2° fila - Esercizi con svolgimento e spiegazione di Algebra Lineare e Geometria Analitica.

Algebra lineare e geometria analitica (Università degli Studi di Firenze)

CALCOLO VETTORIALE

② Vettori in $\mathbb{R}^3$

Nello spazio euclideo tridimensionale $\mathbb{R}^3$, al variare del parametro $K \in \mathbb{R}$, si considerino i seguenti vettori

$u_K = (K, 0, K+2)^t \quad v_K = (-K, K, K-1)^t \quad w = (0, 1, 2)$

$\langle u_K \wedge v_K, w \rangle = \det \begin{pmatrix} K & 0 & K+2 \\ -K & K & K-1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = K(2K - K + 1) + (K+2)(-K)$

$K(K+1) - K^2 - 2K$

$\cancel{K^2} + K - \cancel{K^2} - 2K = -K \neq 0$

$-3K \neq 0$

- u_K, v_K sono $\perp \iff \langle u_K, v_K \rangle = 0 = \langle K, 0, K+2 ; -K, K, K-1 \rangle = -K^2 + (K+2)(K-1)$
$= -K^2 + K^2 - K + 2K - 2 \quad K - 2$
- u_K e v_K sono $\parallel \iff$ sono uno multiplo dell'altro questo implica $K = 0$. Per $K = 0$ $u_K = (0\ 0\ 2)^t \parallel v_K = (0, 0, -1)$ per $K \neq 0$ u_K e v_K non sono $\parallel$

⑤ DIMENSIONI DI SPAZI VETTORIALI

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$ si consideri il sottoinsieme $W =$ Span $\{2+x+x^2,\ 1+x,\ 4+x+x^2\}$

$a(2+x+x^2) + b(1+x) + c(4+x+x^2) = 0$ implica $a+b+c = 0$

& i 3 polinomi sono L.I.

$(2a + b + 4c) + (a + b + c)x + (a + c)x^2$

$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \quad 2 + 1 + 4(-1) = -1 \neq 0$

i 3 polinomi sono L.I.

$\dim W = 3$

⑧ POSIZIONE RECIPROCA DI 2 RETTE

Si considerano le rette r ed s di equazione cartesiana:

$r: \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} 3x + y + 4z = 1 \\ x - 2y - 2z = 1 \end{cases}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 3R_1 \\ R_4 - R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & -2 \\ 0 & -5 & -5 & -2 \\ 0 & -4 & -5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ R_3 - R_2 \\ 5R_4 - 4R_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 8 \end{array}\right)$

$-20 + 20$

$-25 + 20$

rank A = rank$(A|B) = 3$

$3 - 3 = 0$

le rette sono incidenti

sono $\perp$ se il prodotto scalare dei vettori generatori $= 0$

$V_r \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} \quad V_s \begin{pmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ -7 \end{pmatrix}$

$\langle V_r, V_s \rangle = 0$?

$\langle -5\ 5\ -5 ; 6\ 10\ -7 \rangle = -30 + 50 + 35 \neq 0$ 55

le rette sono incidenti non $\perp$

(13) SISTEMI, NUCLEO e IMMAGINE

Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = (1\ 1\ 1)^t$. Si consideri l'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $L_A(x) = Ax$

rango $(A|B) = 3$ rango $A = 2$ $B \notin \operatorname{Im} L_A$

$L_A(B) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B \in \operatorname{Ker} L_A$

(14) Teorema di nullità + rango e Grassmann

$f : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^5$ surgettiva $Z \subseteq \mathbb{R}^9$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^9$ tale che $Z \oplus \operatorname{Ker} f = \mathbb{R}^9$

$\dim \operatorname{Im} f = 5$

$$\underbrace{\dim \operatorname{Ker}}_{4} + \underbrace{\dim \operatorname{Im} f}_{5} = \underbrace{\dim V}_{9}$$

$$\underbrace{\dim Z}_{5} + \underbrace{\dim \operatorname{Ker} f}_{4} = \underbrace{\dim \mathbb{R}^9}_{9} \qquad \dim Z = 5$$

(17) Rango di matrice con parametro

$$A_K = \begin{pmatrix} 2 & 1 & K^2 & 0 \\ K^2 & 2 & 2 & K^2 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad 2R_2 - K^2R_1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & K^2 & 0 \\ 0 & 4-K^2 & 4-K^4 & 2K^2 \\ 0 & 0 & -2-K^2 & 4 \end{pmatrix} \quad -2-K^2 \neq 0 \ \forall K$$

rango $A = 3$ per $K \neq \pm 2$ $\quad K = 2 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$ rango $= 2$

$K = -2 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

Esistono esattamente 2 valori per cui rango $A = 2$

(20) DIAGONALIZZAZIONE TRACCIA E DETERMINANTE

Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad B = A \cdot A^T \quad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ è simmetrica → è diagonalizzabile, ammette una base ortonormale di autovettori

(23) DIAGONALIZZAZIONE CON PARAMETRO

Si consideri la matrice $A_K = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 9 \\ -1 & K & -5 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

$p_{A_K}(\lambda) = (A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 5-\lambda & 0 & 9 \\ -1 & K-\lambda & -5 \\ -2 & 0 & -4-\lambda \end{pmatrix} = (K-\lambda) \cdot \underbrace{\det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 9 \\ -2 & -4-\lambda \end{pmatrix}}$

$= (5-\lambda)(-4-\lambda) + 18$

$-20 - 5\lambda + 4\lambda + \lambda^2 + 18$

$(\lambda^2 - \lambda - 2)$

$= \dfrac{+1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$

$= (\lambda - 2)(\lambda + 1)$

$p_{A_K}(\lambda) = (K-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+1)$

se $K \notin \{-1, 2\}$

la matrice è diagonalizzabile

se $K = -1$

$\lambda_1 = 2$ molt alg = 1 = molt geo

$\lambda_2 = -1$ molt alg = 2

per $\lambda = -1$ $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 9 \\ -1 & 0 & -5 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 6R_2 + R_1 \\ 3R_3 + R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & -21 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ rango $A = 2$

$3 - 2 = 1 \Rightarrow$ per $\lambda = -1$

non è diagonalizzabile

per $K = 2$

$\lambda_1 = -1$ molt alg = molt geo = 1

$\lambda_2 = 2$ molt alg = 2

per $\lambda = 2$ $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 \\ -1 & 0 & -5 \\ -2 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 3R_2 + R_1 \\ 3R_3 + 2R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ rango $A = 2$

$3 - 2 = 1 \Rightarrow$ per $\lambda = 2$

non è diagonalizzabile

Esistono esattamente 2 valori di K per cui A_K non è diagonalizzabile

(26) PIANI E RETTE

Si consideri la retta r, passante per $P=(1,0,0)^T$ e parallela ai piani $x-y=0$ e $x+z=0$, e il piano α passante per i punti $Q=(0,-1,0)^T$ ed $R=(0,0,1)$ parallelo al vettore $u=(1,1,2)^T$

$$V_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad r = \begin{cases} x = 1-t \\ y = -t \\ z = t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1+y \\ y = -z \\ z = t \end{cases} \begin{cases} x-y=1 \\ y+z=0 \end{cases}$$

eq parametrica — eq cartesiana

$$\alpha = \begin{vmatrix} x & y+1 & z \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$R-Q=(0\ 1\ 1)$

$(P-Q)=(1;+1;0)$ e poi lo metto nell'equazione parametrica di r:

$$\begin{cases} x = 1-1 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ y+1 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad x \quad y+1 \quad z$$

$= x(1) - (y+1)(-1) + z(-1)$

$x + y + 1 - z = 0$

$x + y - z + 1 = 0$

$$n_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$V_r = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad n_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$ non sono //

r ed α sono incidenti ortogonali, verifichiamo per quale punto nella risposta è il punto di intersezione

$$\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x-y=1 \\ y+z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 1/3 + 2/3 = 1 \ ✓ \\ -2/3 + 2/3 = 0 \ ✓ \end{cases}$$ per la retta

per il piano $x+y-z+1=0$

$1/3 - 2/3 - 2/3 + 1 = 0$ ✓

quindi $r \cap \alpha = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

(29) SISTEMI LINEARI CON PARAMETRO

Al variare del parametro $K \in \mathbb{R}$ si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} x+2y-z=-2 \\ 2x+y+z=-4K \\ 4x+5y-z=K^2 \end{cases} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & -4K \\ 4 & 5 & -1 & K^2 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ R_2-2R_1 \\ R_2-4R_1 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -4K+4 \\ 0 & -3 & 3 & K^2+8 \end{array}\right) R_3-R_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -4K+4 \\ 0 & 0 & 0 & (K+2)^2 \end{array}\right)$$

$K^2+8+4K-4$

K^2+4K+4

$(K+2)^2=K^2+4+4K$

se $K=-2$ rango A = rango $A|B=2$ $\to$ il sistema ha soluzioni

se $K\neq-2$ rango $A\neq$ rango $A|B$
$\overset{\shortparallel}{2} \neq \overset{\shortparallel}{3}$

non ha soluzioni

$3-2=1$ l'insieme delle soluzioni è uno spazio affine di dimensione $=1$, cioè una retta passante per l'origine

AUTOVALORI E AUTOVETTORI

(32) Sia $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $p_A(\lambda)=\det(A-\lambda I)=$

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda[(2-\lambda)(-\lambda)+1] - 1($$

$$-1[\lambda-1]-1(\overbrace{-1+2}^{1}-\lambda)=$$

$$-\lambda[-2\lambda+\lambda^2+1]-\lambda+\cancel{1}-\cancel{1}+\lambda$$

$$+2\lambda^2-\lambda^3-\lambda-\cancel{\lambda}+\cancel{\lambda} = -\lambda^3+2\lambda^2-\lambda=-\underbrace{\lambda(+\lambda^2-2\lambda+1)}_{}$$

$$=-\lambda\cdot(\lambda-1)^2$$

$\lambda_1=0$ molt alg $=1=$ molt geo

$\lambda_2=1$ molt alg $=2$

per $\lambda=2$ $(A-\lambda I)=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2-R_1 \\ R_2-R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

rango $A=1 \Rightarrow$ molt geo $=3-1=2=$ molt geo $\Rightarrow$ il criterio di diagonalizzabilità è rispettato.

Verifichiamo se $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ o $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ dati nelle risposte rimanenti possibili sono autovettori

$A\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=$ $\quad -x+y-z=0$

$-1+1-0=0$ ✓ $\quad A\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ è autovettore di autovalore 1.

$A\begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix}:$ $\quad -0+1-3=0$ non verificato