APPUNTI
DI
GEOMETRIA ANALITICA

PROF.SSA

ALMA D'ANIELLO

ANNO **2018/2019**

GEOMETRIA

Introduzione. Sia Σ l'insieme dei punti dello spazio ordinario e A , B due punti di Σ, denotiamo con AB il segmento orientato di primo estremo il punto A e secondo estremo il punto B. Osserviamo quindi che il segmento di estremi A e B è il sostegno di due segmenti orientati: il segmento orientato AB e il segmento orientato BA. Fissata una unità di misura u, ha senso parlare di lunghezza, direzione e verso di un segmento orientato AB.

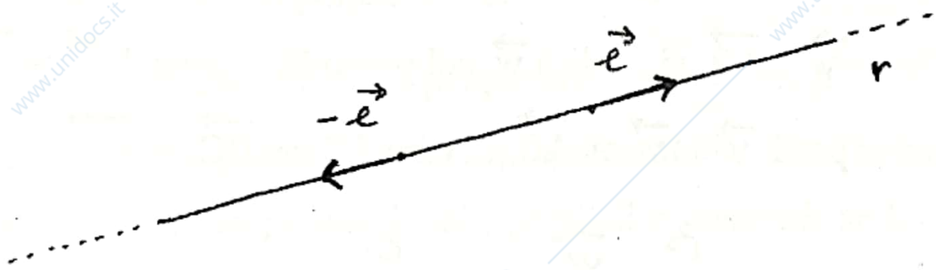
Definizione: Due segmenti orientati AB e CD si dicono **equipollenti** se hanno stessa lunghezza, stessa direzione e stesso verso. Scriviamo allora

$$AB \equiv CD$$

Definizione: Se AB è un segmento orientato, diciamo **vettore libero** di Σ individuato dal segmento orientato AB , e denotiamo con $\overrightarrow{AB}$, l'insieme costituito da tutti i segmenti orientati equipollenti ad AB. E' evidente che segmenti orientati equipollenti individuano lo stesso vettore libero di Σ, ovvero se $AB \equiv CD$ allora $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ e viceversa. Se $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, diciamo che il segmento orientato AB rappresenta il vettore $\vec{v}$ applicato nel punto A. L'insieme dei vettori liberi di Σ sarà denotato con $\vec{\Sigma}$. Allo stesso modo se r è una retta, se π è un piano denotiamo con $\vec{r}$ l'insieme dei vettori liberi di r e con $\vec{\pi}$ l'insieme dei vettori liberi di π. Se $\vec{v}$ è un vettore libero di Σ e P è un punto qualunque di Σ esiste un unico punto Q tale che $\overrightarrow{PQ} = \vec{v}$, ovvero un vettore libero $\vec{v}$ si può rappresentare con l'origine in un qualunque punto di Σ. Si dice segmento orientato nullo un segmento in cui primo estremo e secondo estremo coincidono. L'insieme dei segmenti orientati nulli si denota con $\vec{0}$ e si dice **vettore nullo** di Σ. Il vettore $\overrightarrow{BA}$ si dice **opposto** del vettore $\overrightarrow{AB}$ e si scrive $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Si dice **lunghezza** di un vettore $\vec{v}$ e si denota con $\|\vec{v}\|$ la lunghezza di un qualunque segmento orientato che rappresenta il vettore $\vec{v}$. Si dice **versore** o **vettore unitario** di Σ un vettore di lunghezza 1. Si dice **angolo** dei vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ l'angolo $\theta \in [0, \pi]$ che essi formano quando sono applicati nello stesso punto. Due vettori liberi si dicono **paralleli** se hanno la stessa direzione, **paralleli e concordi** se hanno la stessa direzione e lo stesso verso, **paralleli e discordi** se hanno la stessa direzione ma verso opposto.

Osserviamo che se r è una retta ci sono solo due versori appartenenti alla retta e sono l'uno l'opposto dell'altro.



La retta r si può orientare in due modi, o concordemente al versore $\vec{e}$ o concordemente al versore $-\vec{e}$.

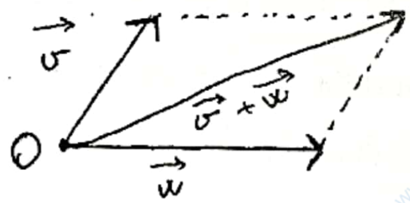
Somma di vettori liberi. Siano $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vettori di Σ. Definiamo il vettore somma $\vec{v} + \vec{w}$. Distinguiamo tre casi:

a) $\vec{v}$ e $\vec{w}$ hanno la stessa direzione e lo stesso verso. Allora $\vec{v} + \vec{w}$ è il vettore che ha la stessa direzione e lo stesso verso e come lunghezza la somma delle lunghezze.

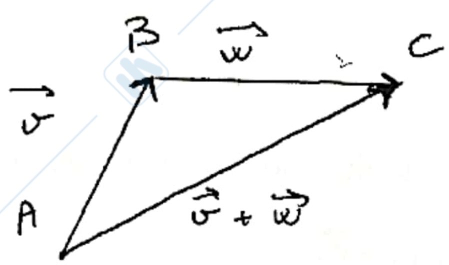
b) $\vec{v}$ e $\vec{w}$ hanno la stessa direzione e verso opposto. Allora $\vec{v} + \vec{w}$ è il vettore che ha la stessa direzione, verso del maggiore e come lunghezza la differenza delle lunghezze.

c) $\vec{v}$ e $\vec{w}$ non hanno la stessa direzione. Il vettore somma $\vec{v} + \vec{w}$ si può individuare in due modi:

1) si applicano i vettori nello stesso punto O i poi si usa la "regola del parallelogrammo"



2) Posto $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, si applica $\vec{w}$ nel punto B, ottenendo $\vec{w} = \overrightarrow{BC}$ e poi si pone $\vec{v} + \vec{w} = \overrightarrow{AC}$, ovvero $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



Si vede che ($\vec{\Sigma}$, +) è un gruppo commutativo: valgono la proprietà associativa e commutativa, il vettore nullo $\vec{0}$ è l'elemento neutro, se $\vec{v}$ = $\overrightarrow{AB}$ allora $-\vec{v} = -\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ è l'opposto di $\vec{v}$.

Osserviamo che se r è una retta e π è un piano, la somma di due vettori (liberi) di r è un vettore (libero) di r, la somma di due vettori liberi di π è un vettore (libero) di π, ottenendo, con analoghe considerazioni, che ($\vec{r}$, +) e ($\vec{\pi}$, +) sono gruppi commutativi.

Prodotto di uno scalare (numero reale) per un vettore libero. Sia $\vec{v} \in \vec{\Sigma}$ e $h \in R$. Definiamo il prodotto $h\vec{v}$ di uno scalare per un vettore. Distinguiamo tre casi:

a) $h > 0$. Se $h > 0$ allora $h\vec{v}$ è un vettore che ha la stessa direzione e lo stesso verso di $\vec{v}$ e $\| h\vec{v} \| = h \| \vec{v} \|$.

b) $h < 0$. Se $h < 0$ allora $h\vec{v}$ è un vettore che ha la stessa direzione di $\vec{v}$, verso opposto, e $\| h\vec{v} \| = |h| \; \| \vec{v} \| = (-h) \| \vec{v} \|$.

c) $h = 0$. Se $h = 0$ si pone $0 \vec{v} = \vec{0}$.

Due vettori v e w si dicono **proporzionali** se esiste h R tale che $\vec{w} = h\vec{v}$. Interpretazione geometrica della proporzionalità: due vettori sono paralleli se e solo se sono proporzionali, paralleli e concordi se $h > 0$, paralleli e discordi se $h < 0$.

Con le due operazioni ora definite gli insiemi $\vec{r}$, $\vec{\pi}$ e $\vec{\Sigma}$ risultano essere modelli di spazio vettoriale sul campo reale.

Prodotto scalare. Siano $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vettori geometrici, si può dimostrare che l'operazione definita da

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \, \|\vec{w}\| \cos\theta$$

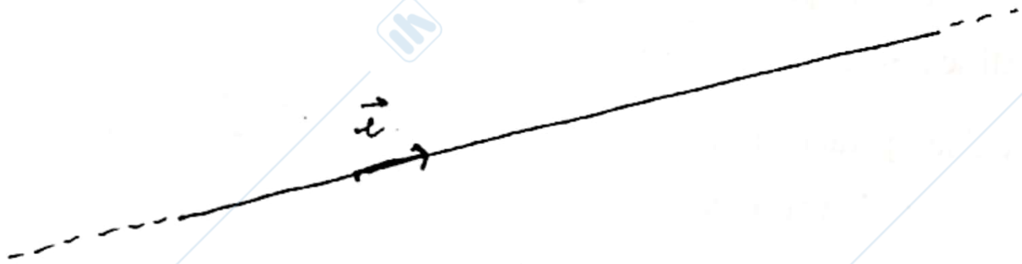
dove $\|\vec{v}\|$ e $\|\vec{w}\|$ sono le lunghezze dei due vettori e θ è l'angolo dei due vettori, è un prodotto scalare nello spazio vettoriale $\vec{\Sigma}$ e nello spazio vettoriale $\vec{\pi}$ dei vettori di un piano π. Quindi $\vec{\Sigma}$ e $\vec{\pi}$ sono esempi di spazio vettoriale euclideo. Osserviamo che rispetto a questa operazione di prodotto scalare

1) il significato geometrico della norma è proprio la lunghezza di un vettore infatti $\sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \|\vec{v}\|$

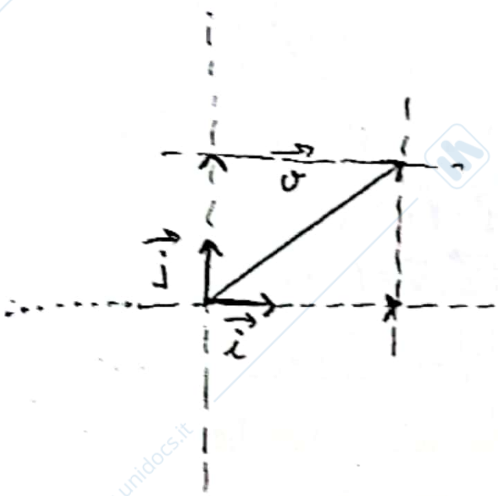
2) l'angolo "algebrico" e l'angolo geometrico coincidono

$$\cos\theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \, \|\vec{w}\|}$$

Basi e dimensione di $\vec{r}$, $\vec{\pi}$ e $\vec{\Sigma}$. Sia $\vec{r}$ lo spazio vettoriale dei vettori liberi di una retta r ed $\vec{e}$ un versore di r. Si vede facilmente che ogni altro vettore $\vec{v}$ di r è proporzionale ad $\vec{e}$, più precisamente se $\vec{v}$ è parallelo e concorde ad e allora $\vec{v} = \|\vec{v}\| \, \vec{e}$, se $\vec{v}$ è parallelo e discorde ad e allora $\vec{v} = -\|\vec{v}\|$ e , quindi $B = \{\vec{e}\}$ è una base di $\vec{r}$ e quindi $\dim \vec{r} = 1$.

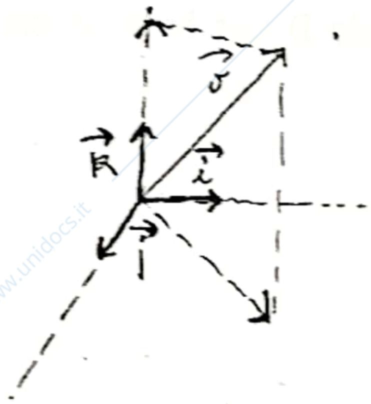


Sia $\vec{\pi}$ lo spazio vettoriale dei vettori liberi di un piano π. Sia $B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ un insieme ortonormale di vettori di π, allora B è linearmente indipendente e ogni vettore $\vec{v} \in \vec{\pi}$ è combinazione lineare di $\vec{i}$ e $\vec{j}$ perché somma di un vettore parallelo a $\vec{i}$ e di un vettore parallelo a $\vec{j}$, ovvero $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$



Segue che B è una base ortonormale di $\vec{\pi}$, $\dim \vec{\pi} = 2$ e $\vec{v} \underset{B}{\equiv} (x,y)$.

Sia $\vec{\Sigma}$ lo spazio vettoriale dei vettori liberi dello spazio ordinario. Sia $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ un insieme ortonormale di vettori di Σ allora B è linearmente indipendente e ogni vettore $\vec{v} \in \vec{\Sigma}$ è combinazione lineare di $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ perché somma di un vettore appartenente al piano individuato da $\vec{i}$ e $\vec{j}$ e di un vettore parallelo a $\vec{k}$, ovvero $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.



Segue che B è una base ortonormale di $\vec{\Sigma}$, $\dim \vec{\Sigma} = 3$ e $\vec{v} \underset{B}{\equiv} (x,y,z)$.

Teorema . a) Se B = $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ è una base ortonormale di un piano π, $\vec{v} \underset{B}{\equiv} (x, y)$, $\vec{w} \underset{B}{\equiv} (x', y')$ allora il prodotto scalare $\vec{v} \cdot \vec{w}$ coincide con il prodotto scalare standard delle coordinate ovvero $\vec{v} \cdot \vec{w} = xx' + yy'$. Segue allora anche che

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \cos\vartheta = \frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

b) Se B = $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ è una base ortonormale di $\vec{\Sigma}$, $\vec{v} \underset{B}{\equiv} (x,y,z)$, $\vec{w} \underset{B}{\equiv} (x',y',z')$, allora il prodotto scalare $\vec{v} \cdot \vec{w}$ coincide con il prodotto scalare standard delle coordinate ovvero $\vec{v} \cdot \vec{w} = xx'+yy'+zz'$. Segue allora anche che

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad \cos\vartheta = \frac{xx'+yy'+zz'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$$

Questo risultato è particolarmente significativo perché ci dice che conoscendo le coordinate dei vettori rispetto ad una base ortonormale possiamo determinare per via algebrica la lunghezza di un vettore e avere informazioni sull'angolo formato da due vettori.

Dimostrazione. a) Basta osservare che essendo B una base ortonormale dalle proprietà del prodotto scalare segue

$\vec{v} \cdot \vec{w} = (x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j}) = xx' + yy'$.

b) Analoga alla precedente.

Prodotto vettoriale. Detto $\vec{\Sigma}$ lo spazio vettoriale dei vettori liberi dello spazio ordinario Σ, fissata una base ortonormale $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ di $\vec{\Sigma}$, detti $\vec{u} \equiv (a_1, a_2, a_3)$

e $\vec{v} \equiv (b_1, b_2, b_3)$, così come fatto in R^3, si definisce il <u>prodotto vettoriale</u> $\vec{u} \times \vec{v}$ dove

$$\vec{u} \times \vec{v} \underset{B}{\equiv} \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

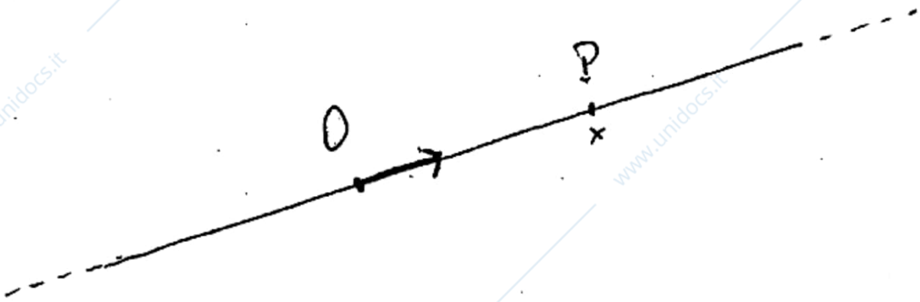
Valgono naturalmente le stesse proprietà del prodotto vettoriale in R^3.

Si osservi inoltre che $\| \vec{u} \times \vec{v} \|$ è l'area del parallelogrammo che ha per lati i due vettori.

Geometria analitica nel piano

1. Riferimento cartesiano

Un riferimento cartesiano su una retta r è una coppia $C = (O, \vec{i})$ dove O è un punto di r , detto origine del riferimento, e $\vec{i}$ è un versore di r. Dato un punto P di r si dice ascissa del punto P il numero reale x tale che $\overrightarrow{OP} = x\vec{i}$.



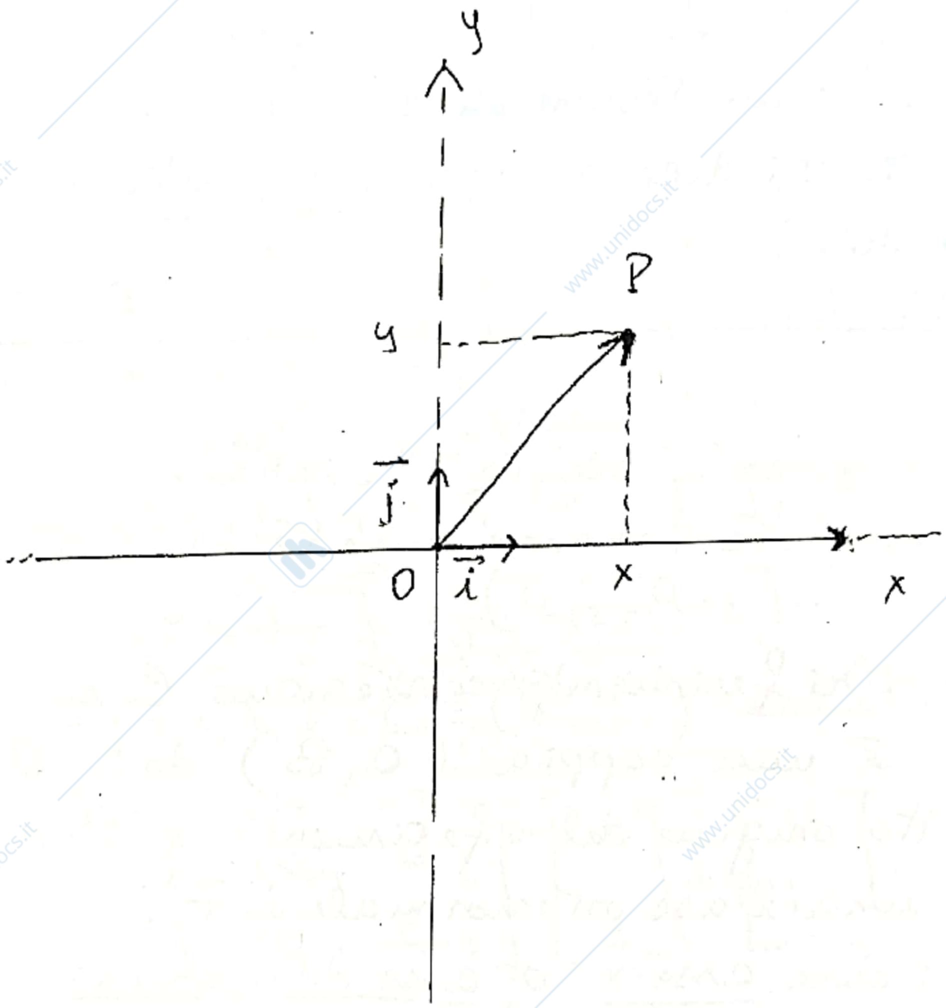
Con questa scelta la retta r risulta orientata concordemente al vettore $\vec{i}$.

Un riferimento cartesiano C su un piano π è una coppia (O, B) dove $O \in \pi$ è detto origine del riferimento e $B = \{ \vec{i} , \vec{j} \}$ è una base ortonormale di $\vec{\pi}$.

Si dice asse x o asse delle ascisse la retta per O parallela e concorde al vettore $\vec{i}$, si dice asse y o asse delle ordinate la retta per O parallela e concorde al vettore $\vec{j}$. Dato un punto $P \in \pi$ si dicono coordinate cartesiane del punto P le coordinate del vettore $\overrightarrow{OP}$ rispetto alla base B di $\vec{\pi}$. Se $\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j}$ scriviamo $P \equiv_{\mathcal{C}} (x , y)$, o semplicemente $P \equiv (x , y)$, x si dice ascissa del punto P, y si dice ordinata del punto P.

Teorema. Se $P \underset{\mathcal{E}}{\equiv} (x_1, y_1)$ e $Q \underset{\mathcal{E}}{\equiv} (x_2, y_2)$ allora $PQ \underset{\mathcal{B}}{\equiv} (x_2-x_1, y_2-y_1)$.

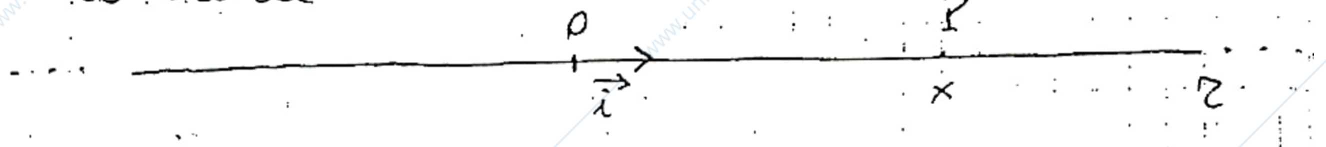
Dim. Basta osservare che $PQ = PO + OQ = OQ - OP$ e quindi le coordinate di PQ sono la differenza tra le coordinate di OQ e le coordinate di OP.



Geometria analitica nel piano

1. Riferimento cartesiano

Un riferimento cartesiano su una retta r è una coppia $\mathcal{R} = (O, \vec{i})$ dove O è un punto di r, detto origine del riferimento e $\vec{i}$ è un versore di r. Dato un punto P di r si dice ascissa del punto P il numero reale x tale che $\vec{OP} = x\vec{i}$



Con questa scelta la retta r risulta orientata concordemente al vettore $\vec{i}$.

Un riferimento cartesiano $\mathcal{R}$ su un piano π è una coppia $(O, \mathcal{B})$ dove $O \in \pi$ è detto origine del riferimento e $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ è una base ortonormale di $\vec{\pi}$.

Si dice asse x o asse delle ascisse la retta per O parallela e concorde al vettore $\vec{i}$, si dice asse y o asse delle ordinate la retta per O parallela e concorde al vettore $\vec{j}$. Dato un punto $P \in \pi$ si dicono coordinate cartesiane del punto P le coordinate del vettore $\vec{OP}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Se $\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j}$ scriviamo $P \underset{\mathcal{C}}{\equiv} (x, y)$, o semplicemente $P \equiv (x, y)$, x si dice <u>ascisse</u> del punto P, y si dice <u>ordinate</u> del punto P.

Osserviamo che se $P \equiv (x_1, y_1)$ e $Q \equiv (x_2, y_2)$ allora essendo $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$ risulta $\overrightarrow{PQ} \underset{\mathcal{B}}{\equiv} (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

2. Cambiamenti di riferimento

Sia π un piano, $\mathcal{C} = (O, \mathcal{B})$ e $\mathcal{C}' = (O', \mathcal{B}')$ due riferimenti cartesiani di π.
Sia $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$, $\mathcal{B}' = \{\vec{i}', \vec{j}'\}$, $O \underset{\mathcal{C}'}{\equiv} (b_1, b_2)$
$\vec{i} \underset{\mathcal{B}'}{\equiv} (a_{11}, a_{21})$, $\vec{j} \underset{\mathcal{B}'}{\equiv} (a_{12}, a_{22})$. Allora se $P \underset{\mathcal{C}}{\equiv} (x, y)$ e $P \underset{\mathcal{C}'}{\equiv} (x', y')$ risulta

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

oppure in forma scalare

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + b_2 \end{cases} \qquad (1)$$

Le (1) si dicono formule di trasformazione delle coordinate nel passaggio dal riferimento $\mathcal{C}$ al riferimento $\mathcal{C}'$.

La matrice $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ si dice matrice di passaggio dal riferimento $\mathcal{E}$ al riferimento $\mathcal{E}'$. Si può dimostrare che A^{-1} è la matrice di passaggio dal riferimento $\mathcal{E}'$ al riferimento $\mathcal{E}$.

3. Rappresentazione di una retta nel piano

Sia π un piano, $\mathcal{E}$ un riferimento cartesiano di π. Data una retta r si dicono numeri o parametri direttori di r le coordinate di un vettore non nullo parallelo alla retta r. Si osservi che i parametri direttori di una retta sono definiti a meno di un coefficiente di proporzionalità.

Se r è una retta orientata si dicono parametri direttori di r le coordinate di un vettore non nullo parallelo e concorde a r.

Si dicono coseni direttori di r le coordinate di un versore parallelo e concorde a r.

Date due rette orientate r ed s, l'una parallela e concorde al vettore $\vec{v} \equiv (l, m)$, l'altra parallela e concorde al vettore $\vec{w} \equiv (l', m')$, si dice angolo delle due rette r ed s l'angolo formato dai vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

Teorema. I coseni direttori di una retta r sono i coseni degli angoli che la retta forma con gli assi coordinati.

Dim. Sia $\vec{v} \equiv (l, m)$ un vettore parallelo e concorde a r allora $\vec{e} \equiv \left(\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2}}, \frac{m}{\sqrt{l^2+m^2}}\right)$ è un versore parallelo e concorde a r. Il vettore $\vec{i} \equiv (1, 0)$ è parallelo e concorde all'asse x, il vettore $\vec{j} \equiv (0, 1)$ è parallelo e concorde all'asse y. Allora

$$\cos \widehat{rx} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{i}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{i}\|} = \frac{l}{\sqrt{l^2+m^2}} \quad e$$

$$\cos \widehat{ry} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{j}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{j}\|} = \frac{m}{\sqrt{l^2+m^2}} \quad c.v.d.$$

Si osservi che $\tan \widehat{rx} = \frac{m}{l}$

Seguono facilmente dalla definizione le condizioni di parallelismo e ortogonalità tra due rette.

Teorema. Date due rette r ed s di numeri direttori (l, m) e (l', m') rispettivamente allora

(a) $r \parallel s \iff \exists h \in \mathbb{R}$ tale che $(l', m') = h(l, m)$

(b) $r \perp s \iff l l' + m m' = 0$.

Si osservi che per determinare i numeri direttori di una retta basta conoscere due punti A e B della retta, infatti il vettore $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ è naturalmente parallelo alla retta.

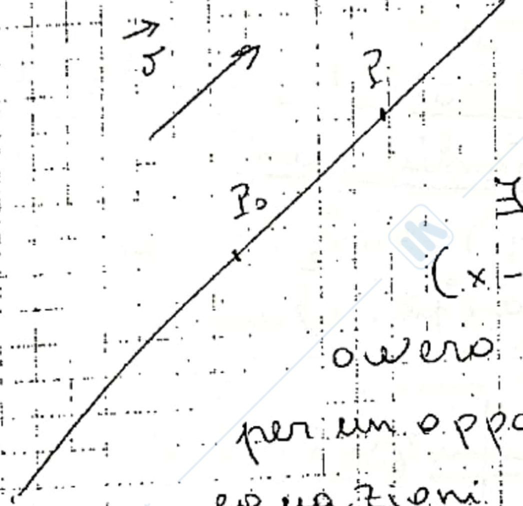
4. Equazioni parametriche e cartesiane di una retta del piano parallela agli assi coordinati

Nel seguito per semplicità diremo il punto (x,y) intendendo il punto di coordinate (x,y). Osserviamo che l'asse x ha equazione cartesiana $y=0$ (si dice equazione cartesiana della retta perché i punti della retta sono le soluzioni della equazione) e numeri direttori $(1,0)$, l'asse y ha equazione $x=0$ e numeri direttori $(0,1)$. Sia r una retta parallela all'asse x e passante per il punto $P \equiv (0,c)$ allora r ha equazione (cartesiana) $y-c=0$ ed equazioni parametriche $\begin{cases} x=h \\ y=c \end{cases}$, $h \in \mathbb{R}$ (si dicono equazioni parametriche perché i punti della retta si ottengono assegnando valori ad h).

Sia s una retta parallela all'asse y e passante per il punto $P \equiv (c,0)$ allora s ha equazione $x-c=0$ oppure in forma parametrica $\begin{cases} x=c \\ y=h \end{cases}$, $h \in \mathbb{R}$

5. Equazioni parametriche e cartesiane di una retta del piano

Sia r una retta passante per un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$, parallela al vettore $\vec{v} \equiv (l, m)$ (si osservi che se r non è parallela agli assi coordinati, l ed m sono entrambi diversi da 0). Allora il punto $P \equiv (x, y)$ appartiene alla retta r se e solo se il vettore $\overrightarrow{P_0P}$ è parallelo a $\vec{v}$ ovvero se e solo se $\exists\, h \in \mathbb{R}$ tale che $\overrightarrow{P_0P} = h\vec{v}$



Passando alle coordinate si ha che $P \in r$ se e solo se $\exists\, h \in \mathbb{R}$ tale che

$$(x - x_0, y - y_0) = h\,(l, m)$$

ovvero se e solo se x e y verificano per un opportuno $h \in \mathbb{R}$ le seguenti equazioni

$$\begin{cases} x = x_0 + h\,l \\ y = y_0 + h\,m \end{cases}, \quad h \in \mathbb{R}$$

Queste equazioni si dicono equazioni parametriche della retta r. Per ciascun valore assegnato ad h si ottiene un punto di r.

Osserviamo che è anche

$\overrightarrow{P_0P} = h\vec{v}$ se e solo se $\begin{vmatrix} x - x_0 & l \\ y - y_0 & m \end{vmatrix} = 0$

Sviluppando questo determinante si ottiene una equazione del tipo $ax + by + c = 0$

Scanned with CamScanner

che si dice *equazione cartesiana* della retta r.

I punti di r sono tutti e soli i punti le cui coordinate sono soluzione di questa equazione. (16)

Osserviamo che $(l, m) = (-b, a)$.

In conclusione per determinare le equazioni parametriche e cartesiane di una retta basta conoscere un punto e i numeri direttori.

Se conosciamo due punti $P_1 \equiv (x_1, y_1)$ e $P_2 \equiv (x_2, y_2)$ della retta r, il vettore $\overrightarrow{P_1P_2}$ è parallelo alla retta, quindi una coppia di numeri direttori della retta è data da

$$(l, m) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

Si ottengono così le *equazioni parametriche e cartesiane della retta per due punti*

$$\begin{cases} x = x_1 + h(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + h(y_2 - y_1) \end{cases}$$ e

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & x_2 - x_1 \\ y - y_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0$$

6. Fascio di rette

Dato un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ si dice **fascio di rette di centro P_0**, l'insieme $\mathcal{F}$ di tutte le rette del piano passanti per P_0. Si prova che se $r: ax+by+c=0$ e $s: a'x+b'y+c'=0$ sono due rette del fascio allora l'equazione del fascio è

$$\mathcal{F}: h(ax+by+c)+k(a'x+b'y+c')=0.$$

Al variare di h e k in $\mathbb{R}$ si ottengono tutte le rette del fascio.

Appartengono al fascio $\mathcal{F}$ le due rette r ed s di equazioni rispettivamente $x-x_0=0$ e $y-y_0=0$, la forma più semplice per l'equazione del fascio $\mathcal{F}$ è quindi

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0 \quad , \; a \text{ e } b \in \mathbb{R}$$

7. Distanza tra due punti

Siano $P \equiv (x_1, y_1)$ e $Q \equiv (x_2, y_2)$ due punti di un piano π, la distanza tra i due punti P e Q, denotata con $d(P,Q)$ non è altro che la lunghezza del vettore $\overrightarrow{PQ}$.

Si ha quindi:

$$d(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Alcuni modelli di esercizi nel piano

1) Determinare punti e parametri direttori di una retta

2) Determinare i coseni direttori di una retta orientata.

3) Data una retta e un punto determinare:

a) la retta per il punto parallela alla retta data

b) " " " ortogonale " " "

4) Equazioni parametriche e cartesiane della retta per due punti assegnati.

Geometria analitica nello spazio ordinario Σ

1. Quanto detto in un piano π si può ripetere con le ovvie modifiche nello spazio ordinario Σ.
Un riferimento cartesiano R nello spazio ordinario Σ è una coppia $(O, \mathcal{B})$ dove O è un punto di Σ, detto origine del riferimento, e $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ è una base ortonormale dello spazio vettoriale $\vec{\Sigma}$.
Si dice asse x o asse delle ascisse la retta per O parallela e concorde al vettore $\vec{i}$, si dice asse y o asse delle ordinate la retta per O parallela e concorde al vettore $\vec{j}$, si dice asse z o asse delle quote la retta per O parallela e concorde al vettore $\vec{k}$. I numeri direttori dell'asse x sono $(1,0,0)$, quelli dell'asse y sono $(0,1,0)$, quelli dell'asse z sono $(0,0,1)$.
Dato un punto $P \in \Sigma$ si dicono coordinate cartesiane del punto P le coordinate del vettore $\vec{OP}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.
Se $\vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, scriviamo $P \underset{R}{\equiv} (x,y,z)$ o, più semplicemente, $P \equiv (x,y,z)$.
Osserviamo che se $P \equiv (x_1, y_1, z_1)$ e $Q \equiv (x_2, y_2, z_2)$, allora, essendo $\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP}$ risulta
$$\vec{PQ} \underset{\mathcal{B}}{\equiv} (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

2. Cambiamenti di riferimento

Siano $\mathcal{C} = (O, \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\})$ e $\mathcal{C}' = (O', \{\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\})$ due riferimenti cartesiani di Σ - Sia inoltre

$$\vec{i} \underset{\mathcal{B}'}{\equiv} (a_{11}, a_{21}, a_{31})$$

$$\vec{j} \underset{\mathcal{B}'}{\equiv} (a_{12}, a_{22}, a_{32})$$

$$\vec{k} \underset{\mathcal{B}'}{\equiv} (a_{13}, a_{23}, a_{33})$$

$$O \underset{\mathcal{C}'}{\equiv} (b_1, b_2, b_3)$$

Allora se $P \underset{\mathcal{C}}{\equiv} (x, y, z)$ e $P \underset{\mathcal{C}'}{\equiv} (x', y', z')$ risulta

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

oppure in forma scalare

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + b_1 \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + b_2 \\ z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + b_3 \end{cases} \quad (1)$$

Le (1) si dicono formule di trasformazione delle coordinate. La matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

si dice matrice di passaggio dal riferimento $\mathcal{C}$ al riferimento $\mathcal{C}'$ - Si può dimostrare

Scanned with CamScanner

che A è invertibile e che A^{-1} è la matrice di passaggio dal riferimento $\mathcal{R}'$ al riferimento $\mathcal{R}$.
Se $|A|>0$ i riferimenti $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ si dicono concordi, se $|A|<0$ i riferimenti $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ si dicono discordi.

3. Rappresentazione di una retta nello spazio ordinario Σ

Riportiamo solo le differenze dipendenti dal fatto che Σ ha dimensione 3.

Teorema. I coseni direttori di una retta r sono i coseni degli angoli che la retta forma con gli assi coordinati.

Dim. Sia $\vec{v} \equiv (l, m, n)$ un vettore parallelo e concorde a r ((l, m, n) sono quindi i numeri direttori di r) allora

$$\vec{e} = \left(\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}, \frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}, \frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}} \right)$$

è un versore parallelo e concorde a r.
Il vettore $\vec{i} \equiv (1,0,0)$ è parallelo e concorde all'asse x, il vettore $\vec{j} \equiv (0,1,0)$ è parallelo e concorde all'asse y, il vettore $\vec{k} \equiv (0,0,1)$ è parallelo e concorde all'asse z. Allora

$$\cos \widehat{rx} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{i}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{i}\|} = \frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

$$\cos \widehat{ry} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{j}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{j}\|} = \frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

$$\cos r\hat{z} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{k}}{\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{k}\|} = \frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$ c.v.d. ②

<u>Teorema</u>. Date due rette r ed s di numeri direttori (l, m, n) e (l', m', n') rispettivamente allora

(a) $r \parallel s \iff \exists\, h \in \mathbb{R}$ tale che $(l', m', n') = h(l, m, n)$

(b) $r \perp s \iff l l' + m m' + n n' = 0$

<u>Osservazione</u>. Una retta r è ortogonale all'asse x se e solo se $l = 0$, è ortogonale all'asse y se e solo se $m = 0$, è ortogonale all'asse z se e solo se $n = 0$.
Una retta r è parallela all'asse x se $m = n = 0$, è parallela all'asse y se $l = n = 0$, è parallela all'asse z se $l = m = 0$.

4. <u>Equazioni parametriche e cartesiane di una retta dello spazio</u>

Osserviamo che l'asse x ha equazioni cartesiane $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, e numeri direttori $(1, 0, 0)$

l'asse y ha equazioni cartesiane $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ e numeri direttori $(0, 1, 0)$, l'asse z ha equazioni cartesiane $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ e numeri direttori $(0, 0, 1)$. Si osservi che per ottenere le equazioni cartesiane di una retta nello spazio ci vogliono 2 equazioni.

Sia r una retta passante per un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$, parallela al vettore $\vec{v} \equiv (l, m, n)$. Allora un punto $P \equiv (x, y, z)$ appartiene alla retta r se e solo se il vettore $\overrightarrow{P_0P}$ è parallelo a $\vec{v}$ ovvero se e solo se $\exists\, h \in \mathbb{R}$ tale che $\overrightarrow{P_0P} = h\vec{v}$. Passando alle coordinate si ha che $P \in r$ se e solo se $\exists\, h \in \mathbb{R}$ tale che

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = h(l, m, n)$$

ovvero se e solo se x e y verificano per un opportuno $h \in \mathbb{R}$ le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x = x_0 + hl \\ y = y_0 + hm \quad , \; h \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + hn \end{cases}$$

Queste equazioni si dicono <u>equazioni parametriche della retta</u> r, perché i punti di r si ottengono assegnando valori al parametro h. Se si ricava h da una delle equazioni e si sostituisce nelle altre due si ottiene un sistema di 2 equazioni in 3 incognite ovvero un sistema del tipo

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Queste equazioni si dicono <u>equazioni cartesiane</u> della retta r. I punti di r sono tutti e soli i punti dello spazio

Scanned with CamScanner

cui coordinate sono soluzione di questo sistema.

Note le equazioni parametriche di una retta per determinare una terna di numeri direttori della retta basta considerare i coefficienti del parametro. Meno semplice è determinare i numeri direttori di una retta di cui sono note le equazioni cartesiane.

Si può dimostrare che se

$$r: \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

allora

$$l = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}, \quad m = -\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}, \quad n = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}.$$

Se conosciamo due punti $P_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 \equiv (x_2, y_2, z_2)$ della retta r, il vettore $\overrightarrow{P_1P_2}$ è parallelo alla retta, quindi una terna di numeri direttori della retta è data da

$$(l, m, n) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

Si ottengono così le <u>equazioni parametriche della retta per due punti</u>:

$$\begin{cases} x = x_1 + h(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + h(x_2 - x_1) \\ z = z_1 + h(z_2 - z_1) \end{cases}$$

5. Rette sghembe e rette complanari

Siano $r: \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \end{cases}$

ed $s: \begin{cases} a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 = 0 \\ a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 = 0 \end{cases}$

due rette dello spazio.
Condizione necessaria e sufficiente affinché r ed s risultino complanari è che sia

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = 0$$

si ragiona sulle soluzioni del sistema e sui ranghi

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

6. Piani di Σ

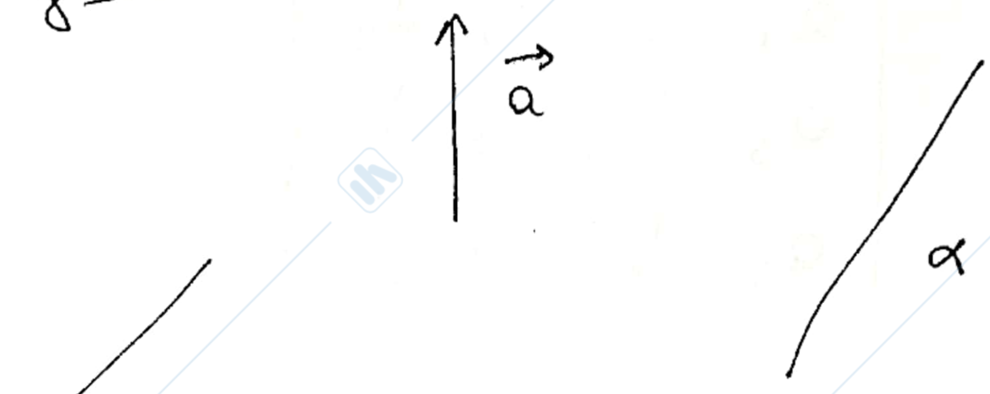
Ogni piano α dello spazio si rappresenta mediante una equazione lineare in 3 incognite ovvero mediante una equazione del tipo:

$$ax + by + cz + d = 0$$

dove $\vec{a} = (a, b, c)$ è un vettore ortogonale al piano.

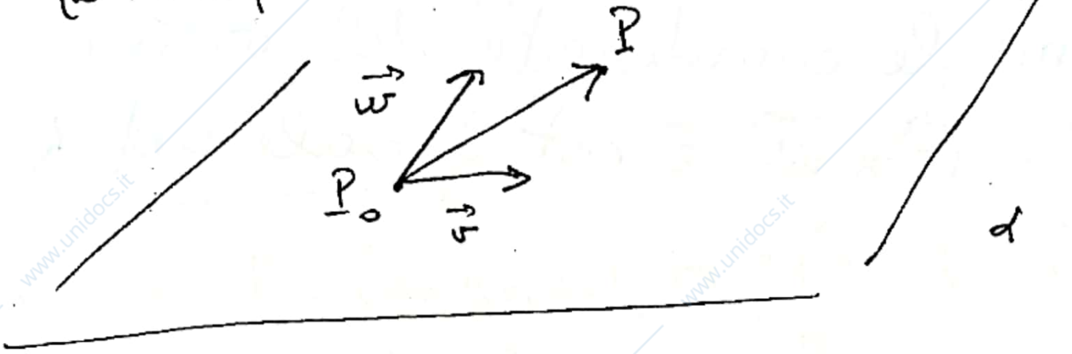
(L'equazione di un piano è naturalmente definita a meno di un coeff. di prop.

(a, b, c) si dicono parametri di giacitura del piano α



<u>Dim.</u> Sia $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0) \in \alpha$ e $\vec{v} \equiv (l, m, n)$, $\vec{w} \equiv (l', m', n')$ due vettori paralleli ad α applicati nel punto P_0 (*)

(*) (e non paralleli tra loro)



Sia $P \equiv (x, y, z) \in \Sigma$ allora

$P \in \alpha \iff \overrightarrow{P_0P}$ è comb. lin. di $\vec{v}$ e $\vec{w}$

$\iff (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ è comb. lineare di (l, m, n) e $(l', m', n') \iff$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & l & l' \\ y - y_0 & m & m' \\ z - z_0 & n & n' \end{vmatrix} = 0$$

Sviluppando il determinante si ha:

$P \equiv (x, y, z) \in \alpha \iff$

$$\begin{vmatrix} m & m' \\ n & n' \end{vmatrix} (x - x_0) + \left(- \begin{vmatrix} l & l' \\ n & n' \end{vmatrix} \right) (y - y_0) + \begin{vmatrix} l & l' \\ m & m' \end{vmatrix} (z - z_0) = 0$$

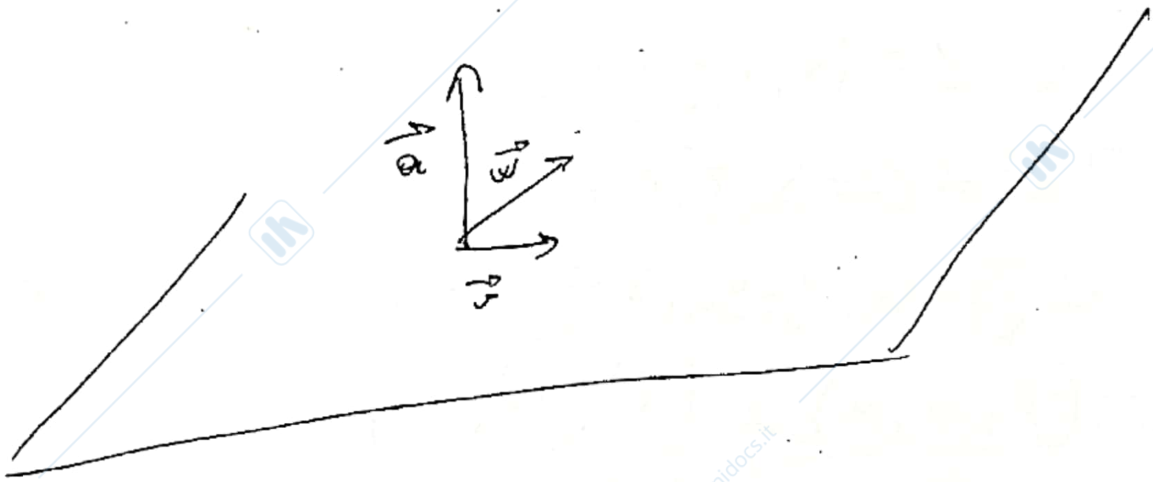
che è una equazione del tipo:

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \text{con}$$

$$a = \begin{vmatrix} m & m' \\ n & n' \end{vmatrix} \quad b = -\begin{vmatrix} l & l' \\ n & n' \end{vmatrix} \quad c = \begin{vmatrix} l & l' \\ m & m' \end{vmatrix}$$

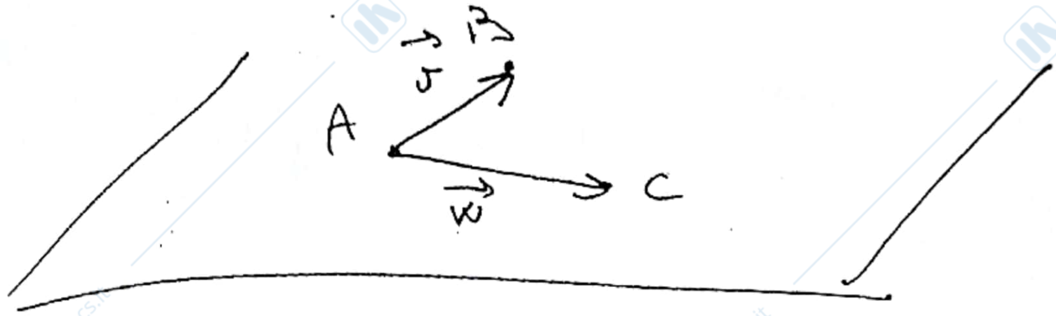
sono le coordinate del vettore

$\vec{a} = \vec{v} \times \vec{w}$ è ortogonale ad α



7. Caso particolare:

Piano per 3 punti non allineati



Siano $A \equiv (x_0, y_0, z_0)$, $B \equiv (x_1, y_1, z_1)$ e $C \equiv (x_2, y_2, z_2)$ allora i vettori

$\vec{v} = \overrightarrow{AB} \equiv (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ e

$\vec{w} = \overrightarrow{AC} \equiv (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0)$

sono paralleli al piano e non paralleli.

Segue che per determinare l'equazione del piano α per A, B e C basta sviluppare il determinante

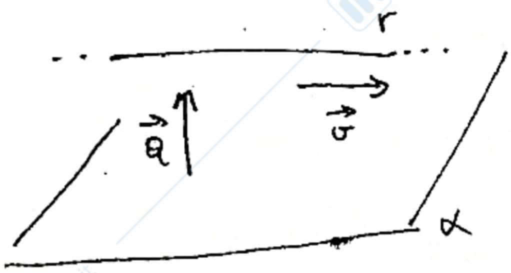
$$\begin{vmatrix} x - x_0 & x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y - y_0 & y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \\ z - z_0 & z_1 - z_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0$$

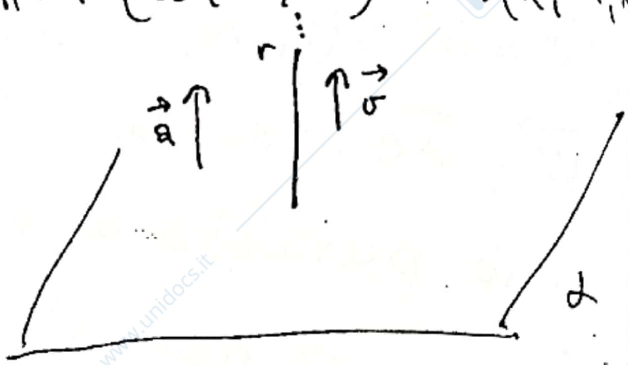
8. Condizioni di parallelismo e ortogonalità tra una retta e un piano

Sia r una retta di n. d. (l, m, n) ed α un piano di par. di gia. (a, b, c) allora:

$$r \parallel \alpha \iff al + bm + cn = 0$$

$$r \perp \alpha \iff \exists h \in \mathbb{R} : (a, b, c) = h(l, m, n)$$





Dim. Basta osservare che:

$$r \parallel \alpha \iff \vec{v} \perp \vec{a}$$

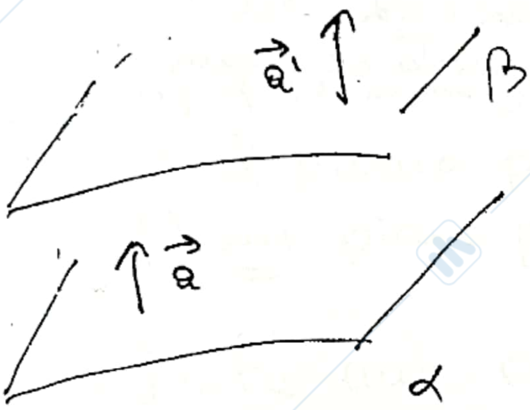
$$r \perp \alpha \iff \vec{v} \parallel \vec{a}$$

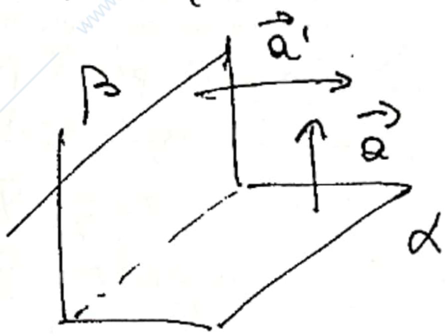
9. Condizioni di parallelismo e ortogonalità tra due piani

Siano α e β due piani di p. di gia. risp. (a,b,c) e (a',b',c') allora:

$$\alpha // \beta \iff \exists h \in \mathbb{R} : (a',b',c') = h(a,b,c)$$

$$\alpha \perp \beta \iff aa' + bb' + cc' = 0$$





Dim. Basta osservare che:

$$\alpha // \beta \iff \vec{a} // \vec{a}'$$

$$\alpha \perp \beta \iff \vec{a} \perp \vec{a}'$$

Scanned with CamScanner

Alcuni modelli di esercizi nello spazio:

1) Determinare le equazioni di una retta di cui siano noti un punto e i parametri direttori
2) Determinare le equazioni della retta per due punti
3) Determinare punti e parametri direttori di una retta note le sue equazioni
4) Determinare i coseni direttori di una retta orientata
5) Determinare il piano per tre punti, dopo aver verificato che non sono allineati
6) Data una retta r e un punto P determinare:
   a) il piano che contiene r e P (basta determinare due punti di r e poi il piano per tre punti)
   b) la retta s per P parallela ad r (basta ricordare che i parametri direttori di s sono gli stessi di r e poi imporre il passaggio per P)
   c) il piano per P ortogonale ad r (basta ricordare che i parametri di giacitura del piano coincidono con i parametri direttori di r e poi imporre il passaggio per P)
   d) un piano per P parallelo a r. (*)
7) Dati un piano e un punto P determinare:
   a) la retta per P ortogonale al piano (basta ricordare che i parametri direttori della retta coincidono con i parametri di giacitura del piano e poi imporre il passaggio per P)
   b) il piano per P parallelo al piano dato (basta ricordare che i piani hanno gli stessi parametri di giacitura e poi imporre il passaggio per P)
   c) una retta per P parallela ad α
   d) un piano per P ortogonale al piano α

(*) e) la retta per P perpendicolare (ortogonale e incidente r

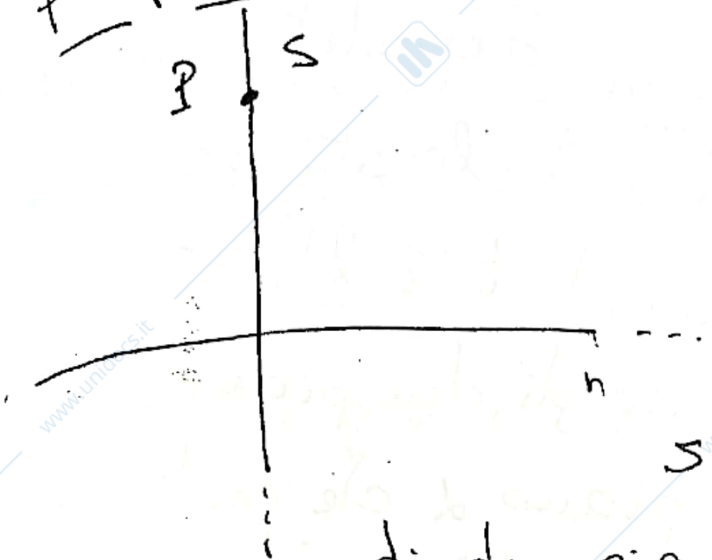
Esercizi

1) Piano per 3 punti non allineati
2) Piano di una retta (data in forma par.) e un punto
3) Piano di due rette complanari
4) Dato un piano α e un punto P:
   a) det. la retta per P $\perp$ ad α
   b) determinare una retta per P // ad α
   c) il piano per P parallelo ad α
   d) un piano per P ortogonale ad α
5) Data una retta r e un punto P det.
   a) la retta per P parallela ad r
   b) una retta per P ortogonale ad r
   c) il piano per P ortogonale ad r
   d) un piano per P parallelo ad r.
6) retta per un punto parallela e due piani dati
7) piano per un punto parallelo e due rette date.

10. Sia $r: \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$

le equazioni cartesiane di una retta si dicono anche rappresentazione delle rette come intersezione di due piani poiché naturalmente il piano $\alpha: ax+by+cz+d=0$ e il piano $\beta: a'x+b'y+c'z+d'=0$ sono due piani che contengono la retta r. Quindi per determinare le equazioni cartesiane di una retta basta determinare le equazioni di due piani α e β che contengono la retta r

11. Applicazione: retta per un punto perpendicolare ad una retta data

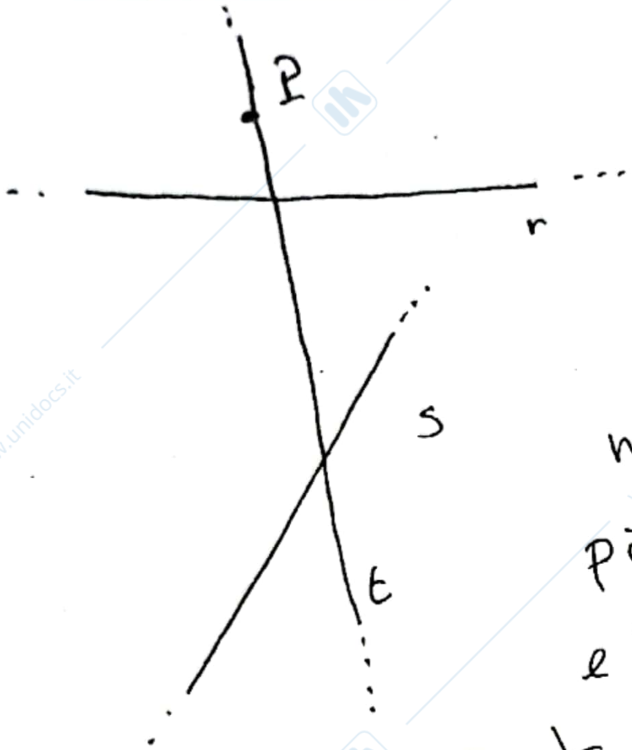


Per determinare s basta osservare che s è l'intersezione di due piani: il piano α che contiene la retta r e il punto P e il piano β per P ortogonale ad r.

Quindi se $\alpha: ax+by+cz+d=0$ e $\beta: a'x+b'y+c'z+d'=0$ allora

$$s: \begin{cases} ax+by+cz+d=0 & \text{(piano } \alpha \text{ di } r \text{ e } P) \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 & \text{(piano } \beta \text{ per } P \perp r) \end{cases}$$

12. Applicazione: retta t per un punto incidente due rette sghembe r ed s



Per determinare t basta osservare che t è l'intersezione di due piani: il piano α che contiene r e P e il piano β che contiene s e P.

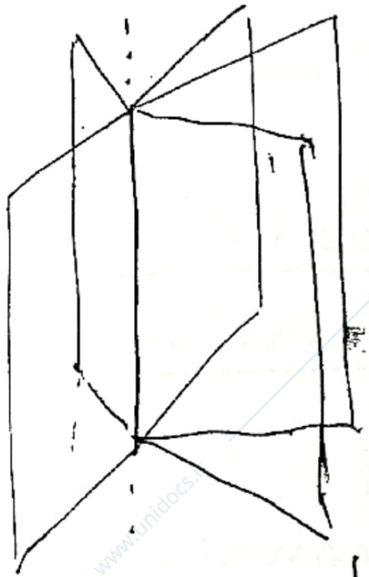
Quindi se $\alpha: ax+by+cz+d=0$ e $\beta: a'x+b'y+c'z+d'=0$ allora

$$t: \begin{cases} ax+by+cz+d=0 & (\text{piano } \alpha \text{ di } r \text{ e } P) \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 & (\text{piano } \beta \text{ di } s \text{ e } P) \end{cases}$$

13. Fascio di piani

Sia $r: \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$

una retta di Σ si dice fascio di piani di asse la retta r l'insieme $\mathcal{F}$ formato da tutti e soli i piani che contengono la retta r.



Si dimostra che se α e $\beta \in \mathcal{F}$ e $\alpha \neq \beta$ allora ogni altro piano del fascio ha equazione che è combinazione lineare delle equazioni di α e β.

Quindi l'equazione del fascio è data da:

$$\mathcal{F}: h(ax+by+cz+d)+k(a'x+b'y+c'z+d')=0$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

14. Applicazioni

1. **Piano che contiene una retta r e un punto P.**

(si considera il fascio di piani di asse la retta r e si impone il passaggio per P)

2. **Piano di due rette complanari r ed s**

(Si considera il fascio di piani di asse la retta r e si impone il passaggio per un punto di s non appartenente ad r)

3. **Date due rette sghembe r ed s determinare il piano che contiene r ed è parallelo ad s**

(basta considerare il fascio di piani di asse la retta r ed imporre il parallelismo con s)

15. Distanze

Siano A e B due punti del piano o dello spazio allora la distanza tra A e B coincide con $\|\overrightarrow{AB}\|$.

In particolare se A e $B \in \Sigma$, $A \equiv (x_1, y_1, z_1)$ e $B \equiv (x_2, y_2, z_2)$ allora

$$d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$$

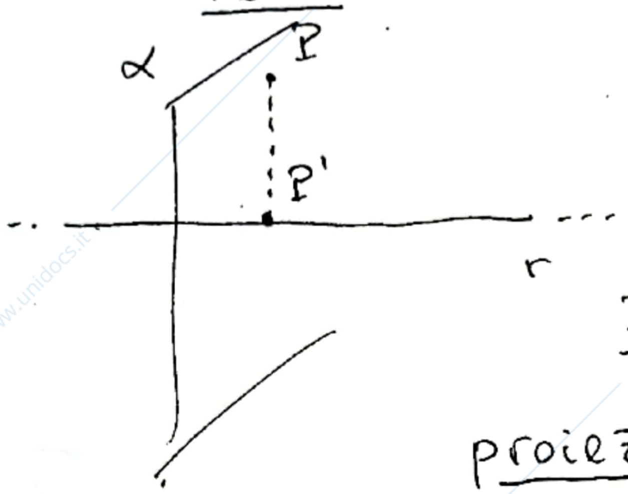
Siano $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ due sottoinsiemi di Σ allora

$$d(\mathcal{S},\mathcal{T}) = \inf\{d(P,Q) : P \in \mathcal{S}, Q \in \mathcal{T}\}$$

Naturalmente se $\mathcal{S} \cap \mathcal{T} \neq \emptyset$ allora $d(\mathcal{S},\mathcal{T}) = 0$

Casi particolari

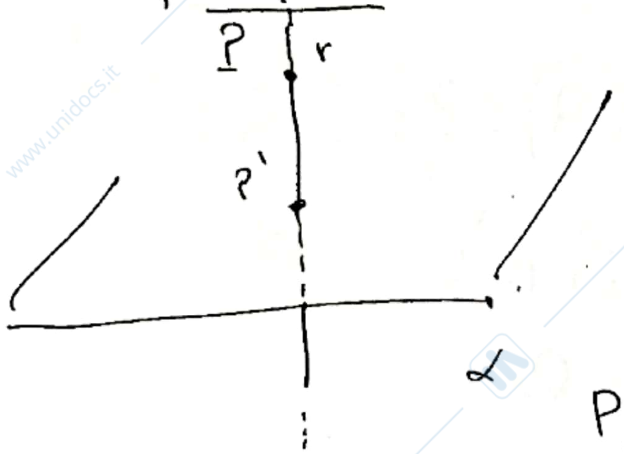
1. **Distanza di un punto P da una retta r**



Sia α il piano per P ortogonale ad r, il punto $P' = \alpha \cap r$ si dice proiezione di P su r.

Si vede che $d(P, r) = d(P, P')$

2. **Distanza di un punto P da un piano α**

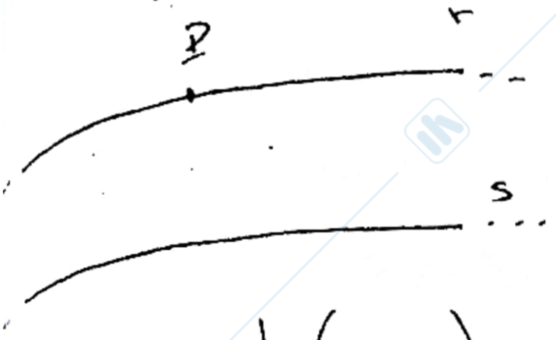


Sia r la retta per P ortogonale ad α, il punto $P' = r \cap \alpha$ si dice proiezione (ortogonale) di P su α.

Si vede che $d(P, \alpha) = d(P, P')$

3. Distanza tra due rette parallele

r ed s

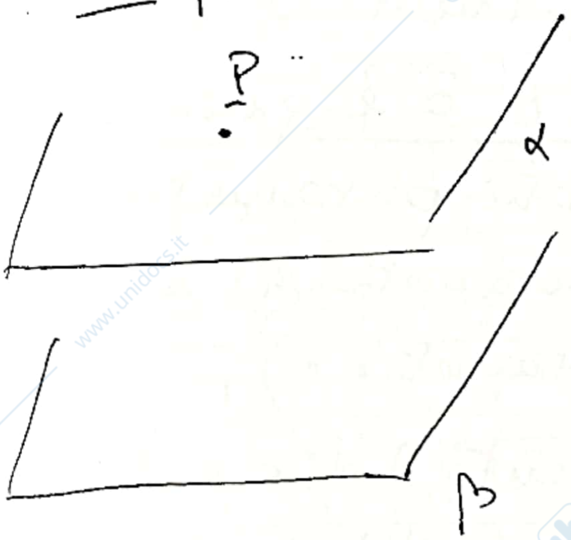


E' evidente che

$$d(r, s) = d(P, s), \quad P \in r$$

4. Distanza di due piani paralleli

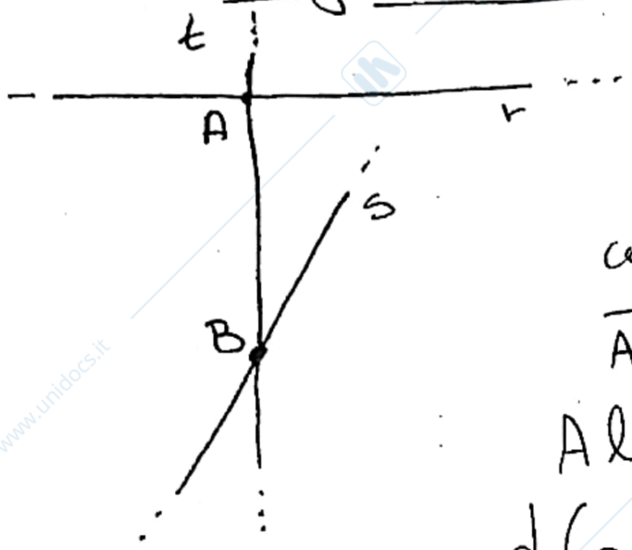
α e β



E' evidente che

$$d(\alpha, \beta) = d(P, \beta), \quad P \in \alpha$$

5. Distanza di due rette sghembe r ed s



Siano $A \in r$ e $B \in s$ tali che risulti contemporaneamente $\overrightarrow{AB} \perp r$ e $\overrightarrow{AB} \perp s$.

Allora si vede che:

$$d(r, s) = d(A, B)$$

La retta t per A e B si dice <u>retta di minima distanza</u> tra r ed s

<u>Come determinare A, B e quindi t</u>

Si usano le equazioni parametriche di r (dipendenti dal parametro h) ed s (dipendenti dal parametro k), si considera il generico punto A di r e il generico punto B di s e si determinano h e k in modo che risulti contemporaneamente $\overrightarrow{AB} \perp r$ e $\overrightarrow{AB} \perp s$.

Determinati A e B la retta t è la retta per A e B.

Ellisse

Siano F_1 ed F_2 due punti del piano tali che $d(F_1, F_2) = 2c$ $\quad c \geq 0$

Sia $a > c$. Si dice **ellisse** l'insieme Γ dei punti del piano tali che

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

F_1 e F_2 si dicono **fuochi**

La retta F_1F_2 e l'asse del segmento F_1F_2 si dicono **assi** dell'ellisse

Il punto medio O del segmento F_1F_2 si dice **centro** dell'ellisse

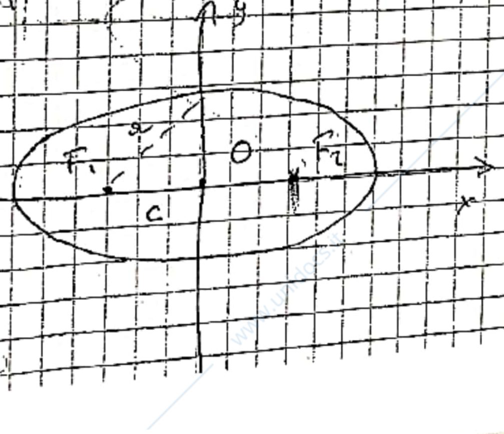
Si dimostra che nel riferimento cartesiano avente O come origine, la retta F_1F_2 come asse x e l'asse del segmento F_1F_2 come asse y l'ellisse Γ ha equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (*)$$

dove $b = \sqrt{a^2 - c^2}$

(*) si chiama equazione canonica dell'ellisse

Se $F_1 \equiv F_2$ si ottiene una circonferenza

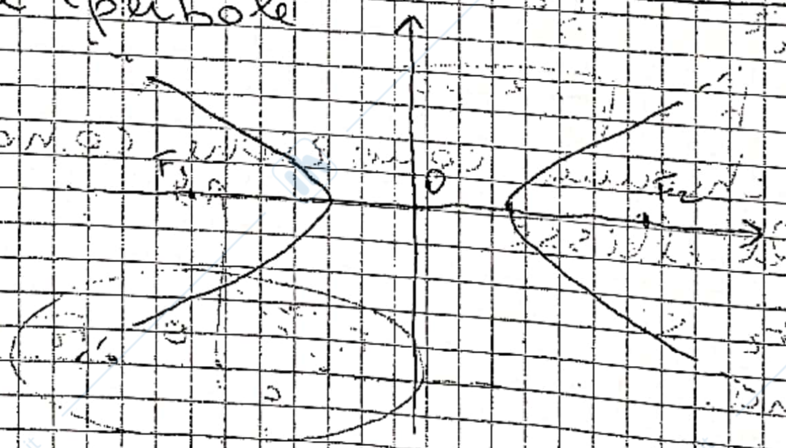


Iperbole

Siano F_1 e F_2 due punti del piano tali che $d(F_1, F_2) = 2c$, $c > 0$.
Sia $0 < a < c$, si dice iperbole l'insieme Γ dei punti del piano tali che $|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a$.
I punti F_1 ed F_2 si dicono fuochi, la retta F_1F_2 e l'asse del segmento F_1F_2 si dicono assi, il punto medio O del segmento F_1F_2 si dice centro della iperbole. Si dimostra che nel riferimento avente O come origine, la retta F_1F_2 come asse x e l'asse del segmento F_1F_2 come asse y l'iperbole ha equazione

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (*)$$

dove $b = \sqrt{c^2 - a^2}$
(*) si dice equazione canonica dell'iperbole



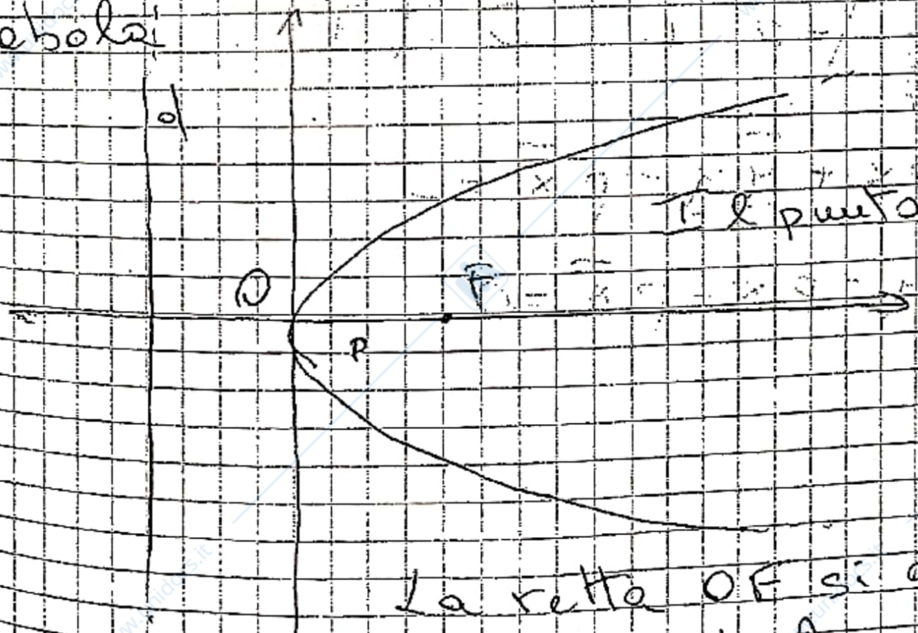
www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Parabola

Sia F un punto del piano e d una retta del piano non passante per F, si dice **parabola** di **fuoco** F e **direttrice** d l'insieme Γ dei punti del piano equidistanti da F e da d.
Si dimostra che nel riferimento in cui l'origine O coincide con il punto medio del segmento di perpendicolare condotto da F a d, l'asse x è la retta per F perpendicolare a d orientata concordemente al vettore $\vec{OF}$ e l'asse y è la retta parallela a d e passante per O, Γ ha equazione

$$y^2 = 2px \qquad (*)$$

dove p è la distanza di F da d.
(*) si dice equazione canonica della parabola.



Il punto O si dice **vertice**

La retta OF si dice **asse** della parabola

Coniche

Si dice conica ogni curva Γ del piano che si rappresenta in un riferimento, e quindi in ogni riferimento, mediante una equazione di 2° grado in x e y

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

Ad ogni conica Γ è associata la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

A è una matrice simmetrica

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Classificazione delle coniche degeneri

(4.1)

Una conica si dice degenere se $|A| = 0$

$$|A| = 0 \begin{cases} r(A) = 1 : \text{due rette reali e coincidenti} \\ r(A) = 2 \text{ e } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} < 0 : \text{due rette reali e distinte} \\ r(A) = 2 \text{ e } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 : \text{due rette immaginarie coniugate} \end{cases}$$

Classificazione delle coniche non degeneri

Una conica si dice non degenere se $|A| \neq 0$

$|A| \neq 0$

$A_{33} = 0$ parabola

$A_{33} < 0$ iperbole

$A_{33} > 0$: ellisse

$a_{11} \cdot |A| > 0$: ellisse priva di punti reali

$a_{11} \cdot |A| < 0$: ellisse dotata di punti reali

~~[illegible]~~ Se P è un punto di una conica ~~[illegible]~~ e $P \equiv (\bar{x}, \bar{y})$ allora l'equazione della retta $\pi(P)$ tangente nel punto P è la seguente:

$$\pi(P) : (\bar{x}, \bar{y}, 1)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Particolarmente semplice l'equazione della tangente se di ellisse, iperbole, parabole si conosce l'equazione canonica

$$\pi(P) : \frac{\bar{x}}{a^2} x + \frac{\bar{y}}{b^2} y = 1 \quad \text{(ellisse)}$$

$$\pi(P) : \frac{\bar{x}}{a^2} x - \frac{\bar{y}}{b^2} y = 1 \quad \text{(iperbole)}$$

$$\pi(P) : \bar{y} y - px - p\bar{x} = 0 \quad \text{(parabola)}$$

Coniche - Esercizi

Verificare che la seguente conica è degenere e determinarne le componenti:

$\gamma: x^2 + 4y^2 + 4xy - 2x - 4y + 1 = 0$

La matrice associata è

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Si vede subito che $|A| = 0$, $r(A) = 1$

$x^2 + 4y^2 + 4xy - 2x - 4y + 1 = (x + 2y - 1)^2$

La conica è doppiamente degenere ovvero costituita da due rette reali e coincidenti

Verificare che la seguente conica è degenere e determinarne le componenti:

$\gamma: 2x^2 + 2xy - 4y^2 - 2x + 2y = 0$

La matrice associata è:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si vede subito che $|A| = 0$ e $r(A) = 2$

$A_{33} < 0$, la conica è costituita da due rette reali e distinte

Ordiniamo l'equazione secondo potenze decrescenti di x e applichiamo le formula risolutiva delle equazioni di 2° grado:

$$x^2 + (y-1)x - 2y^2 + y = 0$$

$$x = \frac{-(y-1) \pm \sqrt{(y-1)^2 + 8y^2 - 4y}}{2} =$$

$$= \frac{-y+1 \pm \sqrt{y^2 - 2 \cdot + 1 + 8y^2 - 4y}}{2} =$$

$$= \frac{-y+1 \pm \sqrt{9y^2 - 6y + 1}}{2} = \frac{-y+1 \pm \sqrt{(3y-1)^2}}{2} =$$

$$= \frac{-y+1 \pm (3y-1)}{2} = \begin{cases} + \quad 2y = x_1 \\ - \quad -4y + 2 = x_2 \end{cases}$$

e quindi:

$$x^2 + xy - 2y^2 - x + y = (x-2y)(x+4y-2)$$

Le rette componenti sono:

$r : x - 2y = 0$

$s : x + 4y - 2 = 0$

1) Classificare la conica:

$\gamma_1 : x^2 - 2xy + 3y^2 + 10x + 7 = 0$

La matrice associata è:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -1 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Si vede facilmente che $|A| = -61 \neq 0$ e

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 > 0 .$$

La conica è un'ellisse.

2) Classificare la conica:

$\gamma_2 : x^2 + 4xy + 4y^2 - 2y + 2 = 0$

La matrice associata è:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Si vede facilmente che: $|A| = -1 \neq 0$

e $A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$

La conica è una parabola.

Scanned with CamScanner

5) Sia $\gamma: 3x^2+8xy-3y^2+2=0$

a) classificare γ

b) verificare che $P \equiv \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in \gamma$

c) determinare l'equazione della retta tangente a γ nel punto P.

a) La matrice associata è:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Si vede che:

$|A| = -50$ e

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -25 < 0$$

La conica è una iperbole.

b) $P \in \gamma$ se le sue coordinate sono una soluzione dell'equazione di γ

$$3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 8\left(-\frac{1}{2}\right)\left(+\frac{1}{2}\right) - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 =$$

$$= \frac{3}{4} - 2 - \frac{3}{4} + 2 = 0 \implies P \in \gamma$$

c) L'equazione della tangente a γ nel punto P si determina eseguendo il seguente prodotto:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\left(-\frac{3}{2}+\frac{4}{2}\right)x + \left(-\frac{4}{2}-\frac{3}{2}\right)y + 2 = 0$$

$$\frac{1}{2}x - \frac{7}{2}y + 2 = 0$$

$$x - 7y + 4 = 0$$

La retta tangente a γ nel punto P è quindi la retta

$$r: x - 7y + 4 = 0$$