PROPRIETÀ

Tutti insiemi

$\mathbb{C} = \{a+ib, a \text{ e } b \in \mathbb{R}, i^2=-1\}$

$\mathbb{N} < \mathbb{Z} < \mathbb{Q} < \mathbb{R} < \mathbb{C}$

$(\mathbb{R},+)$

PROPRIETÀ ASSOCIATIVA

$\underbrace{2+3}_{5}+1 \qquad 2+\underbrace{3+1}_{4}$ non cambio ordine addendi

$5+1=6 \qquad 2+4=6$

Def: $(x+y)+z = x+(y+z) \to x+y+z \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}$

PROPRIETÀ COMMUTATIVA

Def: $x+y=y+x \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

Elemento neutro

Def: $x+\varepsilon=y \qquad \varepsilon \in \mathbb{R}$

$\varepsilon=0 \Rightarrow x+0=x$

Opposto di $x \in \mathbb{R}$

Def: $y \in \mathbb{R}$ tale che $x+y=0$ = elemento neutro

$y=-x$

cioè si può applicare la **regola di cancellazione**

$\cancel{a}+b=\cancel{a}+c \Rightarrow b=c$ Quando si può fare?

Def: Aggiungendo a entrambi i membri la stessa quantità l'uguaglianza rimane vera

infatti $-\cancel{a}+\cancel{a}+b=-\cancel{a}+\cancel{a}+c$ $\exists$ opposto

$(\mathbb{R},\cdot)$

PROPRIETÀ ASSOCIATIVA

$\underbrace{2\cdot 3}_{6}\cdot\frac{1}{2} \qquad 2\cdot\underbrace{3\cdot\frac{1}{2}}_{\frac{3}{2}}$

$6\cdot\frac{1}{2}=3 \qquad 2\cdot\frac{3}{2}=3$

Def: $(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z) \to x\cdot y\cdot z \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}$

PROPRIETÀ COMMUTATIVA

Def: $x\cdot y = y\cdot x \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

Elemento neutro

Def: $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tale che $x\varepsilon = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\varepsilon=1 \to x1=x$

Inverso di $x \in \mathbb{R}$

Def: $y \in \mathbb{R}$ tale che $xy=1$ = elemento neutro

$\exists$ solo per $x \neq 0$ o $y=0$

per $x\neq 0 \Rightarrow x=\frac{1}{y}$

Regola di cancellazione

$\cancel{a}b=\cancel{a}c = b=c$ FALSO!

$0\cdot 2 = 0\cdot 3 = 0$

$2\neq 3$ perché 0 non è invertibile

Def: moltiplicando a entrambi i membri la stessa quantità l'uguaglianza rimane vera

$\frac{1}{a}\cdot ab=\frac{1}{a}ac$ con $a\neq 0$

$1b=1c \to b=c$

$\boxed{(\mathbb{R},+,\cdot) = \text{CAMPO}}$ insieme con 2 operazioni che godono delle 9 proprietà elencate

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ no campo

$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ è campo

PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA lega $+,\cdot$

$x(y+z)=xy+xz$

Campi finiti: come codice binario, con numeri finiti non come $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$.

Def: Se K è un campo finito, allora $|K|=p^n$, p è num. primo, $n\in\mathbb{N}$

numeri degli elementi in K

il + piccolo campo prodotto è $F=\{0,1\}$ $\times K$ ci deve essere il prodotto neutro per + e per $\cdot$

Operazioni:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

$\cancel{1}+1=\cancel{1}$

$1=0$ FALSO

$1+1=0$

VETTORI

$A,B \neq \emptyset$

$A\times B=\{(a,b), a\in A, b\in B\}$

coppia ordinata es. $(2,3)\neq(3,2)$

è lo stesso con più componenti:

$A\times B\times C=\{(a,b,c), a\in A, b\in B, c\in C\}$

terna ordinata

$\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^2=\{(x,y), x \text{ e } y\in\mathbb{R}\}$

$\mathbb{R}^3=\{(x,y,z), x,y,z\in\mathbb{R}\}$

componente

noi useremo: $\mathbb{R}^n=\{(x_1,x_2,\dots x_n), x_i\in\mathbb{R}\}$ con $n>0$

n-pla ordinata = vettori indicate con $\underline{x}$

un vettore che incontreremo spesso: $\underline{0}=(0,0,0\dots,0)\in\mathbb{R}^n$

OPERAZIONI TRA VETTORI

$(\mathbb{R}^n,+)$

es. $(x_1,x_2,x_n)+(y_1,y_2,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_n+y_n)$

PROPRIETÀ: associativa, commutativa

$\exists$ elemento neutro $\underline{0}$ e l'opposto di $\underline{x}$ $(-x_1,-x_2,-x_n)=-\underline{x}$

PRODOTTO ESTERNO: tra numero e vettore

$k\in\mathbb{R} \quad \underline{x}\in\mathbb{R}^n \qquad k(x_1,x_2,x_n)=(kx_1,kx_2,kx_n)\in\mathbb{R}^n$

numero reale = scalare $\qquad$ multiplo di $\underline{x}$

$k=0 \quad 0\cdot\underline{x}=\underline{0} \quad \forall x\in\mathbb{R}^n$ quindi $\underline{0}$ è multiplo di ogni vettore di $\mathbb{R}^n$

ES. Quale tra questi vettori è multiplo di $(1-\sqrt{3},1+\sqrt{3},\sqrt{3})\in\mathbb{R}^3$?

1) $(4,0,1) \to (4,0,1)=k(1-\sqrt{3},1+\sqrt{3},\sqrt{3})$

$4=k(1-\sqrt{3}) \quad 0=k(1+\sqrt{3}) \quad 1=k(\sqrt{3})$ X

qui $k=0$ ma negli altri no

2) $(-2,4+2\sqrt{3},3+\sqrt{3}) \to (-2,4+2\sqrt{3},3+\sqrt{3})=k(1-\sqrt{3},1+\sqrt{3},\sqrt{3})$

$-2=k(1-\sqrt{3}) \quad 4+2\sqrt{3}=k(1+\sqrt{3}) \quad 3+\sqrt{3}=k\sqrt{3}$ ✓

$k=\sqrt{3}+1$ questo k ora lo inserisco nelle altre x vedere se va bene

PROP. del prodotto esterno

- DISTRIBUTIVA:

$(h+k)\cdot \underline{x} = h\underline{x} + k\underline{x} \quad \forall h,k \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

$h(\underline{x}+\underline{y}) = h\underline{x} + h\underline{y}$

$(hk)\cdot \underline{x} = h(k\underline{x}) = k(h\underline{x})$

$0 \cdot \underline{x} = \underline{0}$

$h \cdot \underline{x} = (hx_1, hx_2, hx_n) = (0,0,0) \Leftrightarrow hx_i = 0$

quindi $h \cdot \underline{x} = \underline{0}$ se e solo se $h=0$ oppure $\underline{x}=\underline{0}$

PRODOTTO SCALARE: tra vettore e vettore

$x, y \in \mathbb{R}^n$

$(x_1, x_2 .. x_n)\cdot(y_1, y_2 .. y_n) = x_1y_1 + x_2y_2 .. + x_ny_n \in \mathbb{R}$

es. $(2,0,1)\cdot(-2,1,3) = 2(-2)+0\cdot 1+1\cdot 3 = -4+3 = -1$

generale posso scrivere: $\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$

n = indica valore + grande
i=1 indica valore + piccolo

utile da usare: In $\mathbb{R}^n$, $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$

e_i = vettore che da 1 nella i-esima componente e 0 altrove

es. $e_1=(0,0,1)$ $e_2=(0,1,0)$ $e_3=(1,0,0)$

$\boxed{\underline{x}\, e_i = x_i}$ prodotto scalare tra 2 vettori da la componente x che si trova nella i-esima riga

Prop. del prodotto scalare

1) COMMUTATIVA: $\underline{x}\cdot\underline{y} = \underline{y}\cdot\underline{x}$

2) $h\cdot(\underline{x}\cdot\underline{y}) = (h\cdot\underline{x})\cdot\underline{y} = \underline{x}\cdot(h\cdot\underline{y})$

prodotto tra numeri — prod. scalare — prodotto esterno

3) $(\underline{x}+\underline{y})\cdot\underline{z} = \underline{x}\cdot\underline{z} + \underline{y}\cdot\underline{z}$

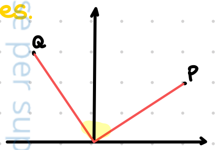
$\underline{0}\cdot\underline{x} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

es. $(2,3)\cdot(-6,4) = -12+12 = 0$

$(2,1,1)\cdot(3,-2,-4) = 6-2-4 = 0$

Def: 2 vettori $\underline{x}$ e $\underline{y} \in \mathbb{R}^n$ si dicono ORTOGONALI se $\boxed{\underline{x}\cdot\underline{y}=0}$

es.



$Q=(-2;3)$
$P(3;2)$
sul piano formano angolo di 90°

$\underline{0}$ è l'unico ortogonale a ogni vettore di $\mathbb{R}^n$

es. Esibire 2 vettori ortogonali a (1,5)

(5,-1) (-5,1) (0,0)

$(x_1,x_2)\cdot(1,5) = x_1+5x_2=0 \rightarrow x_1 = 5x_2$

$(5x_2, x_2) \rightarrow x_2(-5,1)$??

es. Esibire un vettore, non multiplo dell'altro, ortogonale a $(2,1,-1) \in \mathbb{R}^3$

$(2,1,-1)\cdot(1,1,3)=0$

$(2,1,-1)\cdot(0,1,1)=0$

" " $(1,-2,0)$

se sto in $\mathbb{R}^{3/4}$ $(a,b)\cdot(b,-a)=0$ non vale ma se annullo un numero posso usarlo

posso anche fare la somma di 2 vett. ortogonali e ottengo comunque un vett. ortogonale

$(2,1,-1)\cdot(2,-1,3)=0$

RIASSUNTO:

- y ortogonale a $\underline{x} \rightarrow hy$ è ortogonale a $\underline{x}$ $\forall h \in \mathbb{R}$
- $\underline{y}$ e $\underline{z}$ ortogonale a $\underline{x} \rightarrow \underline{y}+\underline{z}$ è ortogonale a $\underline{x}$
- $\underline{0}$ è multiplo di ??

MATRICI

es. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ RIGA colonna

Tabella ordinata di numeri reali

xk $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

A è 2 x 3 (bidimensionale non come i vettori)

matrice generica...

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ es. a_{23} è la componente nella 2° riga e 3° colonna

si può scrivere $\mathbb{R}_{m,n}$ $\mathbb{R}^{m,n}$ $M_{m,n}(\mathbb{R})$

Il vettore è una particolare matrice con una sola colonna

$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ .. \\ x_n \end{pmatrix}$ matrice n x 1 = vettore colonna

TIPI DI MATRICI:

1. QUADRATA: con n righe e n colonne
se A quadrata gli elementi $a_{11}, a_{22}, a_{33} ... a_{nn}$ formano la DIAGONALE. L'altra è la diagonale secondaria

es. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

a_{ij}: se $i=j$, a_{ij} è nella diagonale
se $i<j$ è nella zona sopra la diag.
se $i>j$ è nella zona sotto la diag.

2. TRIANGOLARE: una matrice quadrata si dice Triangolare superiore per $\boxed{a_{ij}=0 \ \forall i>j}$

es. $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ ma va bene anche così $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Triangolare inferiore per $a_{ij}=0 \ \forall i<j$

es. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

3. DIAGONALE: $\boxed{a_{ij}=0}$

es. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ ma va bene anche così $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

4. TRASPOSTA

RICORDA: $M_{m,n}(\mathbb{R})$ = insieme delle matrici m x n

Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ si dice trasposta di A la matrice che si ottiene da A scambiando le righe con le colonne

$A^T \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

es. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \longrightarrow A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$

OSS: se faccio 2 volte la trasposta torna normale $(A^T)^T = A$

vettori trasposti sono orizzontali come $\underline{x}^T$

5. SIMMETRICA

una matrice quadrata A si dice simmet. se $\boxed{A=A^T}$ cioè è simm. rispetto alla diagonale $\rightarrow \boxed{a_{ij}=a_{ji}}\ \forall ij$

es. $A=\begin{pmatrix}1&3&1\\3&-2&-4\\1&-4&2\end{pmatrix}$

6. ANTISIMMETRICA

una matrice quadrata A si dice antisimmet. se $\boxed{A^T=-A}$

$\rightarrow a_{ji}=-a_{ij}\ \forall i,j$. Sulla diagonale $a_{ii}=-a_{ii}$ quindi tutti elementi nulli.

nella trasposta è la componente che occupa la i-esima riga e la j-esima colonna

es. $A=\begin{pmatrix}0&1&3\\-1&0&-2\\-3&2&0\end{pmatrix}$

OSS. una matrice diagonale è simmetrica

OPERAZIONI TRA MATRICI

1) SOMMA $(M_{mn}(\mathbb{R}),+)$: $A+B=C$ tale che $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$

es. $\begin{pmatrix}1&3&4\\2&-1&-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4&7&1\\1&-2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&10&5\\3&-3&0\end{pmatrix}$

PROP. ASSOCIATIVA, COMMUTATIVA, elemento neutro = Mat. nulla $O_{m,n}$

OPPOSTO di A è $-A$

PRODOTTO ESTERNO: $k\in\mathbb{R}$ $A_{m\times n}\rightarrow kA_{m\times n}$ moltiplico ogni componente $\times k$

multiplo di A

$k\cdot A=O_{m,n}$ se e solo se $k=0$ oppure $A=O_{m,n}$

PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA: $(k+K)A=kA+KA\quad \forall k,K\in\mathbb{R}$

$k\cdot(A+B)=kA+kB\quad \forall A,B\in M_{m,n}(\mathbb{R})$

2) OPERAZIONI CON TRASPOSTO: $(A+B)^T=A^T+B^T$ e $(kA)^T=kA^T$

3) PRODOTTO RIGHE PER COLONNE: (prodotto per la 1° volta non commutativo)

$\underset{m\times n}{A}\cdot\underset{n\times p}{B}=C_{m\times p}$

c_{ij} = prodotto scalare tra la i-esima riga di A x la j-esima colonna di B

$$\boxed{c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}}$$

es. $\underset{2\times 3}{A}\cdot\underset{3\times 4}{B}=C_{2\times 4}$

es. $\underset{2\times3}{A}=\begin{pmatrix}1&0&-2\\-1&1&3\end{pmatrix}$ $\underset{3\times2}{B}=\begin{pmatrix}0&1\\-3&1\\6&0\end{pmatrix}$

$C=AB$ C è 2x2

$C_{11}=(1,0,-2)\cdot(0,-3,6)=-12$

$C_{21}=(-1,1,3)\cdot(0,-3,6)=-3+18=15$

$C_{12}=(1,0,-2)(1,1,0)=1$

$C_{22}=(-1,1,3)(1,1,0)=0$

$C=\begin{pmatrix}-12&1\\15&0\end{pmatrix}$

es. $\underset{2\times3}{\begin{pmatrix}1&3&1\\0&-1&-1\end{pmatrix}}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}_{3\times1}=\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}_{2\times1}$

$(1,3,1)\cdot(2,1,-1)=4$

$(0,-1,-1)(2,1,-1)=0$

30 SETTEMBRE

RIASSUNTO

- $\underline{x}\cdot e_i=x_i$

e_i = vettore di $\mathbb{R}^n$ che ha i-esima componente uguale a 1 e le rimanenti uguale a 0

- $\underset{m\times n}{A}\cdot\underset{n\times1}{e_i}$ = la i-esima colonna di A — $n\times1\rightarrow$ vettore messo come colonna

- $\underset{1\times m}{e_i^T}\cdot\underset{m\times n}{A}$ = i-esima riga di A — e_i^T = vettore messo a riga

- $O_{m\cancel{n}}\cdot A_{\cancel{n}p}=O_{mp}$

es. Trovare le matrici $B_{2\times2}$ tali che $AB=O_{2,2}$

$A=\begin{pmatrix}1&-1\\0&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11}-b_{21}&b_{12}-b_{22}\\3b_{21}&3b_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

$\begin{cases}b_{11}-b_{21}=0\\b_{12}-b_{22}=0\\3b_{21}=0\\3b_{22}=0\end{cases}\quad\begin{cases}b_{21}=0\\b_{12}=0\\b_{21}=0\\b_{22}=0\end{cases}$

Teorema: il prodotto tra matrici gode delle proprietà ASSOCIATIVA e DISTRIBUTIVA e

$k(A\cdot B)=A(kB)=(kA)\cdot B$

NON VALE COMMUTATIVA es. $(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+BA+AB+B^2$ — non sono uguali

es. sia $A=\begin{pmatrix}0&2\\1&1\end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix}-2&4\\0&0\end{pmatrix}$ verificare che $AB\neq BA$

$AB=\begin{matrix}(0,2)(-2,0)\\(1,1)(-2,0)\\(0,2)(4,0)\\(1,1)(4,0)\end{matrix}=\begin{pmatrix}0&0\\-2&4\end{pmatrix}$ $BA=\begin{matrix}(-2,4)(0,1)\\(0,0)(0,1)\\(-2,4)(2,1)\\(0,0)(2,1)\end{matrix}=\begin{pmatrix}4&0\\0&0\end{pmatrix}$

es. sia $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$ Trovare le matrici B 2x2 tali che $A\cdot B=B\cdot A$

le matrici che commutano con la matrice A

sicuro nel sist. soluzioni deve esserci almeno la matrice nulla poiché $AO=OA$ e la matrice $A\rightarrow AA=AA$

MATRICE UNITARIA/IDENTITÀ

Def: una mat. quadrata che ha 1 sulla diagonale e altrove 0. $\boxed{I_n}$ ha ordine nxn

es. $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ es. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$A\in M_{m,n}(\mathbb{R})$

$A_{m\times n}\cdot I_n=A\qquad I_n\cdot A_{m\cdot n}=A$

se $m=n\quad I_nA=AI_n=A$

I_n è l'elemento neutro per il prodotto tra matrici quadrate (x non quadrate non esiste l'elemento neutro)

RICORDA: le matrici diagonali commutano tra loro (come anche I_n e la matrice stessa)

INVERSA

Def: sia A una matrice nxn l'inversa di A è denotata con A^{-1} ed è una matrice tale che: — solo x matrici quadrate

$$\boxed{A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I_n}$$

Problema: Quali matrici sono invertibili?

$O_{m,n}$ matrice nulla non è invertibile

es. Dimostrare che A non è invertibile

$A=\begin{pmatrix}1&2\\-2&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}+2a_{21}&a_{12}+2a_{22}\\-2a_{11}-4a_{21}&-2a_{12}-4a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$\begin{cases}a_{11}+2a_{21}=1\\a_{12}+2a_{22}=0\\-2a_{11}-4a_{21}=0\rightarrow a_{11}+2a_{21}=0\\-2a_{12}-4a_{22}=1\rightarrow a_{12}+2a_{22}=-\frac{1}{2}\end{cases}$ non possono essere contemporaneamente vere ASSURDO

quindi

$\begin{pmatrix}1&2\\-2&-4\end{pmatrix}$ non è invertibile

Teo: inversa di una matrice A se esiste è unica e se

$$\boxed{\begin{matrix} A\cdot B=I_n \rightarrow A=B^{-1} \\ B\cdot A=I_n \rightarrow B=A^{-1} \end{matrix}} \longrightarrow A\cdot B=I_n \rightarrow B\cdot A=I_n$$ una sta all'altra

es. dire se $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$ è invertibile e in caso di risposta aff. trovare A^{-1}

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}+2a_{21}&a_{12}+2a_{22}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}a_{11}+2a_{21}=1\\a_{21}=0\\a_{12}+2a_{22}=0\\a_{22}=1\end{cases} \rightarrow \begin{matrix}a_{11}=1\\a_{21}=0\end{matrix}$$

??

Applico la regola di cancellazione alle matrici

- $A\cdot B=O_{m,n}$ se A è invertibile

$A^{-1}\cdot A\cdot B=A^{-1}\cdot O_{m,n} \longrightarrow I_nB=O_{m,n} \longrightarrow B=O_{m,n}$

oppure B è invertibile

$B^{-1}\cdot A\cdot B=B^{-1}\cdot O_{m,n} \longrightarrow I_nA=O_{m,n} \longrightarrow A=O_{m,n}$

se ho prodotto di 2 matrici di cui 1 invertibile l'altra è 0

- $A\cdot B=A\cdot C \xrightarrow{?} B=C$

se A invertibile allora sì

$AB=AC \rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot B=A^{-1}\cdot A\cdot C \longrightarrow I_nB=I_nC \rightarrow B=C$

altrimenti ? non è detto $\rightarrow$ in generale $B\neq C$

Come la trasposizione interagisce col prodotto

RICORDA: $(A+B)^T=A^T+B^T$ e $(\lambda A)^T=\lambda A^T$

$(A\cdot B)^T$?? quanto vale? Posso scrivere il prodotto come la somma con A^T+B^T?

$(A\cdot B)^T=D \qquad C=A\cdot B \qquad C^T=D$

$d_{ij}=c_{ji}=$ j-esima riga di A per i-esima colonna di B = j-esima colonna di A^T per la i-esima riga di B^T

$D=B^T\cdot A^T \neq A^T\cdot B^T$ quindi ok come somma ma con ordine cambiato xk prodotto si fa righe della 1° matrice (B) x colonne della seconda (A) nel caso di d_{ij}

Sottomatrici (servirà x calcolare il rango)

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$$

sottomatrice di A individuata dalla 1° e 3° riga di A e dalla 2° e 3° colonna

$$\begin{pmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$$

Non posso prendere elementi a caso come:

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$$

DEF: una sottomat. $p\times q$ di una matrice A è individuata da p righe di A e q colonne

Blocco

DEF: una sottom. di A costituita da componenti contigue in A

es. $\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$

Teo: siano A e B 2 matrici per cui è possibile calcolare il prodotto A·B.
Allora dividendo A e B in blocchi, A·B si può calcolare trattando i blocchi come numeri
(se la moltiplicazione tra blocchi si può fare)

es. x capire teo

sono blocchi non numeri/componenti

ricorda prodotto tra matrici non commutativo

$$\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}&A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}\\A_{21}\cdot B_{11}+A_{22}\cdot B_{21}&A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}\end{pmatrix}$$

Ogni blocco di A si deve poter moltiplicare x ogni blocco di B

es.

$$\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\O&A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\\I_n&O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}B_{11}+A_{12}&A_{11}B_{12}\\A_{22}&O\end{pmatrix}$$

qui mi torna utile fare l'operazioni a blocchi

es.

$A_{n\times n}\cdot B_{n\times n}$ considero a A come un blocco