrivere la base duale.

12. Sia $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ provare che \mathcal{B} è una base di \mathbb{R}^3 e scrivere la base duale.

13. Sia $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ definito: $f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^3

in partenza e in arrivo; descrivere $\ker f$ e $\text{Im } f$ calcolandone la dimensione e una base. Calcolare infine l'applicazione trasposta di f , $f^* \in \text{End}((\mathbb{R}^3)^*)$.

14. Sia $H = \{f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \mid f(A) = 0\}$ essendo $A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = z \right\}$;

provare che H è un sottospazio vettoriale di $(\mathbb{R}^3)^*$, calcolarne la dimensione e una base.

15. Sia $H = \{f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \mid f(A^\perp) = 0\}$ essendo $A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 2z \right\}$;

provare che H è un sottospazio vettoriale di $(\mathbb{R}^3)^*$, calcolarne la dimensione e una base.

SCHEDE ESERCIZI # 7

Determinante - Rango

1. Calcolare $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ e $\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Calcolare $\det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Calcolare $\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 4 & 5 & 9 \end{pmatrix}$ e $\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

4. Calcolare $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix}$.

5. Discutere l'indipendenza lineare dei seguenti elementi di \mathbb{R}^3 al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, Z(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

6. Discutere la risolubilità del seguente sistema lineare nelle incognite $x, y, z \in \mathbb{R}$ e determinare le eventuali soluzioni:

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ 3y - 2z = 0 \\ 6x - 2y + z = 1 \end{cases}.$$

7. Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -6 & -5 & -4 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; discutere la risolubilità della seguente equazione matriciale nell'incognita $X \in M_{3,2}(\mathbb{R})$:

$$BX = ({}^tA)$$

e determinare le eventuali soluzioni.

8. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; calcolare A^{-1} .

9. Sia \mathcal{V} lo spazio dei vettori liberi e sia $\mathfrak{B} = \{i, j, k\}$ una base di \mathcal{V} ortonormale e positivamente orientata, sia $f \in \text{End}(\mathcal{V})$ definito da: $f(v) = (v \wedge (2i - k))$; determinare $\det f$ e $\text{traccia}(f)$.

10. Siano $X = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; calcolare $\text{rango}(XY)$, $\text{rango}(X^tY)$ e $\text{rango}({}^tXY)$.

11. Siano $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; calcolare $\text{rango}(X^tY)$.

12. Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 7 & 8 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; calcolare $\det AB$ e $\det BA$.

13. Discutere l'indipendenza lineare dei seguenti elementi di \mathbb{R}^4 :

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

SCHEDA ESERCIZI # 8
Sistemi lineari - Autovalori e autovettori

1. Discutere la risolubilità del seguente sistema lineare nelle incognite $x, y, z \in \mathbb{R}$ al variare di $k \in \mathbb{R}$ e determinarne le eventuali soluzioni:

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = 2k \\ 4y - 3z = 0 \\ x + ky = -5 \\ x + y - z = k \end{cases}.$$

2. Discutere la risolubilità del seguente sistema lineare nelle incognite $x, y, z \in \mathbb{R}$ al variare di $h, k \in \mathbb{R}$ e determinarne le eventuali soluzioni:

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = 2k \\ 4y - 3z = h \\ x + ky = -5 \\ x + y - z = k \end{cases}.$$

3. Siano $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \\ 2 & \lambda \\ 2 & \lambda \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda & \lambda \end{pmatrix}$; discutere la risolubilità dell'equazione $BX = A$ nell'incognita $X \in M_{4,2}(\mathbb{R})$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

4. Determinare autovalori e autovettori di $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Sia $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ definito da: $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 2y + z \\ x + 3y - 3z \\ 2x - y + 4z \end{pmatrix}$; calcolare autovalori e autovettori di f e discuterne la diagonalizzabilità.

6. Sia $f_a \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ definito da: $f_a \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ x - 2y \\ 2y - az \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}$; calcolare gli autovalori di f_a e discuterne la diagonalizzabilità al variare di a .

7. Sia $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ definito da: $f \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$; scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica

di \mathbb{R}^3 in partenza e in arrivo; descrivere $\ker f$ e $\text{Im } f$ calcolandone la dimensione e una base; calcolare infine autovalori e autovettori di f e discuterne la diagonalizzabilità.

8. Sia \mathcal{V} lo spazio dei vettori liberi e sia $\mathfrak{B} = \{i, j, k\}$ una base di \mathcal{V} ortonormale e positivamente orientata, sia $f \in \text{End}(\mathcal{V})$ definito da: $f(v) = (v \wedge j) \wedge (2i+k) \wedge (2k-3j)$, $i+j-k >$; scrivere la matrice di f rispetto alla base \mathfrak{B} in partenza e in arrivo; descrivere $\ker f$ e $\text{Im } f$ calcolandone la dimensione e una base; calcolare infine autovalori e autovettori di f e discuterne la diagonalizzabilità.

9. Sia $A_k = \begin{pmatrix} 3 & 2 & k \\ 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; determinare autovalori e autovettori di A_k e discuterne la diagonalizzabilità al variare di $k \in \mathbb{R}$.

10. Sia $A \in \mathbb{R}(3)$ tale che $A + ({}^t A) = O$, dimostrare che $(5I - A) \in GL(3, \mathbb{R})$.

11. Sia $A \in \mathbb{R}(3)$ tale che $\text{Spec}(A) = \{3, -1, 2\}$; calcolare $\det A$ e $\text{traccia}(A)$.

12. Sia $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ definito da: $f(e_1) = f(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$; calcolare autovalori e autovettori di f e discuterne la diagonalizzabilità.

13. Sia $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}(2)$ e sia $f \in \text{End}(\mathbb{R}(2))$ definito da $f(X) = XA$. Calcolare autovalori e autovettori di f e discuterne la diagonalizzabilità.

14. Sia $H_\lambda = \{f \in \text{End}(\mathbb{R}^4) \mid \lambda \in \text{Spec}(f)\}$; determinare i valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali H_λ è un s.s.v. di $\text{End}(\mathbb{R}^4)$.

15. Sia $H_\lambda = \left\{ f \in \text{End}(\mathbb{R}^3) \mid \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \text{ è autovettore per } f \right\}$; determinare i valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali H_λ è un s.s.v. di $\text{End}(\mathbb{R}^3)$.

16. Sia $H = \left\{ f \in \text{End}(\mathbb{R}^3) \mid \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ è autovettore per } f \right\}$; provare che H è un s.s.v. di $\text{End}(\mathbb{R}^3)$ e calcolarne la dimensione.

17. Sia $H = \left\{ f \in \text{End}(\mathbb{R}^3) \mid \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sono autovettori per } f \right\}$; provare che H è un s.s.v. di $\text{End}(\mathbb{R}^3)$ e calcolarne la dimensione.

18. Sia $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ e sia $A = X_0 ({}^t X_0) \in \mathbb{R}(3)$; calcolare autovalori e autovettori di A e discuterne la diagonalizzabilità.

Scheda esercizi n. 9

Forme bilineari - Spazi euclidei e hermitiani

1. Sia $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(X, Y) = 3tr X (^tY)$; provare che g è una forma bilineare su \mathbb{R}^2 e scrivere la matrice associata a g rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^2 .
2. Sia g l'applicazione bilineare dell'esercizio precedente, scrivere la matrice che rappresenta g rispetto alla base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.
3. Sia $B = \{i, j, k\}$ una base ortonormale positivamente orientata dello spazio dei vettori liberi \mathcal{V} e sia $g : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(v, w) = \langle v \wedge w, i \rangle$; provare che g è una forma bilineare antisimmetrica su \mathcal{V} e scrivere la matrice che la rappresenta rispetto alla base B .
4. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}(3)$; scrivere la forma quadratica su \mathbb{R}^3 associata ad A .
5. Sia $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da: $Q \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2x^2 + 4xy + 6yz - y^2 + z^2$; provare che Q è una forma quadratica su \mathbb{R}^3 e scrivere la matrice associata a Q rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^3 .
6. Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}(3)$ e sia g_A il prodotto scalare su \mathbb{R}^3 definito da $g_A(X, Y) = (^tX)AY$; discutere la degenericità di g_A , descriverne il cono luce, descrivere $\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^\perp$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.
7. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 10 & 1 \\ 2 & 1 & 10 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}(3)$; provare che A è definita positiva e determinare una base di \mathbb{R}^3 g_A -ortonormale.
8. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & k & 2 \\ k & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 10 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}(3)$; determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali A è definita positiva.
9. Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}(3)$; sia g_A il prodotto scalare su \mathbb{R}^3 definito da $g_A(X, Y) = (^tX)AY$, provare che (\mathbb{R}^3, g_A) è uno spazio euclideo e determinare una base g_A -ortonormale di \mathbb{R}^3 .

10. Sia $\mathfrak{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$; determinare una base ortonormale di \mathbb{R}^3 , rispetto al prodotto scalare standard, applicando il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt alla base \mathfrak{B} .
11. Sia $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ definito da $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ z+x \end{pmatrix}$; calcolare l'operatore trasposto di f rispetto al prodotto scalare standard.
12. Sia $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ definito da $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x+2y+z \\ -3z+y \end{pmatrix}$; provare che f è simmetrico rispetto al prodotto scalare standard.
13. Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard nello spazio delle matrici $\mathbb{R}(3)$ definito da $\langle A, B \rangle = \text{tr}({}^t A B)$: determinare lo spazio ortogonale alla matrice identità.
14. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}(2)$ e sia h_A il prodotto hermitiano su \mathbb{C}^2 definito da $h_A(Z, W) = ({}^t Z) A \overline{W}$; provare che (\mathbb{C}^2, h_A) è uno spazio hermitiano.
15. Sia $f \in \text{End}(\mathbb{C}^2)$ definito da $f \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u \\ 5v \end{pmatrix}$; calcolare l'operatore aggiunto di f rispetto al prodotto hermitiano standard.

SCHEMA ESERCIZI # 10

Esercizi di riepilogo su teoria spettrale

1. Determinare autovalori e autovettori di $A_k = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & k & -2 \end{pmatrix}$ al variare

di $k \in \mathbb{R}$ e discuterne la diagonalizzabilità.

2. Sia $\mathcal{B} = \{i, j, k\}$ una base di \mathcal{V} e sia $f \in \text{End}(\mathcal{V})$ definito da: $f(i) = 3j - 2k$, $f(j) = i - k$, $f(k) = f(2j)$; calcolare autovalori e autovettori di f e discuterne la diagonalizzabilità.

3. Sia $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ e sia $A = I + X_0 ({}^t X_0)$; calcolare gli autovalori e gli autovettori di A e discuterne la diagonalizzabilità.

4. Sia $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ definito da: $f(X) = X ({}^t Y) - Y ({}^t X)$ essendo $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^3 in partenza e in arrivo; descrivere $\ker f$ e $\text{Im } f$ calcolandone la dimensione e una base; calcolare infine autovalori e autovettori di f e discuterne la diagonalizzabilità.

5. Sia \mathcal{V} lo spazio dei vettori liberi e sia $\mathfrak{B} = \{i, j, k\}$ una base di \mathcal{V} ortonormale e positivamente orientata, sia $f \in \text{End}(\mathcal{V})$ definito da: $f(v) = \langle (2i - k), v \rangle (j + 2k) + \langle (2i - k), (j + 2k) \rangle v$; scrivere la matrice di f rispetto alla base \mathfrak{B} in partenza e in arrivo; descrivere $\ker f$ e $\text{Im } f$ calcolandone la dimensione e una base; calcolare l'operatore trasposto di f rispetto al prodotto scalare standard su \mathcal{V} ; calcolare infine autovalori e autovettori di f e discuterne la diagonalizzabilità.

6. Sia $A \in \mathbb{R}(3)$ tale che $A^2 = O$, calcolare autovalori e autovettori di A e discuterne la diagonalizzabilità. Discutere inoltre il rango di A

7. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}(2)$, e sia $f \in \text{End}(\mathbb{R}(2))$ definito da $f(X) = AX - XA$; determinare autovalori e autovettori di f e discuterne la diagonalizzabilità.

8. Sia $A \in \mathbb{R}(3)$ tale che $\text{Spec}(A) = \{1, 2, 3\}$; calcolare $\det A^{-1}$ e $\text{traccia}(A^{-1})$.

9. Sia $X_0 \in \mathbb{R}^3$ e sia $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ definito da: $f(X) = X_0 ({}^t X) X_0$, calcolare autovalori e autovettori di f e discuterne la diagonalizzabilità.

10. Sia $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}(2)$ e sia $f \in \text{End}(\mathbb{R}(2))$ definito da $f(X) = AXA$. Calcolare autovalori e autovettori di f e discuterne la diagonalizzabilità.

11. Sia $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}(2)$ determinare $C, \Lambda \in \mathbb{R}(2)$ tali che Λ è diagonale, $C({}^t C) = I$ e $A = ({}^t C)\Lambda C$.

12. Sia $A = \begin{pmatrix} 3 & 4i \\ -4i & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}(2)$ determinare $U, \Lambda \in \mathbb{C}(2)$ tali che Λ è diagonale, $\bar{U}({}^t U) = I$ e $A = ({}^t U)\Lambda \bar{U}$.

13. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; determinare il massimo e il minimo assoluto

della funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(X) = {}^t X A X$ sull'insieme $S = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid \|X\| = 1\}$.

14. Sia $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}(2)$; determinare $B \in \mathbb{R}(2)$ simmetrica e definita positiva tale che $B^2 = A$.

15. Sia $X_k = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ e sia $A = X_k {}^t X_k \in \mathbb{R}(3)$; calcolare autovalori e autovettori di A_k , discuterne la diagonalizzabilità e calcolarne il rango al variare di $k \in \mathbb{R}$.

SCHEDA ESERCIZI # 11

Geometria analitica dello spazio: rette e piani

Negli esercizi seguenti si suppone di aver riferito lo spazio ad un sistema di assi cartesiani ortonormali positivi $\{O; x, y, z\}$ di origine O .

1. Scrivere le equazioni parametriche della retta passante per $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e

avente la direzione del vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Scrivere le equazioni della retta passante per i punti $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $Q =$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Scrivere l'equazione del piano passante per i punti: $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q =$

$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. Scrivere l'equazione cartesiana del piano perpendicolare alla retta $x = y = z$ e passante per il punto $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

5. Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali le seguenti rette sono parallele e quelle per i quali sono ortogonali:

$$\begin{cases} x + 2y = kz \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}, \begin{cases} 2x - z = 2 \\ 3y - z = 1 \end{cases}$$

6. Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la retta:

$$\begin{cases} x + y = z \\ x - y = 0 \end{cases} \text{ appartiene al piano } 2x + 2y = k.$$

7. Descrivere al variare di $k \in \mathbb{R}$ la mutua posizione delle rette r e s di equazioni:

$$\begin{cases} x + y - z = -1 \\ 3x - y + 2 = 0 \end{cases}, \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + z + k = 0 \end{cases} \text{ e determinarne la distanza.}$$

8. Date le rette $r : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 3y + z - 1 = 0 \end{cases}$, $s : \begin{cases} x - 2y = 1 \\ z - k = 0 \end{cases}$, determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali r e s sono complanari e determinare, per tali valori, l'equazione del piano che le contiene.

9. Determinare il piano contenente la retta $r : \begin{cases} x = y \\ y = 3 \end{cases}$ e perpendicolare alla retta $s : \begin{cases} x - y = 1 \\ z = 5y + 3 \end{cases}$.

10. Determinare la distanza del punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ dall'insieme

$$S = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid \|X\| = 1\}.$$

11. Date le rette: $r : \begin{cases} 2x = 1 \\ z + y = x \end{cases}$, $s : \begin{cases} y + x = 0 \\ z = 2 \end{cases}$; verificare che r e s sono sghembe e determinare l'equazione del piano π contenente r e parallelo a s e quella del piano π' contenente s e parallelo a r ; calcolare inoltre la distanza fra r e s .