4°appello 19 20 - 4° Appello a. a. 2019/20, con spiegazione e svolgimento degli esercizi. Vettori

Algebra lineare e geometria analitica (Università degli Studi di Firenze)

4° Appello 19/20 **Vettori e basi in $\mathbb{R}^3$**

1A) In $\mathbb{R}^3$ si considerino i vettori: $v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$; $v_2 = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$

Determiniamo innanzitutto

dim span$\{v_1, v_2, v_3\}$

Calcoliamo

$$\langle v_1 \wedge v_2, v_3 \rangle = \det \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1(-8) - 2(4-2) + 3(+4)$$
$$-8 - 4 + 12 = 0$$

Se il prodotto misto $= 0 \Rightarrow$ i 3 vettori sono complanari

Se il prodotto misto $\neq 0 \Rightarrow$ i 3 vettori formano una base

Se ne deduce che i 3 vettori sono linearmente dipendenti

Conseguenze: • non formano una base di $\mathbb{R}^3$

• dim span$\{v_1, v_2, v_3\} \leq 2$

Determiniamo con esattezza dim span$\{v_1, v_2, v_3\}$ e sappiamo che può essere o 1 o 2

dim span$\{v_1, v_2, v_3\} = 1 \Leftrightarrow$ i 3 vettori sono //.

Se prendiamo v_1 e v_2 si vede che NON sono uno multiplo dell'altro e quindi non sono //

Dunque dim span$\{v_1, v_2, v_3\} = 2$

Alternativamente:

dim span$\{v_1, v_2, v_3\}$ =

$$\text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 3R_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} 2R_3 + R_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

$\Rightarrow$ dim span$\{v_1, v_2, v_3\} = 2$

2A) POSIZIONE RECIPROCA DELLE RETTE

Nello spazio Euclideo tridimensionale $\mathbb{R}^3$, si studi la posizione reciproca delle rette di equazione

$r: 2x+y-z+1 = 3x-2y+2=0$

$s: x+y+z = 2x-y-z+1=0$

$$r: \begin{cases} 2x+y-z+1=0 \\ 3x-2y+2=0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y-z+1=0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 2R_2-3R_1 \\ 2R_3-R_1 \\ R_4-R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ 7R_3+R_2 \\ 7R_4-2R_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 24 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ 4R_4+R_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 14 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & +2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{rango } A = 3 \\ \text{rang } A|B = 4 \end{array} \Rightarrow \text{le rette sono sghembe}$$

3A) SISTEMI LINEARI CON PARAMETRO

Al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$, si studi il sistema lineare.

$$\begin{cases} -tx+(t-1)y+z=1 \\ (t-1)y+tz=1 \\ 2x-z=5 \end{cases} \qquad \underbrace{\left(\begin{array}{ccc} -t & (t-1) & 1 \\ 0 & (t-1) & t \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right)}_{A} \underbrace{\left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 5 \end{array}\right)}_{B}$$

$AX=B$ ha un'unica soluzione $\Leftrightarrow$ rango $A=3$ $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$

calcoliamo $\det A$

$$\det\begin{pmatrix} -t & (t-1) & 1 \\ 0 & t-1 & t \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -t(t-1)-(t-1)(-2t)+1(-2t+2) =$$

$$= -t^2+t-(2t^2+2t)-2t+2 =$$

$$-t^2+t+2t^2-2t-2t+2 = t^2-3t+2 \qquad \Delta = 9-8=1$$

$$t = \frac{+3\pm 1}{2} \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases} \qquad (t-1)(t-2)$$

quindi per $t \neq 1$ e $t \neq 2$ il sistema ha un'unica soluzione

Scansionato con CamScanner

Vediamo cosa succede per $t=1$ e $t=2$

per $t=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) R_3+2R_1 \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \end{array}\right) R_3-3R_2 \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

rango $A = 2$
$\neq$ $\Rightarrow$ per $t=1$ il sistema non ha soluzioni
rang$(A|B) = 3$

per $t=2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) R_3+R_1 \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & +1 & 2 & 6 \end{array}\right) R_3-R_2 \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

rango $A = 3$
$=$ $\Rightarrow$ per $t=2$ il sistema ammette non soluzione
rang$(A|B) = 3$

il sistema non ha soluzioni

4A) AUTOVALORI E APPLICAZIONI LINEARI

Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare con autovalori 1 e -2 ed autovettori: $f\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ $\quad f\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

Si osserva subito che f è diagonalizzabile. Infatti $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ha 2 autovalori distinti e viene anche data esplicitamente la base di autovettori $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}$. Rispetto a questa base la matrice di f è la matrice diagonale $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

$\det f = \det D = 1(-2) = -2 \neq 0$

RICORDA:
se $f: V \to V$ lineare, $\dim V = n$
e se $P_f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} \cdots (\lambda_r - \lambda)^{m_r}$
allora $\det f = \lambda_1^{m_1} \cdots \lambda_r^{m_r}$.

Dunque f è invertibile, ossia iniettiva e suriettiva. Si può anche osservare che $\dim \operatorname{Im} f = \text{rango}(A) = 2$, dunque f è suriettiva e $\dim \operatorname{Ker} f = 2-2=0$ dunque f è iniettiva

perché = alla dim spazio di arrivo

perché dim Ker = 0

5A) DIAGONALIZZAZIONE DI MATRICI CON PARAMETRO

Al variare del parametro $s \in \mathbb{R}$, si discuta la diagonalizzazione della matrice.

$$A_s = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1/2 \\ -2 & s & s-3 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad p_{A_s}(\lambda) = \det(A-\lambda I) =$$

$$= \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 1/2 \\ -2 & \cancel{s}-\lambda & \cancel{s}-3 \\ 2 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)[(\cancel{s}-\lambda)(3-\lambda)] + \frac{1}{2}[-2(\cancel{s}-\lambda)] =$$

$$= (3-\lambda)(3x-\lambda x-3\lambda+\lambda^2) + \frac{1}{2}(-2x+2\lambda)$$

$$9x - 3\lambda x - 9\lambda + 3\lambda^2 - 3\lambda x + \lambda^2 x + 3\lambda^2 - \lambda^3 - x + \lambda$$

$$-\lambda^3 + 3\lambda^2 + x\lambda^2 + 3\lambda^2 - 3x\lambda - 9\lambda - 3x\lambda + \lambda + 9x - x$$

$$-\lambda^3 + (6+x)\lambda^2 + (-8-6x)\lambda + 8x$$

RUFFINI

	-1	$6+x$	$-8-6x$	$8x$
-1		$+1$	$-7-x$	
	-1	$7+x$	$-15-7x$	

	-1	$6+x$	$-8-6x$	$8x$
1		-1	$5+x$	
	-1	$5+x$	$3-5x$	

	-1	$6+x$	$-8-6x$	$8x$
2		-2	$8+2x$	$-8x$
	-1	$4+x$	$0-4x$	0
	λ^2	λ		

$$(\lambda-2)[-\lambda^2 + (4+x)\lambda - 4x]$$

$(\lambda-2)\underbrace{\left[-\lambda^2+(4+x)\lambda-4x\right]}$

$$\begin{array}{c|cc|c} & -1 & 4+x & -4x \\ 1 & & -1 & \\ \hline & -1 & 3+x & \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc|c} & -1 & 4+x & -4x \\ -1 & & +1 & \\ \hline & -1 & 5 & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc|c} & -1 & 4+x & -4x \\ +4 & & -4 & 4x \\ \hline & -1 & x & 0 \end{array}$$

λ

$(\lambda-2)(\lambda-4)(-\lambda+x)$

$-\lambda+x=0 \quad \lambda=x$

$\lambda=2$

$\lambda=4$

$\lambda=x$

Nota ① Il polinomio caratteristico si scompone in fattori di 1° grado. Quindi la 1° condizione del criterio di diagonalizzabilità è soddisfatta.

② $x \notin \{2,4\}$ la matrice A_x ha 3 autovalori distinti ed è quindi diagonalizzabile. Per $x=2$ la matrice ha 2 autovalori

$\lambda_1 = 4$ molt alg 1 = molt geo

$\lambda_2 = 2$ molt alg $=2$

per $\lambda_2 = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1/2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ rango $(A_2 - 2I) = 1$

molt geo $= 3 - 1 = 2 =$ molt alg

$\Rightarrow$ per $x=2$ è diagonalizzabile

Scansionato con CamScanner

per $x=4$ ha 2 autovalori

$\lambda_1 = 2$ molt alg $= 1 =$ molt geo

$\lambda_2 = 4$ molt alg 2

$$\text{rango}(A_4 - 4I) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1/2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \text{molt geo} = 3 - 1 = 2 = \text{molt alg}$$

Quindi per $x=4$ è diagonalizzabile

-La matrice è diagonalizzabile $\forall x$

4° APPELLO 19/20 2° FILA

1B) Vettori in base $\mathbb{R}^3$

In $\mathbb{R}^3$ si considerino i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

det innanzitutto dim span$\{v_1, v_2, v_3\}$

calcoliamo $\langle v_1 \wedge v_2, v_3 \rangle = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 1(-4) - 2(2-4) + 3(+8) =$

$1(-4) - 2(2-4) + 3(+8)$

prod. misto $= 0 \Rightarrow$ complanari

prod. misto $\neq 0 \Rightarrow$ base

se ne deduce che i 3 vettori sono $-4 + 4 + 24 = 24 \neq 0$

L.I. conseguenze:
- Formano una base di $\mathbb{R}^3$
- dim span$\{v_1, v_2, v_3\} = 3$

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow \dim \text{span}\{v_1, v_2, v_3\} = 3$$

2B) POSIZIONE RECIPROCA DELLE RETTE

Nello spazio euclideo tridimensionale $\mathbb{R}^3$, si studi la posizione reciproca delle rette di equazione:

$r: 2x + y - z + 1 = 3x - 2y + 2 = 0$

$S: x - 3y + z = 2x + y - z + 1 = 0$

$$r \begin{cases} 2x + y - z = -1 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases} \qquad S = \begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 2x + y - z = -1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 2R_2 - 3R_1 \\ 2R_3 - R_1 \\ R_4 - R_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 7 & 3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) R_3 - R_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) 7R_3 - 4R_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\text{rank } A = 2 \neq \text{rank}(A|B) = 3$

Il sistema non è risolvibile, le rette non si incontrano mai, però sono complanari, quindi sono // non coincidenti

3B) SISTEMI LINEARI CON PARAMETRI

Al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$ si studi il sistema lineare

$$\begin{cases} (-t-1)x + ty + z = 1 \\ ty + (t+1)z = 1 \\ 2x + z = 5 \end{cases}$$

$AX = B$ ha un'unica soluzione $\Leftrightarrow$ rango $A = 3 \Leftrightarrow \det A \neq 0$

$$\det\begin{pmatrix} (-t-1) & t & 1 \\ 0 & t & (t+1) \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \quad (-t-1)(t) - t(-2(t+1)) + 1(-2t)$$

$$-t^2 - t - t(-2t-2) - 2t$$

$$-t^2 - t + 2t^2 + \cancel{2t} - \cancel{2t}$$

$t^2 - t \neq 0 \quad t(t-1) \neq 0 \Rightarrow$ per $t \neq 0$ e $t \neq 1$ il sistema ha un'unica soluzione

per $t = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) R_3 + R_1 \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right) R_3 - R_2 \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

rank $A = 2 \neq$ rank $A|B = 3 \Rightarrow$ per $t = 1$ il sistema non ha sol.

Per $t = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) R_3 + 2R_1 \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \end{array}\right) R_3 - 3R_2 \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

rank $A = 2 \neq$ rank$(A|B) = 3 \Rightarrow$ per $t = 0$ il sistema non ha soluzione

$\Rightarrow$ NON ci sono soluzioni

4B) AUTOVALORI E APPLICAZIONI LINEARI

Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare con autovalori 1 e -2 ed autovettori: $f\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$; $f\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

Allora:

Si osserva subito che f è diagonalizzabile. Infatti f ha 2 autovalori distinti e viene anche data esplicitamente la base di autovettori: $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}$

Dunque f è simile alla matrice diagonale $D = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -2\end{pmatrix}$

ossia $f = C \cdot D \cdot C^{-1}$

e' ho ottenuta mettendo in diagonale gli autovalori di f

Dunque:

$f^2 = (C D \underbrace{C^{-1}) \cdot (C}_{I_2} D C^{-1}) = C D^2 C^{-1}$ è simile alla matrice $D^2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 4\end{pmatrix}$ ha quindi autovalori 1 e 4

$\Rightarrow f^2$ ha autovalori 1 e 4

5B) DIAGONALIZZAZIONE DI MATRICI CON PARAMETRO

Al variare del parametro $K \in \mathbb{R}$, si discuta la diagonalizzazione della matrice

$$A_K = \begin{pmatrix}3 & 0 & 1/2\\-2 & K & K-1\\2 & 0 & 3\end{pmatrix} \qquad P_A(\lambda) = \det(A_K - \lambda I)$$

$$\begin{pmatrix}3-\lambda & 0 & 1/2\\-2 & K-\lambda & K-1\\2 & 0 & 3-\lambda\end{pmatrix} = (3-\lambda)[(K-\lambda)\cdot(3-\lambda)] - \frac{1}{2}(-2K+2\lambda)$$

$$(3-\lambda)^2(K-\lambda) + K - \lambda = 0$$

$$(9+\lambda^2-6\lambda)(K-\lambda) + K - \lambda = 0$$

$$9K - 9\lambda + \lambda^2 K - \lambda^3 - 6\lambda K + 6\lambda^2 + K - \lambda = 0$$

$8K - \lambda^3 + K\lambda^2 + 6\lambda^2 - 6K\lambda - 8\lambda$

$-\lambda^3 + (K+6)\lambda^2 + (-6K-8)\lambda + 8K = 0$

	-1	$K+6$	$-6K-8$	$8K$
2		-2	$2K+8$	$-8K$
	-1	$K+4$	$-4K$	0

$(\lambda-2)(-\lambda^2+(K-4)\lambda-4K)$

$(\lambda-2)(\underbrace{-\lambda^2+(K+4)\lambda-4K})$

	-1	$K+4$	$-4K$
$+4$		-4	$4K$
	-1	K	0

$= (\lambda-4)(\lambda-2)(-\lambda+K)$

$(\lambda-2)(-\lambda^2+(K-4)\lambda-4K) =$

$(\lambda-2)(-\lambda^2+(K\lambda-4\lambda-4K)) =$

$-\lambda^3 + K\lambda^2 - 4\lambda^2 - 4K\lambda + 2\lambda^2 - 2K\lambda + 8\lambda + 8K$

$-\lambda^3 + \lambda^2(\underbrace{K+4+2}_{K+6}) + \lambda(\underbrace{-4K-2K+8}_{-6K+8}) + 8K$

$(\lambda-4)(\lambda-2)(-\lambda+K)$

autovalori

$\lambda = 4$ molt alg $= 1 =$ geo ✓

$\lambda = 2$ molt alg $= 1 =$ geo ✓

$\lambda = K$

$K \notin \{2,4\}$ la matrice A_K ha 3 autovalori distinti ed è quindi diagonalizzabile

· per $K=2$ la matrice ha 2 autovalori

$\lambda_1 = 4$ molt $= 1 =$ molt geo

$\lambda_2 = 2$ molt $= 2$

per $K=2$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$ $3-2=1$

molt geo $\neq$ molt alg

$\Rightarrow$ per $K=2$ la matrice non è diagonalizzabile

Scansionato con CamScanner

per $K=4$ la matrice ha 2 autovalori

$\lambda_1 = 2$ molt alg $= 1 =$ molt geo

$\lambda_2 = 4$ molt alg $= 2$

per $K = K$ $A_K = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1/2 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2$ $3-2 = 1 =$ molt geo $\neq$ molt alg.

Quindi per $K=4$ la matrice non è diagonalizzabile

$\Rightarrow$ Esistono esattamente 2 valori di K (2 e 4) per cui la matrice non è diagonalizzabile