Applicazioni lineari

$$\begin{cases} x+2y-2z=2 \\ 4x+9y-7z=8 \\ 2x+3y-9z=-10 \end{cases} \qquad x\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2\\9\\3\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}-2\\-7\\-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\8\\-10\end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^3 \quad f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3 \qquad f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\overset{def}{=}x\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2\\9\\3\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}-2\\-7\\-10\end{pmatrix}$ } COMBINAZIONE LINEARE DEI VETTORI

- Risolvere il sistema equivale a trovare vettori $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ tali che $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\8\\-10\end{pmatrix}$

- f suriettiva $\Rightarrow$ il sistema ha soluzione, o meglio, per ogni possibile scelta dei termini noti il sistema ha soluzioni
- il sistema ha soluzioni $\Leftrightarrow$ il vettore dei termini noti appartiene all'immagine di f
- $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ è iniettiva $\Leftrightarrow$ non succede mai che il sistema ha almeno due soluzioni diverse (comunque scelga i termini noti) OPPURE

  $\Leftrightarrow$ per ogni scelta dei termini noti il sistema ha al più una soluzione

Definizione: una funzione $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ si dice APPLICAZIONE LINEARE se è della forma:

$$f:\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_m\end{pmatrix}=x_1\vec{v}_1+\dots+x_m\vec{v}_m \quad \text{dove } \vec{v}_1,\dots,\vec{v}_m\in\mathbb{R}^n$$

Esempio

1) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2 \qquad f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

2) $g:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^7$

$$g\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}1\\2\\3\\1\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}5\\6\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$f \rightsquigarrow \begin{cases} x_1-3x_2+x_3=\alpha \\ 2x_1+4x_2-2x_3=\beta \end{cases}$ 2 equazioni, 3 incognite

$g \rightsquigarrow \{$ 7 equazioni, 4 incognite

Il sistema e applicazione lineare sono due modi diversi per vedere la stessa cosa.

Formula di GAUSS / riduzione di Gauss

→ algoritmo per risolvere i sistemi

$$\begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{matrix}\begin{cases} x+2y-2z=2 \\ 4x+9y-7z=8 \\ 2x+3y-9z=-10 \end{cases} \xrightarrow{\substack{\text{II}-4\text{I} \\ \text{III}-2\text{I}}} \begin{cases} x+2y-2z=2 \\ 4x+9y-7z=8 \\ 4x-8y+8z=+8 \\ 2x+3y-9z=-10 \\ 2x-4y+4z=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-2z=2 \\ 0+y+z=0 \\ 0+y-5z=-14 \end{cases} \xrightarrow{\text{III}+\text{II}} \begin{cases} x+2y-2z=2 \\ y+z=0 \\ -4z=-14 \end{cases}$$

sotto la x ci devono essere 0

$x+2y-2z=2$ → si risolve la I

$-4z=-14$ → $z=\frac{7}{2}$

SISTEMA TRIANGOLARE → si risolve la I e la II

→ si prende un coefficiente per volta

$$\begin{cases} x+\cancel{2}\left(-\frac{7}{\cancel{2}}\right)-\cancel{2}\left(\frac{7}{\cancel{2}}\right)=2 \\ y=-\frac{7}{2} \\ z=\frac{7}{2} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x=7+7+2 \Rightarrow x=16 \\ y=-\frac{7}{2} \\ z=\frac{7}{2} \end{cases}$$

Applicazioni lineari

$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \overset{def}{=} \begin{pmatrix}3x-2z\\4x\\5y-7z\end{pmatrix}$ $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$

$f\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0&-2\\4&0&0\\0&5&-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\\-17\end{pmatrix}$

? f è un A.L. → $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=x\vec{v}_1+y\vec{v}_2+z\vec{v}_3$ dove $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\in\mathbb{R}^3$ Definizione

→ cioè f è della forma seguente? (COMBINAZIONI LINEARI DI $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$)

Esempio

1) $\begin{cases} 3x \quad -2z=\alpha \\ 4x \quad =\beta \\ 5y-7z=\gamma \end{cases}$ $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}-2\\0\\-7\end{pmatrix}$ è un'applicazione lineare? SI

2) $g\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y+1\\x^2+y\end{pmatrix}$ $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ è un'AL? NO 1) c'è un termine noto (+1) non moltiplicato per x o y

2) compare un termine non lineare (x^2)

DEFINIZIONE: $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ è un'A.L. se:
(alternativa)

1) per ogni $\lambda\in\mathbb{R}$ e $\forall\vec{v}\in\mathbb{R}^m$ → $f(\lambda\cdot\vec{v})=\lambda\cdot f(\vec{v})$

2) per tutti i $\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^m$ ⇒ $f(\vec{v}+\vec{w})=f(\vec{v})+f(\vec{w})$

esempio 1) $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x-2z\\4x\\5y-7z\end{pmatrix} \longrightarrow f\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\\-17\end{pmatrix}$ $\lambda=3 \longrightarrow f\left(3\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right)=f\begin{pmatrix}3\\-6\\3\end{pmatrix}\overset{?}{=}3\begin{pmatrix}1\\4\\-17\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\12\\-51\end{pmatrix}$

dimostrazione di $f(\lambda\cdot\vec{v})=\lambda f(\vec{v})$ $f\left(\lambda\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)=f\begin{pmatrix}\lambda x\\\lambda y\\\lambda z\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}3(\lambda x)-2(\lambda z)\\4(\lambda x)\\5(\lambda y)-7(\lambda z)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\lambda x-2\lambda z\\4\lambda x\\5\lambda y-7\lambda z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda(3x-2z)\\\lambda(4x)\\\lambda(5y-7z)\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}3x-2z\\4x\\5y-7z\end{pmatrix}=\lambda f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

2) $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x-2z\\4x\\5y-7z\end{pmatrix}$ $f\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\\-17\end{pmatrix}$

$f\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\12\end{pmatrix}$

si sostituisce qui

$\Rightarrow \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

$f\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\overset{?}{=}\begin{pmatrix}1\\4\\17\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\0\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\-5\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}3\\4\\-5\end{pmatrix}$ ok

• se f soddisfa le due proprietà (1) e (2) posso concludere che f è un'A.L. nel senso della definizione data prima come combinazione lineare di vettori?

Def 1 ⇒ Def. alt.
? ⇐

Esempio $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che soddisfa (1) e (2) $f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \vec{v}_1$ $f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \vec{v}_2$ $f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \vec{v}_3$

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = f\left(x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \xrightarrow{(2)} f\left(x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) + f\left(y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) + f\left(z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

uso (1) e (2) $\xrightarrow{(1)}$ $x\underbrace{f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}_{v_1} + y\underbrace{f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}_{v_2} + z\underbrace{f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}_{v_3} = x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2 + z\vec{v}_3$ } è un'A.L.

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3x-2z\\4x\\5y-7z\end{pmatrix} \quad f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} \quad f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix} \quad f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\0\\-7\end{pmatrix}$$

$$\underbrace{x\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}}_{f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}} + \underbrace{y\begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix}}_{f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}} + \underbrace{z\begin{pmatrix}-2\\0\\-7\end{pmatrix}}_{f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}$$

Esempio

① $f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+y\\x^2-y\end{pmatrix}$ non sarà un'A.L. non si verificano (1) e (2)

$\vec{v}$ $f\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ $\quad \vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

$\vec{w}$ $f\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ $\quad f(\vec{v}+\vec{w}) = f\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix} \overset{?}{=} f(\vec{v}) + f(\vec{w}) = \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}}_{\text{non si verifica la (2)}}$

② $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = 7x$ è un'A.L.?

① $f(\lambda x) = 7(\lambda x) = 7\lambda x$
$\lambda(f(x)) = \lambda(7x) = 7\lambda x$ } SI

② $f(3) = 21$ $\quad f(3+5) = f(8) = 56$ → SI
$f(5) = 35$ $\quad = f(3) + f(5) = 21 + 35 = 56$

} È un A.L.

③ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$

non è un A.L. $\longrightarrow$ $f(1) + f(2) = 1^2 + 2^2 = 5$
$f(3) = 3^2 = 9$ } NO

④ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = 2x + 1$

$f(3) = 7$
$f(2 \cdot 3) = 13 \neq 2 \cdot 7(3)$ } NO

⑤ $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ A.L.? SI

$f(\vec{0}) \overset{?}{=} \vec{0}$

$f\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_m\end{pmatrix} = x_1\vec{v}_1 + \dots + x_m\vec{v}_m$ dove $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ A.L.

$f\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

(i) $f\left(5\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right) = 5f\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$f\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = 5f\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow f\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

(ii) $f\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + f\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - f\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

Verificare se è un'A.L. si può fare la verifica di $f(0)$ → se fa 0 allora **può** essere un'A.L.
→ se fa $\neq 0$ allora **non** è un'A.L.