

Th \exists è multiplo della funzione det. $\forall n > 0 \exists$ la funzione

D la quale ad un dato n associa la somma delle matrici

quadrati $n \times n$ in un campo K o valori in K tale che

(d1) Se lo K -esimo colonna della matrice A è somma

di due altre colonne, $A^k = B^k + C^k$ allora:

$$D(A^1, \dots, B^k + C^k, \dots, A^m) = D(A^1, \dots, B^k, \dots, A^m) + D(A^1, \dots, C^k, \dots, A^m)$$

(d2) Se $\lambda \in K$ allora $D(A^1, \dots, \lambda A^k, \dots, A^m) = \lambda D(A^1, \dots, A^k, \dots, A^m)$

(d3) Se nella matrice A sono due colonne contigue allora

$$\det(A) = 0$$

$$(d4) D(I_n) = 1$$

Proprietà:

(d5) Se nella matrice A si scambiano due colonne contigue

determinante di A cambia di segno

Si consideri infatti la matrice $(A^1, \dots, A^k + A^{k+1}, A^k + A^{k+1}, \dots, A^n)$ che ha due colonne contigue uguali e quindi, per la (d3), determinante 0. Usando allora la proprietà (d1) si ha:

$$\begin{aligned} D(A^1, \dots, A^k + A^{k+1}, A^k + A^{k+1}, \dots, A^n) &= \\ &= D(A^1, \dots, A^k, A^k, \dots, A^n) + D(A^1, \dots, A^k, A^k + A^{k+1}, \dots, A^n) + \\ &\quad + D(A^1, \dots, A^{k+1}, A^k, \dots, A^n) + D(A^1, \dots, A^{k+1}, A^{k+1}, \dots, A^n) = \\ &= D(A^1, \dots, A^k, A^k + A^{k+1}, \dots, A^n) + D(A^1, \dots, A^{k+1}, A^k, \dots, A^n) = 0, \end{aligned}$$

pertanto gli ultimi due addendi sono di segno opposto.

(d6) Se la matrice ha due qualsiasi colonne uguali allora

$$\det(A) = 0$$

Però anche scambiando nella matrice A successivamente

scambi di colonne contigue, fino a quando le due

colonne uguali non sono contigue. Ad ogni scambio

determinanti cambia segno, ma l'ultimo determinante

alternata ho $\det = 0$, quindi $D(A) = 0$

d7 Siano A^k e A^h due colonne distinte di A e sia λ uno scalare. Se la colonna A^k è sostituita con la colonna $A^k + \lambda A^h$ il \det di Θ non cambia

Per le proprietà (d₁) e (d₂) si può infatti scrivere

$$\begin{aligned} D(A^1, \dots, A^k + \lambda A^h, \dots, A^n) &= \\ &= (A^1, \dots, A^k, \dots, A^n) + \lambda D(A^1, \dots, A^h, \dots, A^n). \end{aligned}$$

Ma nella matrice $(A^1, \dots, A^h, \dots, A^n)$ la colonna A^h compare come colonna h -esima e colonna k -esima quindi, per la proprietà (d₆), il suo determinante è 0.

Unicità

Dato un campo K , consideriamo due vettori colonna X^1 e X^2 dello spazio vettoriale K^2 e due loro combinazioni

lineari:

$$Y^1 = \alpha_{11} X^1 + \alpha_{21} X^2$$

$$Y^2 = \alpha_{12} X^1 + \alpha_{22} X^2$$

e ho allora $D(Y^1, Y^2) = D(\alpha_{11} X^1 + \alpha_{21} X^2, \alpha_{12} X^1 + \alpha_{22} X^2)$

e in virtù delle proprietà (d₁) e (d₂)

$$\begin{aligned} \text{Anzi: } D(Y^1, Y^2) &= \alpha_{11} \alpha_{12} D(X^1, X^1) + \alpha_{11} \alpha_{22} D(X^1, X^2) + \\ &+ \alpha_{21} \alpha_{12} D(X^2, X^1) + \alpha_{21} \alpha_{22} D(X^2, X^2) \end{aligned}$$

notante $D(Y^1, Y^2)$ è ottenibile sommando gli elementi del 2×2

$\alpha_{d(1)} \alpha_{d(2)} D(X^{d(1)}, X^{d(2)})$, al variare di d nell'insieme

di tutti le applicazioni di $\{1, 2\}$ in sé. Lo stesso

procedimento può essere esteso a n vettori colonna

X^1, \dots, X^n dello spazio vettoriale K^n . Precisamente, se

si considerano m combinazioni lineari

$$\begin{aligned} Y^1 &= \alpha_{11} X^1 + \dots + \alpha_{m1} X^m \\ &\dots \\ Y^m &= \alpha_{1m} X^1 + \dots + \alpha_{mm} X^m \end{aligned}$$

allora $D(Y^1, \dots, Y^m) = D(\alpha_{11} X^1 + \dots + \alpha_{m1} X^m, \dots, \alpha_{1m} X^1 + \dots + \alpha_{mm} X^m)$

Determinanti dello spostamento

se scambie le righe con le colonne il det non cambia, $D(A) = D(A^t)$

Se sono A e B due matrici $n \times n$ allora

$$D(AB) = D(A) \cdot D(B)$$

Matrice invertibile

Se A è una matrice quadrata di ordine n . Se A è invertibile allora $D(A) \neq 0$ e $D(A^{-1}) = D(A)^{-1}$

DIM: perché $A \cdot A^{-1} = I_n$ segue che

$$D(AA^{-1}) = D(A) \cdot D(A^{-1}) = D(I_n) = 1 \quad \text{quindi}$$

$$D(A) \neq 0, \quad D(A^{-1}) \neq 0 \quad \text{e} \quad D(A^{-1}) = D(A)^{-1}$$

Se A è una matrice $n \times n$ su K . Le seguenti proprietà sono equivalenti

- $D(A) \neq 0$

- la matrice A è invertibile

- le colonne di A sono vettori di K^n linearmente indipendenti e sarebbero un controesempio con questo TH

TEOREMA: Se K è un campo. Se i vettori colonna

$$A^1, \dots, A^n \text{ di } K^n \text{ sono linearmente indipendenti allora } D(A^1, \dots, A^n) \neq 0$$

DIM: Se i vettori A^1, \dots, A^n sono linearmente dipendenti allora $\exists \alpha$

α di scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ non tutti nulli tali che

$$\lambda_1 A^1 + \dots + \lambda_n A^n = 0$$

Supponiamo che $\lambda_i \neq 0$ ma degli scalari $\neq 0$ e scriviamo A^i come combinazione lineare degli altri vettori:

$$A^i = \beta_1 A^1 + \dots + \beta_n A^n \quad \text{usando le proprietà (a) e (b) si ha}$$

$$D(A^1, \dots, A^i, \dots, A^m) = D(A^1, \dots, \beta_1 A^i + \dots + \beta_n A^i, \dots, A^m) =$$

$$= \beta_1 D(A^1, \dots, A^i, \dots, A^m) + \dots + \beta_n D(A^1, \dots, A^i, \dots, A^m)$$

Ma in questo nome manca il termine α -esimo, quindi la matrice che ne componiamo ha come tutte e due colonne uguali e pertanto il suo det è 0. Ne segue che $D(A^1, \dots, A^m) = 0$

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e sia $L: V \rightarrow V$ un'endomorfismo lineare. Se B e B' sono due basi di V , le matrici quadrate

$$A = M_B^B(L) \quad \text{e} \quad A' = M_{B'}^{B'}(L) \quad \text{hanno lo stesso determinante.}$$

Essi infatti sono similitudine, \exists cioè una matrice invertibile N :

$$A' = N^{-1} A N \quad \text{ne segue che}$$

$$D(A') = D(N^{-1} A N) = D(N^{-1}) D(A) D(N) = D(A)$$

WIKIPEDIA

Determinante (algebra)

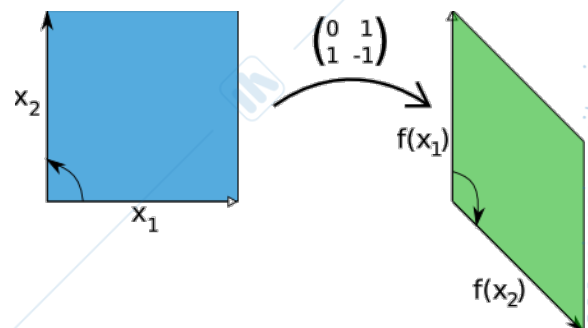
Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

In algebra lineare, il **determinante** di una matrice quadrata A è un numero che descrive alcune proprietà algebriche e geometriche della matrice.

Esso viene generalmente indicato con $\det(A)$ e, a volte, con $|A|$. Quest'ultima notazione è più compatta, ma anche più ambigua, in quanto utilizzata talvolta per descrivere una norma della matrice.^[1]

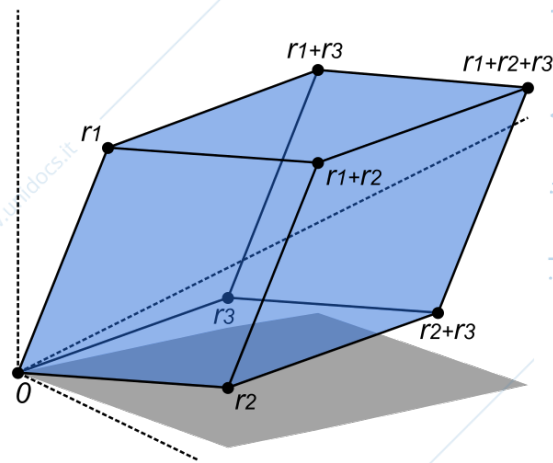
Il determinante è un potente strumento usato in vari settori della matematica: innanzitutto nello studio dei sistemi di equazioni lineari, quindi nel calcolo infinitesimale a più dimensioni (ad esempio nello Jacobiano), nel calcolo tensoriale, nella geometria differenziale, nella teoria combinatoria, ecc.

Il significato geometrico principale del determinante si ottiene interpretando la matrice quadrata A di ordine n come trasformazione lineare di uno spazio vettoriale a n dimensioni: con questa interpretazione, il valore assoluto di $\det(A)$ è il fattore con cui vengono modificati i volumi degli oggetti contenuti nello spazio (anche se ciò è improprio senza considerare il significato di misura). Se è diverso da zero, il segno del determinante indica inoltre se la trasformazione A preserva o cambia l'orientazione dello spazio rispetto agli assi di riferimento.



Una trasformazione lineare del piano cartesiano è descritta da una matrice quadrata 2×2 . Il determinante della matrice fornisce delle informazioni sulla trasformazione: il valore assoluto descrive il cambiamento di area, mentre il segno descrive il cambiamento di orientazione.

Nell'esempio qui riportato, la matrice ha determinante -1 : quindi la trasformazione preserva le aree (un quadrato di area 1 si trasforma in un parallelogramma di area 1) ma inverte l'orientazione del piano.



Il volume di questo parallelepipedo è il valore assoluto del determinante della matrice 3×3 formata dai vettori r_1 , r_2 e r_3 . Questa relazione fra volume e determinante è valida in qualsiasi dimensione.

Indice

Definizione

- Definizione tramite assiomi
- Definizione costruttiva

Metodi di calcolo

- Matrici quadrate di ordine 2
- Matrici quadrate di ordine 3
- Sviluppo di Laplace
- Algoritmo di Gauss
- Esempio

Proprietà

- Proprietà elementari
- Moltiplicazione di matrici
- Trasposte, matrici simili
- Autovalori
- Derivata