www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

RELAZIONI E OPERAZIONI 2

Una relazione ~ su un dato insieme A si dice relazione di equivalenza se, $\forall\, a,b,c \in A$, valgono le seguenti proprietà:

(i) $a \sim a$ proprietà riflessiva

(ii) $a \sim b$ implica $b \sim a$ proprietà simmetrica

(iii) $a \sim b$ e $b \sim c$ implica $a \sim c$ proprietà transitiva

Una partizione di un insieme A è una famiglia di sottoinsiemi di A ciascuno non vuoto, a 2 a 2 disgiunti e tali che la loro unione è A. Una relazione di equivalenza sull'insieme A definisce una partizione di A, e viceversa, una partizione di A definisce una relazione di equivalenza su A. Dato un insieme A e una relazione R di equivalenza di A, la partizione di A definita da R, i suoi elementi si chiamano classi di equivalenza.

2.2 Operazioni

Una *legge di composizione interna* (binaria) definita in un insieme A, o anche una *operazione interna* in A, è una applicazione di $A \times A$ in A. Quando l'operazione sia indicata ad esempio con il simbolo $\circ$, l'immagine dell'elemento (a,b) di $A \times A$ si denota con $a \circ b$. Una operazione interna $\circ$ definita in un insieme A ha un qualche rilievo se gode di alcune proprietà fondamentali. Si dice che l'operazione $\circ$ è *associativa* se gode della seguente proprietà:

$$(1) \qquad a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c \quad \text{per ogni} \quad a,b,c \in A.$$

Si dice che $\circ$ è *commutativa* se:

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

$$(2) \qquad a \circ b = b \circ a \quad \text{per ogni} \quad a, b \in A.$$

Un elemento u di A si chiama *elemento neutro* rispetto all'operazione $\circ$ se:

$$(3) \qquad a \circ u = u \circ a = a \quad \text{per ogni} \quad \in A.$$

Se esiste un elemento neutro esso è unico, se infatti u e u' sono sono elementi neutri rispetto a $\circ$, si ha subito

$$u' \circ u = u \circ u' = u = u'.$$

Quando l'operazione $\circ$ possiede l'elemento neutro u, si dice che un elemento a di A è *invertibile* se esiste un elemento $a' \in A$ tale che

$$(4) \qquad a \circ a' = a' \circ a = u.$$

L'elemento a' si chiama *inverso di a* e, se l'operazione $\circ$ è associativa, esso è unico. Se infatti a' e a'' sono inversi di a si ottiene subito

$$a' = u \circ a' = (a'' \circ a) \circ a' = a'' \circ (a \circ a') = a'' \circ u = a''.$$

2.3 Strutture algebriche

Un insieme A con una o piu operazioni $\circ, \times, ...$, si chiama una *struttura algebrica* e, quando sia conveniente, si indica con $(A, \circ, \times, ...)$. Consideriamo due strutture algebriche $(A, \circ)$ e $(B, \times)$. Una applicazione $f : A \to B$ si dice un *omomorfismo* della struttura $(A, \circ)$ nella strutlura $(B, \times)$ se:

$$(5) \qquad f(a \circ b) = f(a) \times f(b) \quad \text{per ogni} \quad a, b \in A.$$

Se inoltre f e biiettiva, prende il nome di *isomorfismo* e le strutture $(A, \circ)$ e $(B, \times)$ si dicono *isomorfe*. Un isomorfismo di una struttura algebrica in sè stessa si dice anche un *automorfismo*.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Teorema 2.3.1. *Sia f un isomorfismo della strullura algebrica $(A, \circ)$ sulla struttura algebrica $(B, \times)$.*
Se $\circ$ è associativa, allora $\times$ è associativa.
Se $\circ$ è commutativa, allora $\times$ è commutativa.
Se u è l'elememo neutro rispetto a $\circ$ allora $f(u)$ è l'elemento neutro rispetto a $\times$.
Se $a \in A$ è invertibile e a' è un suo suo inverso, allora $f(a)$ è invertibile e $f(a')$ è un suo inverso.

Dim. L'applicazione f è biiettiva, pertanto comunque si consideri un elemento b di B esiste ed è unico l'elemento a di A tale che $f(a) = b$.
Supponiamo $\circ$ associativa e siano b_1, b_2, b_3 elementi di B,

$$b_1 \times (b_2 \times b_3) = f(a_1) \times [f(a_2) \times f(a_3)] =$$
$$= f(a_1) \times f(a_2 \circ a_3) = f[a_1 \circ (a_2 \circ a_3)] =$$
$$= f[(a_1 \circ a_2) \circ a_3] = f(a_1 \circ a_2) \times f(a_3) =$$
$$= [f(a_1) \times f(a_2)] \times f(a_3) = (b_1 \times b_2) \times b_3$$

ne segue che anche l'operazione $\times$ è associativa.
Supponiamo ora che $\circ$ sia commutativa, per ogni b_1 e b_2 in B si ha

$$b_1 \times b_2 = f(a_1) \times f(a_2) = f(a_1 \circ a_2) =$$
$$= f(a_2 \circ a_1) = f(a_2) \times f(a_1) = b_2 \times b_1,$$

quindi anche l'operazione $\times$ è commutativa. Sia $u \in A$ l'elemento neutro rispetto a $\circ$ e consideriamo un qualsiasi elemento b di B,

$$b \times f(u) = f(a) \times f(u) = f(a \circ u) = f(a) = b,$$

inoltre

$$f(u) \times b = f(u) \times f(a) = f(u \circ a) = f(a) = b,$$

pertanto $f(u)$ è l'elemento neutro rispetto a $\times$.
Se infine l'elemento $a \in A$ è invertibile e a' è un suo inverso, da

$$f(a) \times f(a') = f(a \circ a') = f(u),$$

e da

$$f(a') \times (a) = f(a' \circ a) = f(u),$$

segue che anche $f(a)$ è invertibile e $f(a')$ è un suo inverso. □

Sia G un insieme con una operazione interna $\circ$. Si dice che la struttura algebrica $(G, \circ)$ è un *gruppo*, oppure che G è un gruppo rispetto all'operazione $\circ$, se:

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

(g_1) l'operazione $\circ$ è associativa,

quindi se $b * a = a * b$

(g_2) esiste l'elemento neutro rispetto a $\circ$,

(g_3) ogni elemento di G è invertibile.

Se inoltre l'operazione $\circ$ è commutativa il gruppo $(G, \circ)$ si chiama *commutativo* o *abeliano*.

Dato un sottoinsieme non vuoto H di G, se per ogni $a, b \in H$ si ha $a \circ b \in H$, l'operazione $\circ$ è una operazione interna in H. In questo caso, se la struttura algebrica $(H, \circ)$ è a sua volta un gruppo, si dice che è un *sottogruppo* di $(G, \circ)$.

Esempio 2.3.2. Siano $+$ e $\cdot$ le operazioni di addizione e moltiplicazione fra numeri reali. Poniamo inoltre

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}, \quad \mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}, \quad \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}.$$

$(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ sono gruppi commutativi con elemento neutro 0, l'inverso del numero a è $-a$. $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$, $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ sono gruppi commutativi con elemento neutro 1, l'inverso del numero a è $1/a$. $(\mathbb{Z}^*, \cdot)$ non è un gruppo.

Consideriamo un insieme K con due operazioni interne, una detta di *addizione* e indicata con $+$, l'altra detta di *moltiplicazione* e indicata con $\cdot$. Si dice che la struttura algebrica $(K, +, \cdot)$ è un *campo* se:

(c_1) la struttura algebrica $(K, +)$ è un gruppo commutativo,

(c_2) indicato con 0 l'elemento neutro rispetto all'operazione di addizione $+$ e posto $K^* = K - \{0\}$, la struttura algebrica $(K^*, \cdot)$ è un gruppo commutativo,

(c_2) vale la seguente proprietà *distributiva*:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \text{per ogni} \quad a, b, c \in K.$$

L'elemento neutro 0 della proprietà c_2 si chiama *lo zero* del campo, l'elemento neutro della moltiplicazione si indica invece con 1 e si chiama *l'unità* del campo. Dato un sottoinsieme non vuoto H di K, se le operazioni $+$ e $\cdot$ sono operazioni interne in H e la struttura algebrica $(H, +, \cdot)$ è a sua volta un campo, si dice che $(H, +, \cdot)$ è un *sottocampo* di $(K, +, \cdot)$.

La nozione di campo sarà ripresa nell'ultimo capitolo, nel seguito il lettore potrà fare riferimento al campo dei numeri reali $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ o al suo sottocampo dei numeri razionali $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$. Si osservi che $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ non è un campo.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Numeri complessi:

insieme $\mathbb{R}^2$ di coppie di numeri reali

Il campo dei numeri complessi si ottiene a partire dall'insieme $\mathbb{R}^2$ delle coppie ordinate di numeri reali definendo su $\mathbb{R}^2$ le seguenti operazioni di addizione e moltiplicazione:

(6) $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$

(7) $(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, ad + bc)$

per tutte le coppie $(a,b), (c,d) \in \mathbb{R}^2$

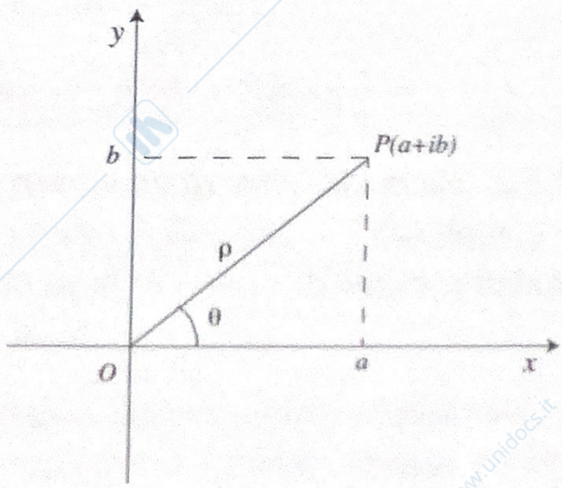
e abbiamo che la struttura algebrica $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ è un CAMPO, esso si denota con $\mathbb{C}$ e prende il nome di campo dei numeri complessi. L'elemento neutro dell'addizione è $(0,0)$ mentre quello della moltiplicazione è $(1,0)$

Il numero complesso $(0,1)$ si chiama unità immaginaria e si denota con "i"

poiché $i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -1$

il numero "i" è la radice in $\mathbb{C}$ dell'eq $x^2 = -1$.

I numeri complessi si possono rappresentare con i punti del piano reale non appena si fissi un sistema di riferimento cartesiano come in figura. Il punto P di coordinate (a,b) rappresenta il numero complesso $z = a + ib$. I numeri reali sono rappresentati dai punti dell'asse x.



Indichiamo con ρ la distanza di P da O e con θ la misura (definita a meno di multipli di 2π) dell'angolo che il semiasse positivo x forma con la semiretta OP. I

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Numeri reali ρ e ϑ si chiamano rispettivamente modulo e argomento di z e che da

$a = \rho \cos \vartheta$ e $b = \rho \operatorname{sen} \vartheta$ segue che

$z = a + ib = \rho(\cos \vartheta + i \operatorname{sen} \vartheta)$

Radici n-esime di un numero complesso

Dato un numero complesso $z = \rho(\cos \vartheta + i \operatorname{sen} \vartheta)$ ed un numero intero positivo n, determinare le radici n-esime di z, ovvero le soluzioni dell'equazione

$x^n = z$

posto $x = r(\cos \phi_k + i \operatorname{sen} \phi_k) \longrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \phi_k = \dfrac{\vartheta + 2k\pi}{n} \end{cases}$

con k un numero reale $k = 0, 1, \ldots n-1$

le radici n-esime sono di numero pari all'indice

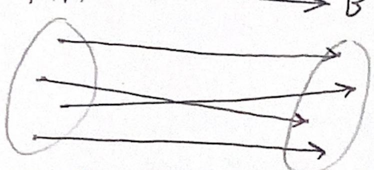
APPLICAZIONI —

siano dati due insiemi A e B. un'applicazione è una legge che associa a ciascun elemento di A un unico elemento di B. se α è un'applicazione di A in B scriveremo.

$\alpha : A \longrightarrow B$, l'insieme A si chiama dominio e B è il codominio di α

applicazione suriettiva è quando ogni elemento del secondo insieme è raggiunto da almeno una freccia da parte del 1 insieme

$F : A \longrightarrow B$



f è suriettiva se $\operatorname{Im}(f) = B$ se b è un elemento di B e a è un elemento di A

$b = f(a)$

applicazione iniettiva: ogni elemento di A punta ad un unico elemento di B. però è possibile che tutti gli elementi di B non vengano raggiunti.

BIIEZIONE

applicazione biunivoca (biettiva) è una funzione sia iniettiva che suriettiva. una funzione biettiva è invertibile. (ISOMORFISMO)

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari