

SISTEMI LINEARI DIPENDENTI DA UN PARAMETRO ESERCIZI SVOLTI

Docente: A. D'Aniello

Prerequisiti fondamentali:

1. Sono equivalenti:

- a. $r(A) = h$
- b. il massimo numero di righe linearmente indipendenti di A è h ;
- c. il massimo numero di colonne linearmente indipendenti di A è h ;
- d. c'è in A un minore di ordine h diverso da 0 e tutti i minori di ordine superiore sono 0.

2. Teorema di Rouché-Capelli

3. Teorema degli orlati

4. Teoremi relativi al numero di soluzioni di un sistema lineare compatibile

1) Discutere il seguente sistema lineare dipendente dal parametro h :

$$\begin{cases} x + hy - z = h \\ (2 - h)x + y - z = h \\ (3 - h)x + (h + 1)y - 2z = 2h \end{cases}$$

Siano:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & h & -1 \\ 2 - h & 1 & -1 \\ 3 - h & h + 1 & -2 \end{bmatrix} \quad A' = \begin{bmatrix} 1 & h & -1 & h \\ 2 - h & 1 & -1 & h \\ 3 - h & h + 1 & -2 & 2h \end{bmatrix}$$

le matrici associate al sistema. Per il teorema di Rouché-Capelli il sistema è compatibile se e solo se $r(A) = r(A')$. Sia in A che in A' la terza riga è la somma delle prime due quindi ci sono al più due righe linearmente indipendenti ovvero $1 \leq r(A) \leq r(A') \leq 2$.

Si consideri un minore del 2° ordine di A (e di A'), per esempio

$$\begin{vmatrix} h & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -h + 1$$

Se $-h + 1 \neq 0$, ovvero $h \neq 1$, allora $r(A) = r(A') = 2$, il sistema è compatibile ed ammette ∞^1 soluzioni.

Sia $h = 1$ allora

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \quad A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Le righe di A e di A' sono proporzionali quindi $r(A) = r(A') = 1$, il sistema è compatibile ed ammette ∞^2 soluzioni.

In conclusione:

$$h \neq 1 \quad r(A) = r(A') = 2 \quad \infty^1 \text{ soluzioni}$$

$$h = 1 \quad r(A) = r(A') = 1 \quad \infty^2 \text{ soluzioni}$$

2) Studiare il seguente sistema lineare al variare del parametro h in \mathbb{C} (campo complesso):

$$\begin{cases} hx + 4y = h - 3 \\ hx + hy = 1 \end{cases}$$

Siano A ed A' le matrici associate al sistema:

$$A = \begin{bmatrix} h & 4 \\ h & h \end{bmatrix} \quad A' = \begin{bmatrix} h & 4 & h-3 \\ h & h & 1 \end{bmatrix}$$

Se $|A| \neq 0$ allora $r(A) = r(A') = 2$, per il teorema di Rouché-Capelli il sistema è compatibile ed ammette 1 soluzione.

Risulta

$$|A| = h(h-4) = 0 \text{ per } h = 0 \text{ e per } h = 4$$

Sia $h = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A' = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le righe di A sono linearmente dipendenti, le righe di A' sono linearmente indipendenti quindi $r(A) = 1$, $r(A') = 2$, il sistema non ha soluzioni.

Sia $h = 4$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \quad A' = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Il massimo numero di righe linearmente indipendenti di A e di A' è 1 quindi $r(A) = r(A') = 1$, il sistema è compatibile ed ammette ∞^1 soluzioni.

In conclusione:

$$\begin{array}{lll} h \neq 0, 4 & r(A) = r(A') = 2 & 1 \text{ soluzione} \\ h = 0 & r(A) = 1 \quad r(A') = 2 & \text{nessuna soluzione} \\ h = 4 & r(A) = r(A') = 1 & \infty^1 \text{ soluzioni} \end{array}$$

Si risolve il sistema per $h \neq 0, 4$ applicando la regola di Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} h-3 & 4 \\ 1 & h \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} h & 4 \\ h & h \end{vmatrix}} = \frac{h^2 - 3h - 4}{h^2 - 4h} = \frac{(h-4)(h+1)}{h(h-4)} = \frac{h+1}{h}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} h & h-3 \\ h & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} h & 4 \\ h & h \end{vmatrix}} = \frac{h - h^2 + 3h}{h^2 - 4h} = \frac{-h^2 + 4h}{h^2 - 4h} = -1$$

3) Discutere il seguente sistema lineare dipendente dal parametro h :

$$\begin{cases} x + y - z = 1 + h \\ x + y + hz = 0 \\ hx - 2y + z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

Se A e A' sono le matrici associate al sistema, questo è compatibile se e solo se $r(A) = r(A')$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & h \\ h & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1+h \\ 1 & 1 & h & 0 \\ h & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Si osservi che sia in A che in A' c'è un minore del 2° ordine, non dipendente da h , diverso da 0

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 \neq 0$$

quindi $2 \leq r(A) \leq r(A') \leq 4$

Si osservi che $r(A) \leq 3$, quindi se $|A'| \neq 0$ (ovvero $r(A') = 4$) certamente il sistema non è compatibile.

$$|A'| = -(1+h) \begin{vmatrix} 1 & 1 & h \\ h & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -(1+h) \begin{vmatrix} 1 & 1 & h \\ h+2 & 0 & 1+2h \\ 1 & 0 & -2-h \end{vmatrix} =$$

$$= (1+h) \begin{vmatrix} h+2 & 1+2h \\ 1 & -(h+2) \end{vmatrix} = (1+h)(-h^2-4-4h-1-2h) =$$

$$= -(1+h)(h^2+6h+5) = -(1+h)(h+1)(h+5) = -(h+1)^2(h+5) = 0$$

per $h = -1$ e $h = -5$. Quindi per $h \neq -1, 5$ il sistema non ha soluzioni.

Sia $h = -1$ allora

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Le colonne di A sono linearmente dipendenti poiché la prima e la terza colonna sono proporzionali, le prime due colonne sono linearmente indipendenti quindi $r(A) = r(A') = 2$, il sistema è compatibile ed ha ∞^1 soluzioni.

Sia $h = -5$ allora

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -5 \\ -5 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & -5 & 0 \\ -5 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Abbiamo osservato che $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 \neq 0$

quindi $2 \leq r(A) \leq r(A') \leq 3$

Consideriamo il primo orlato

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 \\ -5 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & -24 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$$

C'è almeno un orlato diverso da 0 e quindi un minore del 3° ordine diverso da 0, segue $r(A) = 3 = r(A')$, il sistema è compatibile ed ha 1 soluzione.

In conclusione:

$$\begin{array}{lll} h \neq -1, -5 & r(A) = 3 & r(A') = 4 \quad \text{nessuna soluzione} \\ h = -1 & r(A) = r(A') = 2 & \infty^1 \text{ soluzioni} \\ h = -5 & r(A) = r(A') = 3 & 1 \text{ soluzione} \end{array}$$

4) Discutere il sistema lineare al variare del parametro k in \mathbb{R} (campo reale):

$$\begin{cases} kx + k^2y = k^3 \\ k^2x + ky = k^3 \\ (k^2 - 1)x + (k - 1)y = k^3 \end{cases}$$

Al sistema sono associate le seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} k & k^2 \\ k^2 & k \\ k^2 - 1 & k - 1 \end{bmatrix} \quad A' = \begin{bmatrix} k & k^2 & k^3 \\ k^2 & k & k^3 \\ k^2 - 1 & k - 1 & k^3 \end{bmatrix}$$

Il sistema è compatibile se e solo se $r(A) = r(A')$

Risulta $0 \leq r(A) \leq 2 \quad 0 \leq r(A') \leq 3 \quad r(A) \leq r(A')$.

Quindi se $r(A') = 3$ certamente i ranghi sono diversi e il sistema non ha soluzioni. $r(A') = 3$ se e solo se $|A'| \neq 0$.

$$|A'| = \begin{vmatrix} k & k^2 & k^3 \\ k^2 & k & k^3 \\ k^2 - 1 & k - 1 & k^3 \end{vmatrix} = k^3 \begin{vmatrix} k & k^2 & 1 \\ k^2 & k & 1 \\ k^2 - 1 & k - 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= k^3 \begin{vmatrix} k - k^2 & k^2 - k & 0 \\ k^2 & k & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = k^2(k^2 - k) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ k^2 & k & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -2k^4(k-1) = 0 \quad \text{per } k = 0 \text{ e } k = 1.$$

Se $k \neq 0, 1$ allora $r(A') = 3$ $r(A) = 2$, il sistema non ha soluzioni.

Sia $k = 0$, allora

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad A' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Si vede facilmente che $r(A) = r(A') = 1$, e quindi il sistema ha ∞^1 soluzioni. Sia $k = 1$, allora

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E' evidente che $r(A) = 1$ $r(A') = 2$, il sistema non ha soluzioni.

In conclusione:

$h \neq 0$: sistema non compatibile

$h = 0$: $r(A) = r(A') = 1$, ∞^1 soluzioni .

5) Discutere il sistema lineare al variare di h in \mathbb{C} :

$$\begin{cases} x - 2y - 2z = h \\ hx + 4y + hz = -2 \\ 2x - 4y - hz = 2 \end{cases}$$

Siano

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ h & 4 & h \\ 2 & -4 & -h \end{bmatrix} \quad A' = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & h \\ h & 4 & h & -2 \\ 2 & -4 & -h & 2 \end{bmatrix}$$

le matrici associate al sistema. Risulta evidentemente:

$$1 \leq r(A) \leq r(A') \leq 3$$

Se $|A| \neq 0$ allora $r(A) = r(A') = 3$ il sistema è compatibile ed ha una soluzione.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ h & 4 & h \\ 2 & -4 & -h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ h & 4 & h \\ h+2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ h & 4 & h-4 \\ h+2 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (h+2) \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 4 & h-4 \end{vmatrix} = -2(h+2)(h-4) = 0 \text{ per } h = -2 \text{ e } h = 4.$$

Quindi se $h \neq -2, 4$ allora $r(A) = r(A') = 3$, il sistema ha 1 soluzione.

Sia $h = -2$, allora

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \quad A' = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 & -2 \\ 2 & -4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Si osservi che sia in A che in A' le prime due righe sono linearmente indipendenti, la terza è combinazione lineare delle prime due, quindi il massimo numero di righe linearmente indipendenti è 2, segue $r(A) = r(A') = 2$, il sistema ha ∞^1 soluzioni

Sia $h = 4$, allora

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 4 & 4 & 4 \\ 2 & -4 & -4 \end{bmatrix} \quad A' = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & -4 \\ 4 & 4 & 4 & -2 \\ 2 & -4 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

Operando sulle righe si ha:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & -4 \\ 4 & 4 & 4 & -2 \\ 2 & -4 & -4 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 12 & 12 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Si vede che A è equivalente ad una matrice ridotta che ha rango 2 e A' è equivalente ad una matrice ridotta che ha rango 3, pertanto risulta $r(A) = 2$ e $r(A') = 3$, il sistema non ha soluzioni (per determinare il rango si poteva anche usare il teorema degli orlati).

In conclusione:

$h \neq -2, 4$: $r(A) = r(A') = 3$, 1 soluzione

$h = -2$: $r(A) = r(A') = 2$, ∞^1 soluzioni

$h = 4$: $r(A) = 2$, $r(A') = 3$, nessuna soluzione

6) Discutere il seguente sistema dipendente dal parametro h :

$$\begin{cases} hx + 2y - (2 + h)z = h \\ (3h - 2)x + (1 + h)y - 3z = 1 + h \end{cases}$$

Si considerino le matrici associate al sistema:

$$A = \begin{bmatrix} h & 2 & -(2 + h) \\ 3h - 2 & 1 + h & -3 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} h & 2 & -(2 + h) & h \\ 3h - 2 & 1 + h & -3 & 1 + h \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} h & 2 \\ 3h - 2 & 1 + h \end{vmatrix} = h(1 + h) - 2(3h - 2) = h + h^2 - 6h + 4 = h^2 - 5h + 4 = (h - 1)(h - 4) = 0$$

per $h = 4$ e $h = 1$.

Pertanto se $h \neq 4$, 1 c'è in A (e in A') un minore del 2° ordine diverso da 0, segue $r(A) = r(A') = 2$, il sistema è compatibile e ammette ∞^1 soluzioni.

Sia $h = 4$, allora

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 10 & 5 & -3 \end{bmatrix} \quad A' = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -6 & 4 \\ 10 & 5 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

Poiché le righe di A (e di A') sono linearmente indipendenti risulta $r(A) = r(A') = 2$, il sistema è compatibile ed ha ∞^1 soluzioni.

Sia $h = 1$, allora

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \quad A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Risulta evidentemente $r(A) = 1$ e $r(A') = 2$, il sistema non ha soluzioni.

In conclusione:

$$\begin{array}{lll} h \neq 1 & r(A) = r(A') = 2 & \infty^1 \text{ soluzioni} \\ h = 1 & r(A) = 1 \quad r(A') = 2 & \text{nessuna soluzione} \end{array}$$

7) Discutere il seguente sistema dipendente dal parametro h appartenente a \mathbb{R} (o \mathbb{C}):

$$\begin{cases} hx + (2h - 2)y + hz = 1 \\ x + (h - 1)y + z = 3 - h \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} h & 2h - 2 & h \\ 1 & h - 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad A' = \begin{bmatrix} h & 2h - 2 & h & 1 \\ 1 & h - 1 & 1 & 3 - h \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

In A ci sono due colonne uguali quindi $r(A) \leq 2$. Si consideri un minore del 2° ordine di A :

$$\begin{vmatrix} 1 & h + 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - h + 1 = 2 - h = 0 \text{ per } h = 2$$

Pertanto se $h \neq 2$ esiste in A (e in A') un minore del 2° ordine diverso da 0, segue $r(A) = 2$ e $r(A') \geq 2$.

Distinguiamo i due casi $h \neq 2$ e $h = 2$.

Sia $h \neq 2$, determiniamo il rango di A' applicando il teorema degli orlati. L'orlato che si ottiene fissando la prima riga e la terza colonna è il determinante di A e quindi 0. L'orlato che si ottiene fissando la prima riga e la quarta colonna è:

$$\begin{vmatrix} h & 2h - 2 & 1 \\ 1 & h - 1 & 3 - h \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h & h - 2 & 1 \\ 1 & h - 2 & 3 - h \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h - 2 & 1 \\ h - 2 & 3 - h \end{vmatrix} = (h - 2)(3 - h) - h + 2 = 3h - h^2 - 6 + 2h - h + 2 = -h^2 + 4h - 4 = -(h - 2)^2 = 0 \text{ per } h = 2.$$

Segue che per $h \neq 2$ $r(A') = 3$.

Sia $h = 2$, allora

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$r(A) = 1$$

$$r(A') = 2$$

In conclusione:

$h \neq 2$ $r(A) = 2$ $r(A') = 3$ nessuna soluzione

$h = 2$ $r(A) = 1$ $r(A') = 2$ nessuna soluzione

8) Si discuta il seguente sistema omogeneo dipendente dal parametro h :

$$\begin{cases} hx + y - 2hz = 0 \\ x + (2 - h)y - 2z = 0 \\ (h + 1)x + (3 - h)y - 2(h + 1)z = 0 \end{cases}$$

Il sistema, essendo omogeneo, è certamente compatibile e ammette la soluzione nulla. Si tratta di stabilire se ha altre soluzioni (e quante) oltre quella nulla. Sia

$$A = \begin{bmatrix} h & 1 & -2h \\ 1 & 2 - h & -2 \\ h + 1 & 3 - h & -2(h + 1) \end{bmatrix}$$

la matrice associata al sistema. Se $|A| \neq 0$ e quindi $r(A) = 3$ il sistema ha solo la soluzione nulla. Se $|A| = 0$, $r(A) \leq 2$, il sistema ha altre soluzioni oltre quella nulla. Si osservi che la terza riga di A è la somma delle prime due quindi $r(A) \leq 2$ il sistema certamente ha altre soluzioni oltre quella nulla $\forall h \in \mathbb{R}$.

Vediamo per quali valori di h risulta $r(A) = 1$ e per quali valori di h risulta $r(A) = 2$. Si consideri un minore del secondo ordine di A , sia per esempio

$$\begin{vmatrix} h & 1 \\ 1 & 2-h \end{vmatrix} = 2h - h^2 - 1 = (h-1)^2 = 0 \text{ per } h = 1$$

Quindi per $h \neq 1$ c'è in A un minore del 2° ordine diverso da 0, $r(A) = 2$, il sistema ha ∞^1 soluzioni.

Sia $h = 1$, allora

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Si vede facilmente che il massimo numero di righe linearmente indipendenti è 1 quindi $r(A) = 1$, il sistema ha ∞^2 soluzioni.

Risolvi il sistema. Distinguiamo due casi:

1) $h \neq 1$

Poiché $r(A) = 2$ e $\begin{vmatrix} h & 1 \\ 1 & 2-h \end{vmatrix} \neq 0$ le prime due equazioni, sono linearmente indipendenti e la terza è combinazione lineare delle prime due. Il sistema dato è equivalente a quello formato dalle prime due equazioni

$$\begin{cases} hx + y - 2hz = 0 \\ x + (2-h)y - 2z = 0 \end{cases}$$

Poiché $\begin{vmatrix} h & 1 \\ 1 & 2-h \end{vmatrix} \neq 0$ il sistema

$\begin{cases} hx + y = 2hz \\ x + (2-h)y = 2z \end{cases}$ nelle incognite x e y è un sistema di Cramer.

Applicando la regola di Cramer si ha:

Digitare l'equazione qui.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2hz & 1 \\ 2z & 2-h \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} h & 1 \\ 1 & 2-h \end{vmatrix}} = \frac{4hz - 2h^2z - 2z}{2h - h^2 - 1} = \frac{2z(2h - h^2 - 1)}{2h - h^2 - 1} = 2z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} h & 2hz \\ 1 & 2z \end{vmatrix}}{2h - h^2 - 1} = \frac{2hz - 2hz}{2h - h^2 - 1} = 0$$

Quindi se $h \neq 1$ l'insieme S delle soluzioni è dato da
 $S = \{ (2z, 0, z) : z \in \mathbb{R} \}$

2) $h = 1$

Il sistema è costituito da tre equazioni uguali pertanto è equivalente all'equazione $x + y - 2z = 0$, posto $y = \alpha$ e $z = \beta$

Si ha $x = 2\beta - \alpha$ e l'insieme S delle soluzioni è:

$$S = \{ (2\beta - \alpha, \alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$$

9) Si discuta il seguente sistema dipendente dal parametro $h \in \mathbb{C}$:

$$\begin{cases} (h-1)x + y + (3-h)z = -h-4 \\ -hx + (h-1)y = 1 \\ x + (1-2h)y + (h-3)z = h \\ x - hy + (h-3)z = h+2 \end{cases}$$

Si considerino le matrici associate al sistema:

$$\begin{bmatrix} h-1 & 1 & 3-h & -h-4 \\ -h & h-1 & 0 & 1 \\ 1 & 1-2h & h-3 & h \\ 1 & -h & h-3 & h+2 \end{bmatrix} \\ \text{-----} = A \\ \text{-----} = A'$$

Risulta evidentemente: $1 \leq r(A) \leq 3$, $1 \leq r(A') \leq 4$ e $r(A) \leq r(A')$.

Se $r(A') = 4$, ovvero se $|A'| \neq 0$, risulta certamente $r(A) \neq r(A')$ e quindi il sistema non ha soluzioni.

Eseguendo sulle righe di A e di A' delle trasformazioni elementari determiniamo delle matrici, associate ad un sistema equivalente al dato, di cui sia più facile calcolare il rango o il determinante.

Sommando alla prima riga la quarta si ha:

$$\begin{bmatrix} h & 1-h & 0 & -2 \\ -h & h-1 & 0 & 1 \\ 0 & 1-h & 0 & -2 \\ 1 & -h & h-3 & h+2 \end{bmatrix}$$

Sommando alla prima equazione la terza si ha:

$$\begin{bmatrix} h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1-h & 0 & -2 \\ 1 & -h & h-3 & h+2 \end{bmatrix}$$

Si osservi che l'equazione corrispondente alla seconda riga della matrice è degenera con termine noto diverso da 0 ed è indipendente da h , quindi certamente il sistema non ha soluzioni qualunque sia h .

10) Si discuta il seguente sistema lineare al variare di k in \mathbb{R} :

$$\begin{cases} kx = 1 \\ -kx + (k-1)y = -1 \\ 2x + (1-2k)y + (k-3)z = -k \\ 2x - ky + (k-3)z = -k \end{cases}$$

Consideriamo le due matrici associate al sistema

$$\begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 1 \\ -k & k-1 & 0 & -1 \\ 2 & 1-2k & k-3 & -k \\ 2 & -k & k-3 & -k \end{bmatrix} = A$$

$$\begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 1 \\ -k & k-1 & 0 & -1 \\ 2 & 1-2k & k-3 & -k \\ 2 & -k & k-3 & -k \end{bmatrix} = A'$$

Si osservi che

$$1 \leq r(A) \leq 3, \quad 1 \leq r(A') \leq 4, \quad r(A) \leq r(A')$$

A' è una matrice quadrata vediamo che informazioni ci dà l'esame del determinante di A' :

$$\begin{vmatrix} k & 0 & 0 & 1 \\ -k & k-1 & 0 & -1 \\ 2 & 1-2k & k-3 & -k \\ 2 & -k & k-3 & -k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & 0 & 0 & 1 \\ -k & k-1 & 0 & -1 \\ 0 & 1-k & 0 & 0 \\ 2 & -k & k-3 & -k \end{vmatrix}$$

$$= (k-1) \begin{vmatrix} k & 0 & 1 \\ -k & 0 & -1 \\ 2 & k-3 & -k \end{vmatrix} = 0, \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

poiché ci sono due righe proporzionali.

Si osservi che $r(A) = 2$ e $r(A') = 3$ poiché il minore di A' determinato dalla prima, seconda e terza riga e dalla prima, seconda e quarta colonna è diverso da 0. Il sistema non è compatibile.

In conclusione

$k \neq 0, 1, 3$	$r(A) = r(A') = 3$	1 soluzione
$k = 0, 3$	$r(A) = 2 \quad r(A') = 3$	nessuna soluzione
$k = 1$	$r(A) = r(A') = 2$	∞^1 soluzioni

11) Discutere il sistema lineare omogeneo S al variare di h in \mathbb{R} :

$$\begin{cases} x + hy - z - ht = 0 \\ x + y - hz + (1 - 2h)t = 0 \\ y + z - 2t = 0 \end{cases}$$

Il sistema S , essendo omogeneo, è sicuramente compatibile, ovvero $r(A) = r(A')$. Si tratta di stabilire quante soluzioni ha. Si consideri la matrice associata al sistema:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & h & -1 & h \\ 1 & 1 & -h & 1 - 2h \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Il minore del 2° ordine determinato da seconda e terza riga e da prima e seconda colonna $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ è diverso da 0 qualunque sia h , quindi

$$\forall h \in \mathbb{R} \quad 2 \leq r(A) \leq 3$$

Applichiamo il teorema degli orlati, “orlando” il minore dato prima con la prima riga e la terza colonna e poi con la prima riga e quarta colonna.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -h \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & h & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -h-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & h & -h-1 \end{vmatrix} = 0, \quad \forall h \in \mathbb{R}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-2h \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & h & -h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1-h & 1-h \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & h & -h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -h-1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -3(1-h) = 0 \text{ per } h = -1$$

Pertanto

Se $h \neq -1$ allora $r(A) = 3$, il sistema ha ∞^1 soluzioni

Se $h = -1$ allora $r(A) = 2$, il sistema ha ∞^2 soluzioni

12) Discutere il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} hx - y = 1 \\ x + hy = h \end{cases}$$

a) al variare di h in \mathbb{R}

b) al variare di h in \mathbb{C}

Consideriamo le due matrici associate al sistema

$$A = \begin{bmatrix} h & -1 \\ 1 & h \end{bmatrix} \quad A' = \begin{bmatrix} h & -1 & 1 \\ 1 & h & h \end{bmatrix}$$

$|A| = h^2 + 1 \neq 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}$, segue

$r(A) = r(A') = 2 \quad \forall h \in \mathbb{R}$, il sistema ha una sola soluzione.

Se $h \in \mathbb{C}$ allora $h^2 + 1 = 0$ per $h = i$ e $h = -i$.

Segue

$h \neq i, -i \quad r(A) = r(A') = 2 \quad 1 \text{ soluzione}$

Sia $h = i$ allora

$$A = \begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \quad A' = \begin{bmatrix} i & -1 & 1 \\ 1 & i & i \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = i^2 - 1 = -2 \neq 0$$

Quindi per $h=i$, $r(A)=1$, $r(A')=2$, nessuna soluzione
Si vede che lo stesso avviene per $h=-i$.

Chiusura lineare, equazioni di un sottospazio, sistemi di generatori

- 1) Sia $X = \{(1,1,0,1), (0,1,-1,-1), (1,0,1,2)\}$
 - a) Determinare $L(X)$
 - b) Determinare le equazioni di $L(X)$
 - c) Determinare un sistema di generatori B di $L(X)$
 - d) Stabilire se il terzo vettore è combinazione lineare dei primi due
 - e) Stabilire se B è un sistema di generatori minimale di $L(X)$
 - f) Dire se X è o non è un sistema di generatori di \mathbb{R}^4
- 2) Stesso esercizio con $X = \{(1,1,0,1), (2,1,1,1), (1,2,-1,3)\}$
- 3) Sia $X = \{(1,1), (2,3), (4,5)\}$
 - a) Stabilire se il terzo vettore è combinazione lineare dei primi due e, se sì, secondo quali scalari
 - b) Stabilire se X genera \mathbb{R}^2 e, in caso di risposta affermativa, se è un sistema di generatori minimale.
- 4) Stabilire se $X = \{(1,0,1), (2,1,1), (2,3,-1)\}$ è un sistema di generatori di \mathbb{R}^3
- 5) Stabilire se $X = \{(1,0,1), (2,1,1), (2,3,1)\}$ è un sistema di generatori di \mathbb{R}^3
- 6) Dato il sistema lineare omogeneo
$$\begin{cases} x + y - z + 3t = 0 \\ 2x + 3y - z - t = 0 \end{cases}$$
 - a) Determinare l'insieme S delle soluzioni del sistema
 - b) Spiegare perché S è un sottospazio di \mathbb{R}^4 , determinare un sistema di generatori di S
- 7) Determinare un sistema di generatori
 - a) dello spazio S delle soluzioni della equazione lineare omogenea $2x - y - z + 3t = 0$
 - b) dello spazio S' delle soluzioni della equazione $y + 2z - t = 0$
 - c) determinare $S \cap S'$
- 8) Dati i polinomi $p_1(x) = x^2 + 1$, $p_2(x) = 2x^2 + x + 1$, $p_3(x) = 2x^2 + 3x - 1$. Stabilire se il terzo è combinazione lineare dei primi due e, se sì, secondo quali scalari.
- 9) Dati i polinomi $p_1(x) = x^2 + 1$, $p_2(x) = 2x^2 + x + 1$, $p_3(x) = 2x^2 + 3x + 1$. Stabilire se il terzo è combinazione lineare dei primi due e, se sì, secondo quali scalari.

Esercizi su combinazioni lineari, chiusura lineare e sistemi di generatori

- 1) Dato l'insieme $X = \{(1,0,1,-1), (2,1,1,1), (0,1,1,3)\}$
 - a) stabilire se i vettori $(1,1,0,1)$ e $(1,1,0,2)$ sono combinazione lineare dei vettori di X , e, in caso di risposta affermativa, secondo quali scalari;
 - b) determinare $L(X)$ (ovvero determinare quali sono i vettori (a,b,c,d) di \mathbb{R}^4 che sono combinazione lineare dei vettori di X);
 - c) determinare le equazioni di $L(X)$;
 - d) dire se X è un sistema di generatori di \mathbb{R}^4 .
- 2) Determinare quali sono i vettori (a,b) di \mathbb{R}^2 che sono combinazione lineare dei vettori di X , dove $X = \{(1,1), (1,0), (1,-1)\}$. Dire se X è un sistema di generatori di \mathbb{R}^2 .
- 3) Dato $X = \{(1,1,0), (1,0,1), (2,1,1)\}$,
 - a) determinare $L(X)$;
 - b) determinare le equazioni di $L(X)$;
 - c) stabilire se X è un sistema di generatori di \mathbb{R}^3 .
- 4) Dato $X = \{(1,0,1), (1,1,0), (0,1,1)\}$,
 - a) determinare $L(X)$;
 - b) determinare le equazioni di $L(X)$;
 - c) stabilire se X genera \mathbb{R}^3 .

Vedi anche prove d'esame:

16/6/2014 : 2.a

17/1/2014: 3

21/12/2013: 2.a,c

28/2/2014: 2.a

24/2/2015: 1.d

Esercizi sui sistemi lineari: metodo di Gauss

1) Determinare una soluzione particolare, la generica soluzione, l'insieme delle soluzioni delle seguenti equazioni lineari:

- a) $x+z=0$ nelle incognite x, y e z ;
 b) $x+z=0$ nelle incognite x, y, z e t
 c) $x=3$ nelle incognite x, y e z .
 d) $2x+y-z+2t=0$

2) Determinare una soluzione particolare, la generica soluzione, l'insieme delle soluzioni dei seguenti sistemi lineari ridotti:

- a)
$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ y - 2z = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

 b)
$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ y - 2z = 1 \end{cases}$$

 c)
$$\begin{cases} x + y - 2z + t = 0 \\ z - 2t = 0 \end{cases}$$

3) Determinare una soluzione particolare, la generica soluzione, l'insieme delle soluzioni dei seguenti sistemi lineari:

- a)
$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x - y = 5 \\ 5x - y = 17 \end{cases}$$

 b)
$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x - y = 5 \\ 5x - y = 1 \end{cases}$$

 c)
$$\begin{cases} x + y - z = 3 \\ 2x + y + 3z = 1 \end{cases}$$

 d)
$$\begin{cases} x + y - z = 3 \\ 2x + y - 2z = 1 \end{cases}$$

 e)
$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + 4z = 3 \end{cases}$$

 f)
$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + 3y - z = 13 \\ x - y + 3z = 10 \end{cases}; \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases}$$

 g)
$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + 3y + 2z = 13 \\ x + y + 3z = 5 \end{cases}; \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + 3y + 2z = 13 \\ x + y + 3z = 12 \end{cases}; \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \end{cases}$$

 h)
$$\begin{cases} x + y - z + t = 1 \\ 2x + 3y + 2z - t = 4 \\ 4x + 7y + 8z - 5t = 10 \end{cases}; \begin{cases} x + y - z + t = 0 \\ 2x + 3y + 2z - t = 0 \\ 4x + 7y + 8z - 5t = 0 \end{cases}$$

4) Stabilire per quali valori di a, b, c e d i seguenti sistemi lineari hanno soluzioni e quante soluzioni hanno:

- a)
$$\begin{cases} x + 2y - z = a \\ 2x + 3y - z = b \\ x - y + 3z = c \end{cases}$$

 b)
$$\begin{cases} x + 2y - z = a \\ 2x + 3y + 2z = b; \\ x + y + 3z = c \end{cases}$$

 c)
$$\begin{cases} x + y - z + t = a \\ 2x + 3y + 2z - 4t = b \\ 3x + 4y + z - 3t = c \\ x - 5z + 7t = d \end{cases}$$

Si invitano gli studenti a consultare Lipschutz, Algebra lineare, per altri esercizi svolti e non svolti sui sistemi lineari (Cap.1 nella seconda edizione, Cap.3 nella terza edizione)



Esercizi sui sottospazi

- 1) Stabilire quale dei seguenti sottoinsiemi è un sottospazio di \mathbb{R}^3 :
 - a) $U = \{(h, h, 1) : h \in \mathbb{R}\}$;
 - b) $U = \{(x, y, x+y) : x, y \in \mathbb{R}\}$
 - c) $U = \{(x, y, z) : xy = 0\}$
 - d) $U = \{(x, y, z) : x \geq 0\}$

- 2) Stabilire quale dei seguenti sottoinsiemi è un sottospazio di M_2 :
 - a) $D = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ (matrici diagonali di ordine 2)
 - b) $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ (matrici simmetriche di ordine 2)

- 3) Dimostrare che l'insieme S_n delle matrici simmetriche di ordine n e l'insieme A_n delle matrici antisimmetriche sono sottospazi vettoriali di M_n (usare le proprietà della trasposta).

- 4) Stabilire quale dei seguenti sottoinsiemi è un sottospazio di $\mathbb{R}_2[x]$:
 - a) $U = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 : a_0 = 0\}$
 - b) $U = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 : a_0 = 1\}$

- 5) Stabilire se \mathbb{N}^2 è un sottospazio di \mathbb{R}^2 .