

GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2019/20

DOMANDE FREQUENTI

Questa lista contiene alcune domande tipiche che possiamo fare durante l'orale. Per mettere la/o studente nelle condizioni migliori per iniziare l'esame, abbiamo deciso che la prima domanda dell'orale sarà sempre una di queste nella lista. *Attenzione:* ricordiamo che l'esame è su tutto il programma svolto (includere le dimostrazioni viste a lezione), quindi le domande successive possono essere diverse da quelle presenti qui e coprire argomenti che qui non sono menzionati (ma sono stati fatti a lezione).

Questa lista non è ancora esaustiva: lo sarà alla fine del corso.

1. Nozioni generali

- (1) Cos'è una funzione iniettiva? suriettiva? bigettiva?
- (2) Proprietà dei numeri complessi: formano un campo, complesso coniugato, rappresentazione geometrica, coordinate polari, radici n -esime.
- (3) Polinomi e loro radici. molteplicità di una radice. Enunciato del Teorema fondamentale dell'algebra.
- (4) Definizione e proprietà del prodotto vettoriale in \mathbb{R}^3 .

2. Matrici

- (1) Operazioni algebriche di base sulle matrici: somma, prodotto, traccia, trasposta. Definizione di matrice invertibile.
- (2) Sistemi lineari. Mosse di Gauss. Algoritmo di Gauss – Jordan per risolvere sistemi lineari.
- (3) Teorema di Rouché – Capelli.
- (4) Definizione, calcolo e proprietà di rango e determinante di una matrice (formula di Binet, sviluppo di Laplace, formula di Cramer).

3. Spazi vettoriali

- (1) Cos'è un sottospazio vettoriale?
- (2) Definisci intersezione $U \cap W$ e somma $U + W$ di sottospazi vettoriali $U, W \subset V$. Mostra che $U \cap W$ e $U + W$ sono anche loro sottospazi vettoriali di V .
- (3) Definisci la somma diretta fra sottospazi di V .
- (4) Cosa vuol dire che alcuni vettori v_1, \dots, v_k generano V ? Che sono indipendenti? Che formano una base di V ?
- (5) Estrai una base da un insieme di generatori dato. Completa un insieme di vettori indipendenti dato ad una base.

2 GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2019/20 DOMANDE FREQUENTI

- (6) Definisci la dimensione di V . Dimostra che è ben definita, cioè che due basi hanno sempre la stessa cardinalità.
- (7) Enuncia e dimostra la Formula di Grassmann.

4. Applicazioni lineari

- (1) Cos'è una applicazione lineare?
- (2) Cosa sono il nucleo e l'immagine di una applicazione lineare $T: V \rightarrow W$? Dimostra che sono sottospazi rispettivamente di V e W .
- (3) Come è definita la matrice associata ad una applicazione lineare?
- (4) Costruisci una applicazione lineare che soddisfi alcune proprietà date.
- (5) Enuncia e dimostra il Teorema della dimensione.

5. Diagonalizzabilità e Forma di Jordan

- (1) Definisci autovalori, autovettori, autospazio, diagonalizzabilità di un endomorfismo o matrice.
- (2) Definizione e proprietà del polinomio caratteristico di una matrice. Perché le sue radici sono gli autovalori della matrice?
- (3) Dimostra che autovalori con autovettori distinti sono sempre indipendenti.
- (4) Dimostra che gli autospazi di un endomorfismo sono in somma diretta.
- (5) Enuncia e dimostra il Teorema di diagonalizzabilità.
- (6) Determina se una data matrice o endomorfismo è diagonalizzabile.
- (7) Determina la forma di Jordan di una matrice data.

6. Prodotti scalari

- (1) Cos'è un prodotto scalare? Cosa vuol dire che è degenere o definito positivo? Fai degli esempi.
- (2) I vettori isotropi sono sempre nel radicale? I vettori nel radicale sono sempre isotropi? Un prodotto scalare non degenere può contenere vettori isotropi? Fai degli esempi.
- (3) Come è definita la matrice associata ad un prodotto scalare rispetto ad una base? Cosa succede se cambio base?
- (4) Definizione e calcolo del sottospazio ortogonale W^\perp ad un sottospazio $W \subset V$. Definizione e calcolo del radicale V^\perp .
- (5) Enuncia e dimostra il teorema che mette in relazione W e W^\perp e le loro dimensioni (l'enunciato con 4 punti).
- (6) Definisci la segnatura di una matrice simmetrica o di un prodotto scalare.
- (7) Enuncia e dimostra il Teorema di Sylvester.
- (8) Determina la segnatura di una matrice o di un prodotto scalare dato.
- (9) Dimostra che la segnatura di una matrice diagonale è pari al numero di elementi positivi, negativi e nulli sulla diagonale.

- (10) Dato un prodotto scalare su V , determina se esistono sottospazi $W \subset V$ con una segnatura data.

7. Prodotti scalari definiti positivi

- (1) Definisci la norma, la distanza, e l'angolo fra due vettori non nulli. Descrivi le principali proprietà di queste nozioni.
- (2) Definisci la proiezione ortogonale p_U su un sottospazio vettoriale $U \subset V$. Calcola p_U per un sottospazio $U \subset \mathbb{R}^3$.
- (3) Ortogonalizza una base tramite il metodo di Gram – Schmidt
- (4) Cos'è una isometria vettoriale? Dimostra che esistono 3 definizioni equivalenti (isomorfismo che mantiene il prodotto scalare, la norma, la distanza).
- (5) Cos'è una matrice ortogonale? Che proprietà ha?
- (6) Dimostra che le uniche matrici ortogonali 2×2 sono Rot_θ e Rif_θ .
- (7) Dimostra che le uniche isometrie vettoriali di \mathbb{R}^3 sono rotazioni e antirotazioni.
- (8) Scrivi una rotazione in \mathbb{R}^3 con asse e angolo dati.
- (9) Determina il tipo di isometria di una matrice ortogonale 3×3 data.

8. Geometria affine

- (1) Risolvi esercizi su rette e piani affini in \mathbb{R}^3 .
- (2) Enuncia e dimostra le formule per calcolare la distanza fra un punto e una retta, un punto e un piano, due rette sghembe.
- (3) Definisci e calcola l'angolo fra due rette, una retta e un piano, due piani.
- (4) Definisci affinità, isomorfismo affine, isometria affine.
- (5) Mostra che $f(x) = Ax + b$ è un isomorfismo affine $\iff A$ è invertibile, ed una isometria $\iff A$ è ortogonale.
- (6) Scrivi vari tipi di isomorfismi e isometrie affini in \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 : omotetia di centro P , rotazione in \mathbb{R}^2 di centro P , rotazione in \mathbb{R}^3 intorno ad una retta affine, riflessione rispetto ad un piano o retta affine, rototraslazione in \mathbb{R}^3 intorno ad una retta r di un certo passo d , antirotazioni, glissoriflessioni in \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 .
- (7) Dimostra che se A non ha 1 come autovalore allora $f(x) = Ax + b$ ha esattamente un punto fisso.
- (8) Dimostra la classificazione delle isometrie affini del piano che preservano l'orientazione.
- (9) Enuncia la classificazione delle isometrie affini del piano e dello spazio. Determina il tipo di isometria affine data.

9. Teorema spettrale

- (1) Definisci i prodotti hermitiani.

4 GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2019/20 DOMANDE FREQUENTI

- (2) Definizione e proprietà degli endomorfismi autoaggiunti.
- (3) Enuncia e dimostra il Teorema spettrale

10. Coniche e quadriche