06/12/2018

AUTOVETTORI

Def: Un vettore $\vec{v} \neq 0$ si dice autovettore di una matrice A se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$, detto AUTOVALORE, tale che $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$

La matrice A_B rispetto alla base $B = \{v_1, \dots, v_z\}$ è diagona

$\Longleftrightarrow$ $B = \{v_1, \dots, v_z\}$ sono sottovettori.

Supponiamo che la matrice A_B rispetto alla base $B = \{v_1, \dots, v_z\}$ sia diagonale

$$A_B = \left[(Tv_1)_B \Big| \quad \Big| (Tv_m)_B \right] = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix}$$

$T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ app. lin

$$(Tv_1)_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_B \Longleftrightarrow Tv_1 = \lambda_1 \vec{v}_1 + 0\lambda_2 + \dots = \lambda_1 v_1$$

v_1 è auto di autova λ_1

$$(Tv_m)_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}_B \Longleftrightarrow Tv_m = \lambda_m v_m$$

v_m è autovettore di autovalore λ_m

Come faccio a trovare (eventuali) autovettori?

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ autovettore $\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}}_{\lambda \cdot I}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ($$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A\vec{v} = \lambda I \vec{v}$$

$$A\vec{v} - \lambda I \vec{v} = 0$$

$$(A - \lambda I)\vec{v} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \vec{x} \pm B\vec{x} = (A \pm B)\vec{x}$$

$(A-\lambda I)\vec{v}=0 \iff \vec{v} \in \text{Ker}(A-\lambda I)$

$\vec{v} \neq 0$, quindi $\text{Ker}(A-\lambda I) \neq \{0\} \iff f_{A-\lambda I}$ non iniettiva

$\Updownarrow$

$\det(A-\lambda I)=0$ $\quad$ $A-\lambda I$ non ha inversa sx

Conclusione:

λ è un autovalore $\iff \det(A-\lambda I)=0$

In questo caso ogni vettore $\vec{v}\neq 0$ che appartiene a $\underbrace{\text{Ker}(A-\lambda I)}_{\text{autospazio dell'autovalore } \lambda}$ è un autovettore

N.B. $\forall \vec{v}\neq 0$

$\vec{v}\in \text{Ker}(A-\lambda I) \iff \vec{v}$ è un autovettore di autovalore λ

se $\vec{v}$ è autovettore di autovalore $\lambda=5$ $\quad A\vec{v}=5\vec{v}$. Se $\vec{w}=3\vec{v}$,

$A\vec{w} = 3A\vec{v} = 3\cdot 5\cdot \vec{v} = 5\vec{w}$

Prima si trovano gli (eventuali) autovalori

λ è un autovalore $\iff \det(A-\lambda I)=0$

$$A-\lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$-\lambda(-1-\lambda)-2 = \lambda^2-\lambda-2=0 \iff \begin{matrix}\lambda=2\\ \lambda=-1\end{matrix}$ autovalori

v è autovettore $\lambda=2 \iff \vec{v}\in \text{Ker}(A-2I)$ cioè $\vec{v}\in\text{Ker}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{II - 1/2\, I} \begin{pmatrix} \underline{-2} & \underline{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\quad\quad p \quad e$

$-2x_1+2x_2=0 \quad x_2=1 \quad -2x+2=0 \quad x_1=1 \quad \vec{s}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ ← autovettore di autovalore $\lambda=2$

v è autovettore $\lambda=-1 \iff \vec{v}\in\text{Ker}(A+I)$

$$A+I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

"occhio"! $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad v_2=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ è autovettore di autoval. $\lambda=-1$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{II-I} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ p e

$x_1 + 2x_2 = 0$

~~[illegible]~~

~~$x_2 = c_2$~~

$x_1 = -2x_2$

$x_1 = 2$

$x_2 = -1$

$B\{v_1, v_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} +2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ base di autovettori la matrice A sc

rispetto alla base B è $A_B = B = \left((Av_1)_B \middle| (Av_2)_B \right) = \left((2v_1)_B \middle| (-v_2 \right.$

$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Ricordare il "cambio base"

$B = S^{-1} A S$

Gauss Jordan $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{II-I} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{I+\frac{2}{3}II} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right.$

$\xrightarrow{1/3 II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ $\quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

$B = \{v_1, v_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ base di autovettori

$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 4/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{matrix} 6/ \\ 0 \end{matrix} \right.$

$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 18 & -6 \end{pmatrix}$ autovalori?

$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 9-\lambda & -3 \\ 0 & 0 & 18 & -6-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda) \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 4 & -2 \\ 0 & 9-\lambda & -3 \\ 0 & 18 & -6-\lambda \end{pmatrix}$

$= (3-\lambda)(-1-\lambda) \det \begin{pmatrix} 9-\lambda & -3 \\ 18 & -6-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(-1-\lambda)(9-\lambda)(-6-\lambda) +$

$= \lambda(\lambda+1)(\lambda-3)^2 = 0$

AUTOVALORI:

$\lambda = 0$ molt. alg. $1 \rightarrow$ 1 autovettore
$\lambda = -1$ molt. alg. $1 \rightarrow$ 1 autovettore
$\lambda = 3$ molt. alg. $2 \rightarrow$ 2 autovettori

$\lambda = 0$ autovalore $\Longleftrightarrow$ A non è invertibile

Che significa?

Vuol dire che esiste almeno un vettore $\vec{v} \neq 0$ (autovettore) tc $A\vec{v} = 0\vec{v} = 0$

$\Longleftrightarrow$ Ker $A \neq \{0\} \Longleftrightarrow$ A non invertibile

$$\lambda = 3 \qquad A - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 18 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{I e II}]{\text{scambio}} \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 18 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{II e IV}]{\text{scambio}}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 18 & -9 \\ 0 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III} - \frac{1}{3}\text{II}} \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 18 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \ell & p & p & \ell \end{pmatrix}$$

x_1 e x_4 variabile libera

$$\begin{cases} -4x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \\ 18x_3 - 9x_4 = 0 \end{cases}$$

$x_1 = 1$, $x_4 = 0$ $\Rightarrow$ $-4x_2 + 4x_3 = 0 \rightarrow x_2 = 0$; $18x_3 = 0 \rightarrow x_3 = 0$ $\quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x_1 = 0$, $x_4 = 1$ $\rightarrow$ $-4x_2 + 4x_3 - 2 = 0$; $-4x_2 + 2 - 2 = 0 \rightarrow x_2 = 0$; $18x_3 - 9 = 0 \rightarrow x_3 = 1/2$ $\quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\lambda = -1$$

$$A + I = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 10 & -3 \\ 0 & 0 & 18 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV} - \frac{3}{2}\text{II}]{\text{III} - 5/2\,\text{II}} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{IV} - 2\,\text{III}}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ p & \ell & p & p \end{pmatrix}$$

x_2 var. libera $(x_2 = 1)$

$$\begin{cases} 4x_1 = 0 \\ 4x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_4 = 0 \end{cases} \qquad x_1 = 0 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = 0 \qquad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

TEOREMA: Se λ è un autovalore di molteplicità algebrica K allora $\dim(\text{Ker}(A - \lambda I)) \leq K$

$$\lambda = 0 \qquad A - 0I = A \qquad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ p & p & p & \ell \end{pmatrix}$$

x_4 var. lib. $= 1$

$$\begin{cases} 3x_1 = 0 \\ -x_2 + 4x_3 - 2 = 0 \\ 9x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases} \qquad x_2 = -2/3 \quad x_3 = 1/3 \quad x_1 = 0$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{A scritta nella base } B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Prop. 10/12/201

Se $v_1, \dots, v_m$ sono autovettori di autovalori rispettivamente $\lambda_1, \dots, \lambda_m$.

Se gli autovalori sono a due a due distinti, allora $\{v_1, \dots, v_m\}$ è un insieme linearmente indipendente

Dim: Caso più semplice $m=2$

autovettori $\rightsquigarrow v_1 \rightsquigarrow$ autovalore λ_1

" " $v_2 \rightsquigarrow$ autovalore λ_2

$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \{v_1, v_2\}$ indipendenti

Devo vedere che v_1 e v_2 non sono uno multiplo dell'altro.

Infatti, se per assurdo fosse $v_1 = \mu \cdot v_2 \Rightarrow Av_1 = A\mu v_2 = \mu A v_2$

$$\lambda_2 \cdot v_1 = \boxed{\lambda_2 \mu v_2} = \mu \cdot \lambda_2 v_2$$

$A \cdot v_1 = \lambda_1 v_1$

$A \cdot v_2 = \lambda_2 v_2$

Ma allora $A \cdot v_1 = \lambda_2 v_1$

$Av_1 = \lambda_1 v_1$

Quindi $\lambda_2 v_1 = \lambda_1 v_1$, cioè $(\lambda_2 - \lambda_1)v_1 = 0 \rightarrow \lambda_2 = \lambda_1$ ↯

N.B. Se v è autovettore di autovalore λ allora $\mu \cdot v$ è anch'esso autovettore di autovalore λ.

Quindi $\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}$ è autov. di autovalore 2.

Esempio:

$$A\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\6\\8\end{pmatrix}$$

Se prendi $7\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\21\\28\end{pmatrix}$ ho che $A\begin{pmatrix}7\\21\\28\end{pmatrix} = 7 \cdot A\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} =$

$= 7\begin{pmatrix}2\\6\\8\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}7\\21\\28\end{pmatrix}$

Il caso generale $m>2$ è analogo.

Formula di Binet

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Ricordo che
- il det NON cambia per mosse di Gauss tipo R → R
- il det CAMBIA segno quando scambio due righe

- $\det\begin{pmatrix} = \\ R+R' \\ = \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} = \\ R \\ = \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} = \\ R' \\ = \end{pmatrix}$

es:

$$\det\begin{pmatrix} & 3 & -2 & 1 \\ R & 0 & 3 & -2 \\ & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} & 3 & -2 & 1 \\ R' & 1 & 7 & -5 \\ & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & \\ 1 & 10 & -7 & R+R' \\ 7 & 2 & 1 & \end{pmatrix}$$

⚠ **ATTENZIONE!** $\det(A+B) \neq \det A + \det B$

$$\det(A) = \begin{cases} \pm \text{ prodotto dei pivot} & (\text{se ho } n \text{ pivot}) \\ 0 & (\text{se ci sono variabili libere}) \end{cases}$$

± dipende da quanti scambi di righe abbiamo fatto nella riduzione di Gauss-Jordan

A quadrata è invertibile ⟺ $\det A \neq 0$

es: $\det(A) = 3$ $\det(A^{-1}) = ?$

$$A \cdot A^{-1} = I$$

$$\det(A \cdot A^{-1}) = \det I$$

$$\underset{3}{\underset{\shortparallel}{\det(A)}} \cdot \det(A^{-1}) = \underset{1}{\underset{\shortparallel}{\det I}} \rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{3}$$

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ Allora $\det A^{-1} = \frac{1}{3}$

2) $A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 7 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\det A^{-1} = -\frac{1}{40}$

$\det A = -4(5)(2) = -40$
perchè è una matrice triangolare
↓
det = prodotto el. diagonale

Def: Due matrici A e B si dicono SIMILI se una si ottiene dall'altra cambiando base, cioè se corrispondono alla stessa appl. lineare (ma sono scritte rispetto a basi diverse)

IMPORTANTE: A e B sono simili ⟺ esiste una matrice S "cambio di base" tale che $B = S^{-1} A S$

Def: $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ è un polinomio di grado n detto POLINOMIO CARATTERISTICO di A.

PROPOSIZIONE: Se A e B sono simili allora $P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$ e quindi A e B hanno gli stessi autovalori.

ESERCIZIO:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Autovalori?

Radici del polinomio caratteristico

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 4 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 4$$

Non ha radici reali

NUMERI complessi: $\lambda^2 + 4 = 0$

$\lambda_1 = 2i$

$\lambda_2 = -2i$

$\boxed{\lambda = 2i}$

$$\underbrace{\text{Autovalori } (A, 2i)}_{\text{autospazio dell'autovalore } 2i} = \text{Ker}(A - \lambda I) = \text{Ker}\begin{pmatrix} -2i & -1 \\ 4 & -2i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2i & -1 \\ 4 & -2i \end{pmatrix} \xrightarrow{II - 2i\, I} \begin{pmatrix} \underline{-2i} & \underline{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

P L

$$\begin{cases} -2ix_1 - x_2 = 0 \\ \boxed{x_2 = 1} \end{cases}$$

$-2ix_1 - 1 = 0$

$x_1 = -\frac{1}{2i}\frac{i}{i} = \frac{-i}{-2} = \frac{1}{2}i$

$$\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\lambda = -2i}$

$$\text{Aut}(A, -2i) = \text{Ker}(A + 2i\, I) = \text{Ker}\begin{pmatrix} 2i & -1 \\ 4 & 2i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2i & -1 \\ 4 & 2i \end{pmatrix} \xrightarrow{II + 2i\, I} \begin{pmatrix} \underline{2i} & \underline{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

P L

$$\begin{cases} 2ix_1 - x_2 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2ix_1 = x_2 \\ x_1 = \frac{1}{2i} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

(l'inverso di $2i$ è $-\frac{1}{2}i$

$$\frac{1}{2i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{i}{2i^2} = \frac{i}{-2} = -\frac{1}{2}i \text{)}$$

$$\vec{V}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2\, i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$ base di Autovett

Verifica: $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}i \\ 1 \end{pmatrix}$ é autovettore di autovalore $\lambda = 2i$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2i \end{pmatrix} \leftarrow 2\begin{pmatrix} 1/2i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matrice "cambio di base" $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}i & -\frac{1}{2}i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$S^{-1} A S = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1) POLINOMIO CARATTERISTICO

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda^{+} & 0^{-} & 0 & 3 \\ 4 & 3-\lambda^{+} & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 3-\lambda & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= +(3-\lambda) \cdot \det\begin{pmatrix} 2-\lambda^{+} & 0^{-} & 3 \\ 1 & 3-\lambda^{+} & 0 \\ 6 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)(3-\lambda)\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 6 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(3-\lambda)\left((2-\lambda)(-1-\lambda)-18\right) =$$

$$= 9 - 3\lambda - 3\lambda + \lambda^2 \left(-2 - 2\lambda + \lambda + \lambda^2 - 18\right) = (\lambda^2 - 6\lambda + 9)(\lambda^2 - \lambda - 20) =$$

$$= (3-\lambda)^2 (\lambda - 5)(\lambda + 4)$$

$\lambda = 3$ autovalore di molteplicità algebrica 2

$\lambda = 5$ " " " 1

$\lambda = -4$ " " " 1

$\boxed{\lambda = 3}$ $\quad \mathrm{Ker}(A - 3I) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{III + I \\ IV + 6I}]{II + 4I} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{III - \frac{3}{7} II \\ IV - 2II}}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \det = 0$$

P L L P

(se ho variabili libere ho det = 0, ed è un autovettore quindi det = 0)

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_4 = 0 \\ 7x_4 = 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{cases}$$

$x_2 = 1$
$x_3 = 0$
$x_4 = 0$
$x_1 = 0$

$$\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x_2 = 0$
$x_3 = 1$
$x_4 = 0$
$x_1 = 0$

$$\vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Autovettori di autovalore 3

$$\boxed{\lambda = 5}$$

$$A - 5I = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{I \leftrightarrow III} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & -5 \\ -3 & 0 & 0 & +3 \\ 6 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{III + 3I \\ IV - 6I}]{II - 4I}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 12 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{IV + 2III} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

P P P L

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0 \\ -2x_2 + 8x_3 - 5x_4 = 0 \\ -6x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_4 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ -2x_2 + 8\frac{1}{2} - 5 = 0 \\ -6x_3 = -3 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 2(1/2) \\ -2x_2 = 1 \\ x_3 = 1/2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1/2 \end{cases}$$

$$\vec{V}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Analogamente trovo $\vec{v}_4$ per $\lambda = -4$

$$S = \left(v_1 | v_2 | v_3 | v_4 \right) \quad \text{ed ho} \quad S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

11 / 12 / 2018

1) Due matrici simili hanno lo stesso determinante

2) Due matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico

Def: A e B sono SIMILI se esiste S invertibile tc

$$S^{-1}AS = B$$

(corrispondono alla stessa app. lineare, cambiando base)

1) $\det(B) = \det(S^{-1}AS) \overset{\text{Binet}}{=} \det(S^{-1}) \cdot \det(A) \cdot \det(S) =$

$= \det(S^{-1}) \cdot \det(S) \cdot \det(A) = \det(S^{-1} \cdot S) \cdot \det(A) =$

$= \det(I) \cdot \det(A) = \det(A)$

2) $P_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \det(S^{-1}) \det(S) = \det(B - \lambda I) =$

$= \det(S^{-1}) \det(B - \lambda I) \cdot \det(S) = \det(S^{-1}(B - \lambda I) \cdot S)$

Ma $\underbrace{S^{-1}(B}_{} - \lambda I) S = (S^{-1}B - \lambda S^{-1} I) S =$

$= S^{-1}BS - \lambda \underbrace{S^{-1}IS}_{S^{-1}S} = S^{-1}BS - \lambda I = A - \lambda I$

$\Rightarrow P_B(\lambda) = \det(A - \lambda I) = P_A(\lambda)$

Quindi:

A e B matrici simili hanno gli stessi <u>AUTOVALORI</u>.

TEOREMA: La molteplicità algebrica di un autovalore è $\geq$ della sua molteplicità geometrica

<u>m.a.</u> dell'autovalore a è l'esponente k tc $P_A(\lambda) = (\lambda - a)^k Q(\lambda)$

dove $Q(a) \neq 0$

esempio:

$P_A(\lambda)$: $\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = \lambda(\lambda-1)^2$

$\lambda = 1$ autovalore di m.a. 2

$\lambda = 0$ autovalore di m.a. 1

m.g è la dimensione dell'AUTOSPAZIO $Ker(A - aI)$

$$m.a. \geq m.g.$$

TEOREMA:

A $m \times m$ è DIAGONALIZZABILE (cioè esiste S tc $S^{-1}AS$ è diagonale)

$\iff$ esiste una base B di autovettori

$\iff$ tutte le radici del polinomio caratteristico $P_A(\lambda)$ sono reali e m.a. = m.g. per ogni autovalore

ESERCIZIO

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ k-1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

k parametro

A è Diagonalizzabile?

$$P_A(\lambda) \overset{def}{=} \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda^{+} & 0^{-} & 1^{+} & 0 \\ k-1 & 2-\lambda & 1^{-} & 0 \\ 0 & 0 & k-\lambda^{+} & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (k-\lambda) \det \begin{pmatrix} 3-\lambda^{+} & 0 & 0 \\ k-1 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (k-\lambda)(3-\lambda) \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (k-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)$$

AUTOVALORI: $\lambda = k$, $\lambda = 3$, $\lambda, 2$, $\lambda = 1$

CASO 1 : $K \neq 1, 2, 3$

4 autovalori distinti, tutti con m.a. = 1

→ DIAGONALIZZABILE perchè trovo base con 4 vettori che sono autovettori

CASO 2 : $K = 1$

$\lambda = 1$ m.a 2

$\lambda = 2$ m.a. 1

$\lambda = 3$ m.a. 1

È diagonalizzabile?

$\Longleftrightarrow$ m.g. dell'autovalore 1 è $\underset{\|}{2}$

$\dim\left[\operatorname{Ker}(A - 1\cdot I)\right] = 2$

$\underline{K=1}$ $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

per $\lambda = 1$

$$(A - 1 \cdot I) = \begin{pmatrix} 3-1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{IV + \frac{1}{2} I}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7/2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{IV - 2 II} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{III \leftrightarrow IV} \left(\begin{array}{cccc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ P & P & P & L \end{array}\right)$$

NON DIAGONALIZZABILE ⟵ m.g = 1

CASO 3 : $K = 2$

$\lambda = 1$ m.a 1

$\lambda = 2$ m.a. 2

$\lambda = 3$ m.a. 1

per $\lambda = 2$

$$A_{K=2} = \begin{pmatrix} 3-2 & 0 & 1 & 0 \\ 2-1 & 2-2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{III \leftrightarrow IV} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[III + I]{II - I} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{II \leftrightarrow III} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ P & P & L & L \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \\ x_3 \end{cases}$$