$$\frac{3-i}{2+i} = (3-i)(2+i)^{-1} = (3-i)\cdot\frac{1}{4+1}(2-i)$$

$$= \frac{1}{5}\left[(6-1)+i(-2-3)\right]$$

$$= 1-i$$

$$\frac{5-i}{1+3i} = (5-i)(1+3i)^{-1} = (5-i)\cdot\frac{1}{1+9}(1-3i) =$$

$$= \frac{1}{10}\left[(5-3)+i(-1-15)\right]$$

$$= \frac{1}{10}(2-16i)$$

Es 122

$z^2 = w^2 \qquad z, w \in \mathbb{C} \qquad z = a + bi \qquad z^2 = (a+bi)^2$

$z^2 - w^2 = 0 \qquad\qquad w^2 = z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$

$(z+w)(z-w) = 0 \Rightarrow z = \mp w$

$z = \pm\sqrt{w^2}$

—

Es 124 P. 61

$(1+i)^{476} \cdot \left(\frac{1-i}{2}\right)^{476} = \left[(1+i)\left(\frac{1-i}{2}\right)\right]^{476} = \left(\frac{1+1}{2}\right)^{476} = 1^{476} = 1$

COMPITI

- es 2 p. 3

$$\begin{cases} 5x - 2 = y \\ 4x + 5 = y \end{cases} \rightarrow 5x - 2 = 4x + 5$$

$$x = 7$$

- es. 4

$$\begin{cases} x + \cancel{y + z} = 9 - y - z \\ x + y + k = 10 \quad \cancel{9 - y - z + y} + k = 1 + z \\ x + k + z = 11 \\ y + \cancel{k + z} = 12 - k - z \end{cases}$$

$$\rightarrow 9 - 12 + \cancel{1+z} + z - \cancel{z} + 1 + z + z = 11$$

$$\frac{12}{3} = \cancel{3}z = 4$$

$$\Rightarrow k = 5$$

$$y = 3$$

$$x = 2$$

- es 7

$$p = 16\,g = x_{Pb} + x_{Au} = V_{Pb} \cdot d_{Pb} + V_{Au} \cdot d_{Au} = V \cdot d_{H_2O} = 0{,}147N$$

9810

$$\begin{cases} 156{,}96\,kg = V_{Pb} \cdot 11{,}3(9810) + V_{Au} \cdot 19{,}3(9810) \quad V = 1{,}49 \cdot 10^{-5}\,m^3 \\ V_{Pb} + V_{Au} = 1{,}49 \cdot 10^{-5}\,m^3 \end{cases}$$

G3 $(\{0,1\},+) \to (1+1)+0 = 1+(1+0) = 0$

$(\{0,1\},\cdot) \to (1\cdot 1)\cdot 0 = 1\cdot(1\cdot 0) = 0$

G4 $(\{0,1\},+) \to 1+0 = 0+1 = 0$

$(\{0,1\},\cdot) \to 1\cdot 0 = 0\cdot 1 = 0$

C $(\{0,1\},+,\cdot)$ $\quad 1\cdot(0+1) = 1\cdot(1) = 1$

$1\cdot 0 + 1\cdot 1 = 0+1 = 1$

$\Rightarrow 1(0+1) = 1\cdot 0 + 1\cdot 1$

analogamente tutte le combinazioni

Siccome $(\{0,1\},+)$ gruppo commutativo
e $(\{0,1\},\cdot)$ non rispetta G2
$\Rightarrow (\{0,1\},+,\cdot)$ è ANELLO COMMUTATIVO

- $A \to A$ è comunque un'applicazione
  $a \to a$ si chiama f. IDENTITÀ (id)
- $A \subseteq B$ come $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$
  $A \to B$ applicazione di INCLUSIONE
  $a \to a$
- $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ esempio 3 è un numero naturale ma anche intero
  $n \to n$

$\boxed{f\ A \to B}$

immagine $\Rightarrow$ Im $\to$ tutti gli elementi b che corrispondono (sono immagine) ad un elemento a

$$\Rightarrow \text{Im} f = \{ b \in B \mid \exists\, a \in A \mid f(a) = b \}$$

Es.

$f\ \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$n \to n^2 \quad (n^2 = m)$

$$\text{Im} f = \{ m \in \mathbb{Z} \mid \exists\, n \in \mathbb{Z} \mid f(n) = m \}$$

$\Rightarrow m$ sarà sicuramente ≥ 0 $\quad \hookrightarrow n^2 = m$

Es.

$f\ \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$$f(n) : \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 1 & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Im} f = \{0, 1\}$$

Es 10 p. 5

1) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+y-z=0 \\ 3x+2y=0 \end{cases}$

$$a(x+y+z)+b(2x+y-z)=3x+2y$$

$\begin{cases} a+\cancel{2b}=3-2b \\ a+\cancel{b}=2-b \\ a-b=0 \end{cases} \Rightarrow 3-2b=2-b \qquad \begin{cases} 1=b \\ a=1 \end{cases}$

$a=b$

$\Rightarrow$ SISTEMA RIDONDANTE

Tolgo un' eq $\Rightarrow$ RANGO $=2$

2) $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x+y-z=0 \\ x-y-2z=-1 \end{cases}$

$$a(x+2y+z)+b(2x+y-z)=x-y-2z$$

$a(1)+b(0)=-1$

$\begin{cases} a+\cancel{2b}=1-2b \\ 2a+b=-1 \\ a-\cancel{b}=-2+b \end{cases} \Rightarrow 1-2b=-2+b$

$3b=+3$

$\left.\begin{array}{l} b=1 \\ a=-1 \end{array}\right\}$ verificano anche $a(1)+b(0)=-1$

$\Rightarrow$ TOLGO UN' EQ $\Rightarrow$ RANGO $=2$

$$(a+ib)+(c+id)=a+c+i(b+d)$$
$$(a+ib)\cdot(c+id)=(ac-bd)+i(bc+ad)$$
$$0=0+i0 \in \mathbb{C}$$
$$1=1+i0 \in \mathbb{C}$$

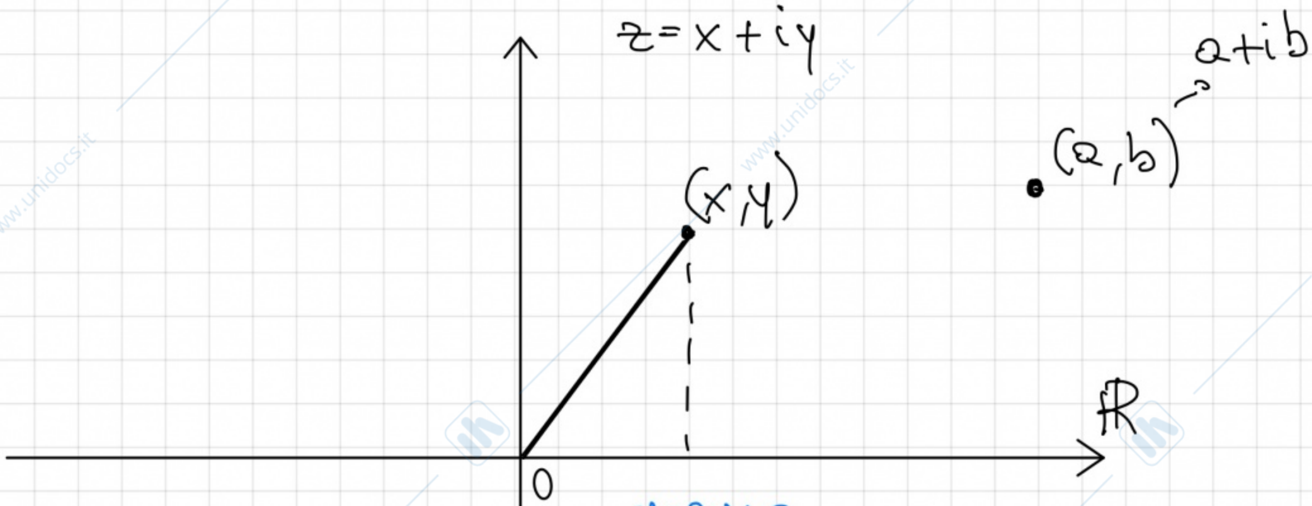
$\mathbb{C}$ è un CAMPO

- $z = x+iy$
- $\bar{z} = x-iy$
- $z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2 \geq 0$

INVERSO: Se $z \in \mathbb{C}$ $z \neq 0$ • $z^{-1} = \frac{1}{z\bar{z}} \cdot \bar{z} = \frac{1}{x^2+y^2} \cdot (x-iy)$

VERIFICATO • $z \cdot z^{-1} = \frac{z\bar{z}}{z\bar{z}} = 1$ → sono reciproci ⇒ il prodotto deve fare 1

- $\bar{\bar{z}} = z = x+iy$
- $Re(z) = x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ • $im(z) = y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$



MODULO

$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

↳ distanza $0-(x,y)$

Per polinomi di grado 3

$$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 = a(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)$$

a_1, a_2, a_3 non sono necessariamente distinte

$$\hookrightarrow \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 = \underbrace{-a a_1 a_2 a_3}_{\alpha_0} + \overbrace{-a(a_1+a_2+a_3)}^{\alpha_2} x^2 + \overbrace{a}^{\alpha_3} x^3 + \underbrace{a(a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3)}_{\alpha_1} x$$

FORMULE SOMMA e PRODOTTO.

$\alpha_3 = a$

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_3} = -(a_1+a_2+a_3)$$

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_3} = a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3$$

$$\frac{\alpha_0}{\alpha_3} = -a_1a_2a_3$$

COMPITO: Trova somma e prodotto dei polinomi

- $z^3 - iz^2 + 3z + 2 + i$
- $z^3 - z^2 + 4z + 7$

1) $-s = \dfrac{\alpha_2}{\alpha_3} = \dfrac{-i}{1} = -i \Rightarrow s = i$ $\quad p = \dfrac{\alpha_0}{\alpha_3} = \dfrac{(2+i)}{1} = 2+i$

2) $-s = \dfrac{\alpha_2}{\alpha_3} = \dfrac{-1}{1} = -1 \Rightarrow s = 1$ $\quad p = \dfrac{\alpha_0}{\alpha_3} = \dfrac{7}{1} = 7$

GEOMETRIA

FIAMMETTA BATTAGLIA → riceve Venerdì 9.30

MOODLE fiammetta.battaglia@unifi.it

1° ES: ALGEBRA LINEARE 2° ES: GEOMET. ANALITICA (3D)

PARZIALE 6/11 per iscriversi usare moodle

LIBRI: "Algebra lineare per matematici"
"Geometria ed Algebra lineare" (PETRONIO)

ES.

- 10 TESTE
  20 ORECCHIE

x e y (polli e conigli)

$$\begin{cases} x+y=10 \\ 2x+2y=20 \end{cases} \rightarrow \text{INFINITE SOLUZIONI}$$

- 10 TESTE
  21 ORECCHIE

$$\begin{cases} x+\cancel{y}=10-y \\ 2x+2y=21 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 20 \cancel{-2y} \cancel{+2y} = 21 \rightarrow \text{IMPOSSIBILE}$$

- 18 TESTE
  56 ZAMPE

$$\begin{cases} x+y=18 \\ 2x+4y=56 \end{cases} \quad \begin{cases} x=18-y \\ 36+2y \cancel{+4y} = 56 \end{cases}$$

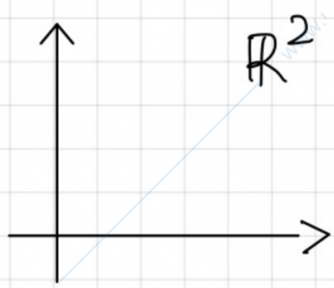
$$\begin{cases} y=10 \\ x=8 \end{cases}$$

INSIEMI A, B insiemi

$a \in A$

- $A \cap B = \{c \mid c \in A \wedge c \in B\}$
- $A \cup B = \{c \mid c \in A \vee c \in B\}$

- $A \subseteq B$ → contenuto
- $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$



→ Ci sono anche insiemi "speciali" → perché all'interno si possono svolgere operazioni

Es. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
↳ n reali

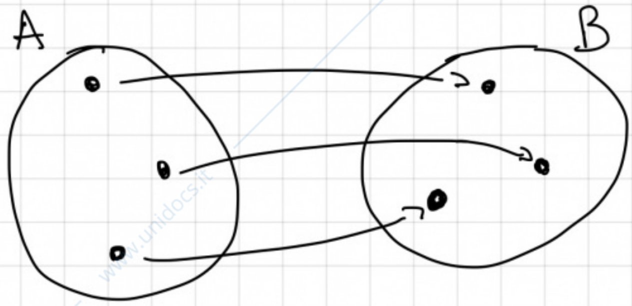
Tratteremo gli insiemi SPAZI VETTORIALI e le loro APPLICAZIONI

APPLICAZIONI TRA INSIEMI

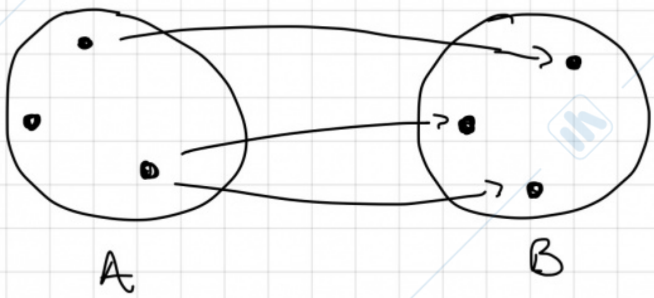
A, B insiemi

$f: A \to B$

↳ applicazione da A a B: da ogni elemento $a \in A$ corrisponde $b \in B$



è un'applicazione



non è un'applicazione → 1) un a va a 2 b
2) ad un a non corrisponde alcun b

Es.

- $f\ \mathbb{Z}$ (n interi) $\to \mathbb{Z}$

$n \to n^2 \Rightarrow$ è un'applicazione

2) $z = a+bi \quad \{a, b \in \mathbb{R}\}$

$\bar{z} = a - bi \qquad -\bar{z} = -a+bi$

$iz = -b+ai$

Se $z = -\bar{z} \Rightarrow z + \bar{z} = 0 \Rightarrow Re(z) + Re(\bar{z}) = 0$
$\wedge \; Im(z) + Im(\bar{z}) = 0$

Poiché $Re(z) = Re(\bar{z})$ $Re(z) + Re(\bar{z}) \neq 0 \;\; \forall a \neq 0$

Se $a = 0$ $z = 0 + bi \Rightarrow iz = -b$ con $-b \in \mathbb{R} \Rightarrow z \in \mathbb{R}$

Es 121

$w^2 = 2 + 2\sqrt{3}\, i$

$|w| = \sqrt{Re^2 + Im^2} = \sqrt{4+12} = 4$

$Re = |w| \cdot \cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{Re}{|w|} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{3}$

$w_k = |w|^{1/n} \left[\cos\left(\dfrac{\varphi}{n} + \dfrac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\dfrac{\varphi}{n} + \dfrac{2k\pi}{n}\right)\right]$ con $1 \leq k \leq 2$
$n = 2$

$w_k(1) = 2\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{3 \cdot 2} + \pi\right) + i \sin\left(\dfrac{\pi}{6} + \pi\right)\right]$

$w_k(1) = 2\left(\cos\dfrac{7\pi}{6} + i \sin\dfrac{7\pi}{6}\right) = \cancel{2} \cdot \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\right) + i\left(-\dfrac{1}{\cancel{2}}\right)\cancel{2}$

$= -\sqrt{3} - i$

$w_k(2) = 2\left[\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{6} + 2\pi\right) + i \sin\left(\dfrac{\pi}{6} + 2\pi\right)\right]\right.$

$= 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i \sin\dfrac{\pi}{6}\right) = \cancel{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} + \cancel{2} \cdot \dfrac{1}{\cancel{2}} \cdot i$

$= \sqrt{3} + i$

COMPITO verifica che $\{0,1\}$ è un CAMPO

G1 G2 G3 G4 rispetto a $(\{0,1\},+)$ sono rispettate
$\Rightarrow (\{0,1\},+)$ è un CAMPO (oltre che GR. COMMUTATIVO)

Siccome G2 in $(\{0,1\},\cdot)$ non è rispettato
$(\{0,1\},\cdot)$ non è un campo (neanche GR. COMMUTATIVO)

NUMERI COMPLESSI

$x^2+1=0$ a coefficienti reali non ha radici

$i \notin \mathbb{R} \quad i^2=-1$

$\mathbb{C}=\{a+ib \mid a,b \in \mathbb{R}\}$

$a+i0=a \in \mathbb{R} \qquad \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

$a=\mathrm{Re}(a+ib)$ parte reale

$b=\mathrm{im}(a+ib)$ // immaginaria

ib immaginario puro

Esempi di Applicazioni:

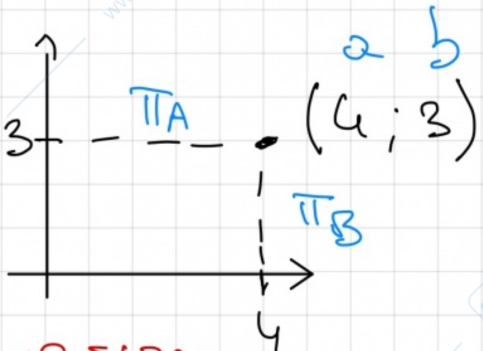
A, B insiemi $\quad A \times B = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$

$$\begin{tikzcd} & A \times B \arrow[dl, "\pi_A"'] \arrow[dr, "\pi_B"] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

π_B => applicazione = funzione

applicazioni PROIEZIONI $\begin{cases} \pi_A((a,b)) = a \\ \pi_B((a,b)) = b \end{cases}$

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$



π_A e π_B ti portano sugli assi

COMPOSIZIONE

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

composizione

$g \circ f : A \to C$

$(g \circ f)(a) \overset{\text{def}}{=} g(f(a))$ $\quad B \Rightarrow g(B)$

Es.

supponiamo

$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $\qquad g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$n \to n+1$ $\qquad n \to n^2$

$(f \circ g)(n) = f(n^2) = n^2 + 1$

$(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(n+1) = (n+1)^2$

=> 2 applic. diverse

u, v, w LD ⇒ esistono $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ tali che $au+bv+cw=0$

se $c \neq 0$ ⇒ $w = -\frac{a}{c}u = -\frac{b}{c}v$

⇒ 3 vettori L.N. sono complanari

PROPOSIZIONE: i vettori $v_1, \dots v_k$ sono LINEARMENTE DIPENDENTI se e solo se almeno uno è combinazione lineare degli altri

DIMOSTRAZIONE: ① $v_1 .. v_k$ LD ⇒② almeno uno è C.L. degli altri

① $v_1 .. v_k$ LD ⇒ $\exists\, a_1 \dots a_k$ non tutti zero tali che

$a_1 v_1 + \dots + a_k v_k = 0$
↳ $a_k \neq 0$

$v_k = -\frac{a_1}{a_k} v_1 \dots \frac{a_{k-1}}{a_k} v_{k-1}$

coeff = −1

② implica che $\boxed{a_1 v_1 + a_{k-1} v_{k-1} - v_k = 0}$ ⇒ Tutto questo ≠ 0 quindi questi vettori sono L.D.

PROPOSIZIONE: 1 vettore di V è L.D. ⇔ V = 0

2 vettori di V sono LD ⇔ paralleli

3 " " V " LD ⇔ complanari

fai a casa la dimostrazione

DIMOSTRAZIONE

$z = |z|(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) \vee z = |z| \exp(i\vartheta)$

cerchiamo $w \in \mathbb{C} \mid w^n = z$

$\hookrightarrow w = \sqrt[n]{z} \Rightarrow w^n = z$

$w = |w|(\cos\rho + i\sin\rho)$

$w^n = z \Rightarrow |w|^n = |z|$

$w^n = |w|^n(\cos(n\rho) + i\sin(n\rho))$

$\hookrightarrow n\rho = \vartheta + 2k\pi \Rightarrow \rho = \frac{\vartheta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$

$\Rightarrow w_k = \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{\vartheta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\vartheta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]$

$\Rightarrow w_k = |z|^{1/n} \exp\left[i\left(\frac{\vartheta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]$ con $1 \leq k \leq n$

POLINOMI

$\mathbb{K}[x] = \{ a_0 + a_1 x + a_n x^n \mid a_i \in \mathbb{K} \}$ $\mathbb{K}$ = campo

$(\mathbb{K}[x], +, \cdot)$ anello commutativo

In $\mathbb{K}[x]$ ci sono polinomi che non hanno radici

es. $x^2 + 1$

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA: Ogni polinomio a coefficienti complessi ha almeno una radice in $\mathbb{C}$.

ES CON NUMERI COMPLESSI

es 118 p. 78

$$3(1-i)+i(2+i) = 3-3i+2i-1 = 2-i$$

es 119

1) $z = a+bi \quad \{a,b \in \mathbb{R} \wedge a,b \neq 0\}$

$iz = ai - b \Rightarrow -b + ai$

$$Re(iz) = \frac{iz + \overline{iz}}{2} = \frac{\overbrace{-b+ai}^{iz}\ \overbrace{-b-ai}^{\overline{iz}}}{2} = \frac{-2b}{2} = -b$$

$$Im(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i} = \frac{\cancel{a}+bi\ \cancel{-a}+bi}{2i} = \frac{2bi}{2i} = b$$

$\Rightarrow -b = -(b) \Rightarrow Re(iz) = -Im(z) \quad \forall b \in \mathbb{R}$

2) $z = a+bi \quad \{a,b \in \mathbb{R} \wedge a,b \neq 0\}$

$iz = ai - b = -b + ai$

$$Im(iz) = \frac{iz - \overline{iz}}{2i} = \frac{\cancel{-b}+ai\ \cancel{+b}+ai}{2i} = \frac{+2ai}{2i} = +a$$

$$Re(z) = \frac{z+\overline{z}}{2} = \frac{a\cancel{+bi}+a\cancel{-bi}}{2} = \frac{2a}{2} = a$$

$\Rightarrow a = a \Rightarrow Im(iz) = Re(z) \quad \forall a \in \mathbb{R}$

es 120

1) $z = a+bi \quad \{a,b \in \mathbb{R}\}$

$\overline{z} = a - bi$

se $z = \overline{z} \Rightarrow z - \overline{z} = 0 \Rightarrow Re(z) - Re(\overline{z}) = 0$
$\wedge \quad Im(z) - Im(\overline{z}) = 0$

poiché $Im(\overline{z}) = -Im(z) \Rightarrow Im(z) - Im(\overline{z}) \neq 0 \quad \forall b \neq 0$

se $b = 0 \Rightarrow z = a$ con $a \in \mathbb{R} \Rightarrow z \in \mathbb{R}$

COMPITO: Verifica che $\mathbb{C}$ sia gruppo commutativo

G1 : $(\mathbb{C}, +)$ ha elemento neutro

$\rightarrow z = x+iy \mid x,y \neq 0 \quad (x+iy)+0 = 0+(x+iy) = z$

$\Rightarrow$ 0 è l'elemento neutro.

G2 $\quad \forall z \in \mathbb{C} \ \exists z^{-1} \mid z + z^{-1} = 0$ → el. neutro somma

$\rightarrow (x+iy)+(-x-iy) = (-x-iy)+(x+iy) = 0$

$\Rightarrow$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ esiste il suo opposto

G3 Proprietà associativa

$z = x+iy \wedge w = \alpha + i\beta$

$x+(iy+\alpha+i\beta) = (x+iy+\alpha)+i\beta = (x+\alpha)+i(y+\beta)$

$\Rightarrow$ è verificata

G4 Proprietà commutativa

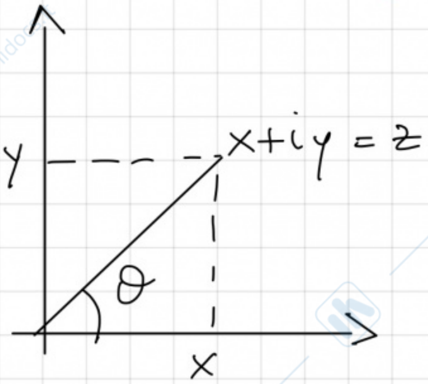
$z = x+iy \wedge w = \alpha+i\beta$

$(x+iy)+(\alpha+i\beta) = (\alpha+i\beta)+(x+iy)$

$\Rightarrow$ è verificata

Poiché in $(\mathbb{C}, +)$ vale G1, G2, G3, G4 allora $(\mathbb{C}, +)$ è GR. COMMUTATIVO.

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA di $\mathbb{C}$ con COORDINATE POLARI



Sono coordinate polari

- DISTANZA dall' ORIGINE
- angolo θ

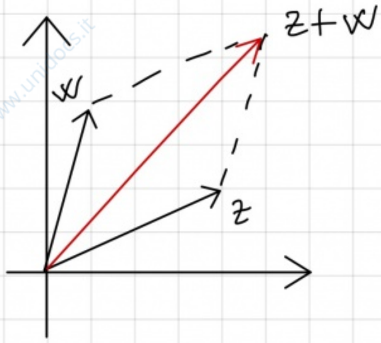
$$\left.\begin{array}{l} x = |z| \cdot \cos\theta \\ y = |z| \cdot \sin\theta \end{array}\right\} \text{radianti}$$

$$z = x+iy = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) \quad \vee \quad z = |z|\exp(i\theta)$$

SOMMA

$$z = x+iy \qquad w = \alpha + i\beta$$

$$z+w = (x+\alpha) + i(y+\beta)$$



PRODOTTO

$$z \cdot w = \underbrace{|z|(\cos\theta + i\sin\theta)}_{z} \cdot \underbrace{|w|(\cos\alpha + i\sin\theta)}_{w}$$

$$= |z|\cdot|w|\left[\underbrace{\cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha}_{\text{somma di cos}} + i\underbrace{(\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha)}_{\text{somma di sin}}\right]$$

$$= |z|\cdot|w|\cdot[\cos(\alpha+\theta) + i\sin(\alpha+\theta)]$$

PRODOTTO = alla somma degli angoli per il prodotto delle norme

PRODOTTO con exp

$$z = |z|\exp(i\theta) \qquad w = |w|\exp(i\alpha)$$

$$z \cdot w = |z||w| \exp(i\theta)\exp(i\alpha)$$

$$= |z||w| \exp[i(\theta+\alpha)]$$

$\hookrightarrow f: A \to B$

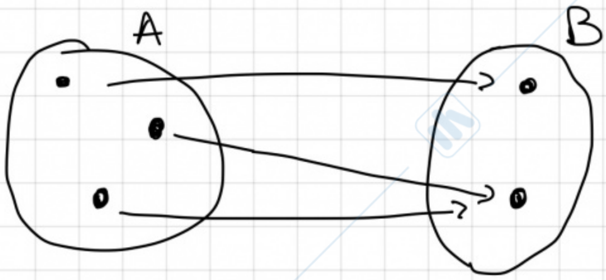
1) Un' applicazione si dice SURIETTIVA o SURGETTIVA se e' l'immagine di $f = B$ $\Rightarrow$ nessuno elemento b rimane escluso (ogni b è immagine di almeno un a)

$n \to n^2$ } non SURIETTIVE $\to$ perchè l'insieme
$n \to 2n$ } Immagine è più piccolo di $\mathbb{N}$ o $\mathbb{Z}$

$n \to n+1$ SURIETTIVA

$\Rightarrow$ $f: A \to B$, $Im f = B$ } SURIETTIVA

2) Un' applicazione $f: A \to B$ si dice INIETTIVA se $f(a) \neq f(a')$ con $a \neq a'$



$n \to n^2$ non iniettiva

$n \to 2n$ } INIETTIVA
$n \to n+1$ }

3) Un' applicazione $f: A \to B$ si dice BIUNIVOCA se è sia SURIETTIVA che INIETTIVA

$\Rightarrow$ $n \to n+1$ è BIUNIVOCA

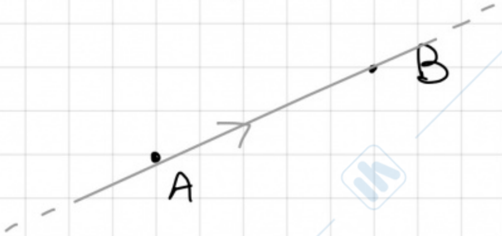
Siano A e B due insiemi finiti (con un numero finito di elementi), supponiamo che esista $f: A \to B$ biunivoca
Indica con $\#(A)$ il numero di elementi in A
e con $\#(B)$ " " " " in B

Se $f: A \to B$ è BIUNIVOCA $\Rightarrow \#(A) = \#(B)$

VETTORI

↳ oggetto con le informazioni per effettuare uno spostamento

→ $\mathcal{E}_1$ è lo spazio Euclideo



- direzione
- verso
- distanza da percorrere (modulo)

Def:

⇒ Un vettore è un oggetto matematico che contiene 3 informazioni: DIREZIONE
VERSO
MODULO o NORMA

NOTAZIONI

$u, v, w \ldots \quad \vec{v}, \underline{v}, \mathbf{v}$

↳ lei usa questi

una coppia ordinata di punti A e B individua un vettore, che si indica con $\underline{\vec{AB} = B - A} = v$ ↳ $\vec{v}$

Ci sono infinite coppie ordinate di punti che individuano lo stesso vettore (sono paralleli e uguali)

$\underbrace{Q - P} = \underbrace{B - A} = v$

↳ sono 2 lati opposti di un parallelogramma

Operazioni con vettori

- somma (+)
- prodotto di v per un reale

1) v, w e V → è l'insieme dei vettori

$v + w$ = lo spostamento complessivo

Teorema: sia $p \in \mathbb{K}[x]$ di grado n.
e siano $a_1 \dots, a_r$ le radici distinte di p.

Allora: $p(x) = q(x)(x-a_1)^{m_1}(x-a_2)^{m_2} \cdots (x-a_r)^{m_r}$

↳ nei complessi è un numero puro

con $q(a_i) \neq 0$ e q non ha radici => irriducibile

il grado di $(q) + m_1 + \dots m_r = n$ si chiama

m_i = molteplicità della radice a_i

Es.

$$p(x) = \underbrace{(x^2+1)}_{\text{non ha radici}}(x-1)^2(x-3)^3$$

$a_1 = 1$ di molteplicità 2

$a_2 = 3$ // // 3

grado $(p) = 7$ grado $(q) = 2$

Es che erano per casa

$$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 \underset{\uparrow \text{hp}}{=} a(x-a_1)(x-a_2)$$

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 = \underbrace{a}_{\alpha_2} x^2 - a(a_1+a_2)x + a a_1 a_2$$

$\alpha_2 = a$

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{-a(a_1+a_2)}{\alpha_2} \Rightarrow \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = -(a_1+a_2) \rightarrow - \text{Somma}$$

$$\frac{\alpha_0}{\alpha_2} = \frac{a\, a_1 a_2}{\alpha_2} \qquad \frac{\alpha_0}{\alpha_2} = a_1 a_2 \rightarrow \text{Prodotto}$$

Esempio.

$2i z^2 - 4(i+2)z + 3 - i$

Trova somma e prodotto delle radici

$$a_1 + a_2 = -\frac{(-4(i+2))}{2i} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

$$a_1 \cdot a_2 = \frac{\alpha_0}{\alpha_2} = \frac{3-i}{2i}$$

② Supponiamo di sapere che se $card(S) = n$ allora $card(P(S)) = 2^n$

Sia T con $card(T) = n+1 \Rightarrow card(T(S)) = 2^{n+1}$

in T prendo un elemento $\tau \in T$
e considero $S' = T \setminus \{\tau\}$

sottoinsiemi di T sono di 2 tipi:
ⓐ sottoinsiemi senza τ
ⓑ " con τ

$\to$ sono sottoinsiemi di S', ma $card(S') = n$ $\Big] \Rightarrow$ sono 2^n

$\to$ sono $A \cup \{\tau\}$ $A \subseteq S'$ $\to$ sottoinsiemi di S' $\Big] \Rightarrow 2^n$ perché ogni sottoinsieme ha la versione con τ e senza τ

$$\Rightarrow card(P(T)) = \underbrace{2^n}_{a} + \underbrace{2^n}_{b} = 2(2^n) = 2^{n+1}$$

$\Rightarrow$ quindi è affermazione è vera $\forall n$

Es. $\{a, c, \tau\} = T$

$card(P(T \setminus \{\tau\})) = 4$

$$T \setminus \{\tau\} = \underbrace{\{\phi, \{a\}, \{c\}, \{a,c\}\}}_{a}$$

ⓑ $\phi \cup \{\tau\} = \{\tau\} \wedge \{a\} \cup \{\tau\} = \{a, \tau\}$
$\{c\} \cup \{\tau\} = \{c, \tau\} \wedge$
$\{a, c\} \cup \{\tau\} = \{a, c, \tau\}$

$card(P(T)) = 8$
$\to 2^n + 2^n$
$= 2^2 + 2^2 = 8$

a^2 pari $= 2c^2 \rightarrow (2c)^2 = 2b^2 \rightarrow 4c^2 = 2b^2$

$2c^2 = b^2 \rightarrow$ faccio stesso ragionamento e trovo che b è pari

---

$\mathbb{R}$

$(\mathbb{R}, +) \rightarrow$ G. COMM → per le proprietà escludo lo 0

$(\mathbb{R}, \cdot) \rightarrow$ G. COMM

vale DISTRIBUTIVA (C)

$\Big\}$ CAMPO NUMERI REALI

DIMOSTRAZIONE PER INDUZIONE

Sia data $\forall n \in \mathbb{N}$ una proposizione A_n

Se:

1. A_1 è vera
2. si ha che $\forall n \in \mathbb{N}$ se A_n è vera allora A_{n+1} vera

$\Rightarrow$ ALLORA A_n è vera $\forall n \in \mathbb{N}$

Esempio.

→ insieme di tutte le parti

Sia S un insieme e sia $P(S)$ l'insieme delle parti di S
ossia l'insieme di tutti i sottoinsiemi di S
Se S ha n elementi
allora $P(S) = 2^n$ elementi

① → dimostro

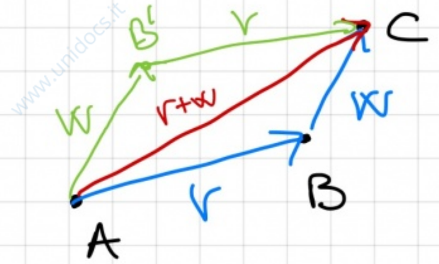
Supp. CARDINALITÀ (n elementi) $= 1$

$S = \{a\} \qquad P(S) = \{\emptyset, \{a\}\} \qquad \Rightarrow \text{card}(P(S)) = 2^1 = 2$

supp card$(S) = 2$

$S = \{a, b\} \qquad P(S) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

REGOLA DEL PARALLELOGRAMMA



⇒ la somma = la somma di due vettori è la "diagonale orientata" del parallelogramma individuato dai vettori

Un $v=0$ → vettore nullo ha modulo $=0$ e direzione e verso indefiniti.
Corrisponde allo spostamento 0 → stare fermi

→ $v+0=0+v=v$ 0 vettore nullo

→ se ho v l'opposto $-v$ ha stesso modulo e direzione e verso opposto

⇒ la $(V,+)$ è GRUPPO COMMUTATIVO

2) Prodotto per numero reale (vett · scal)

$a \cdot v$ con $a \in \mathbb{R} \wedge v \in V$

Se $a=0 \vee v=0 \Rightarrow av=0$

$$av \begin{cases} \text{direzione di } v \\ \text{verso di } v \text{ se } a>0 \text{, verso opposto se } a<0 \\ \text{modulo} = |a| \cdot |v| \end{cases}$$

PROPRIETÀ

$(V,+,$ vettore · scalare$)$
$(V,+)$ → GR. COMMUTATIVO

$1 \cdot v = v$ $-1 \cdot v = -v$

$0 \cdot v = 0$

V_1 $a(v+w)=av+aw$ → somma vettoriale per scalare

V_2 $(a+b)v=av+bv$ → somma scalari per prodotto

V_3 $a(bv)=(ab)v$

LINEARE INDIPENDENZA

Def: I vettori $v_1 \dots v_k$ sono LINEARMENTE INDIPENDENTI se $a_1v_1 \dots + a_kv_k = 0$ implica che $a_1 = a_2 = a_k = 0$

OSSERVAZIONE: 3 vettori non complanari sono L.I.

PROPOSIZIONE: 4 vettori sono sempre L.D.

Dim.

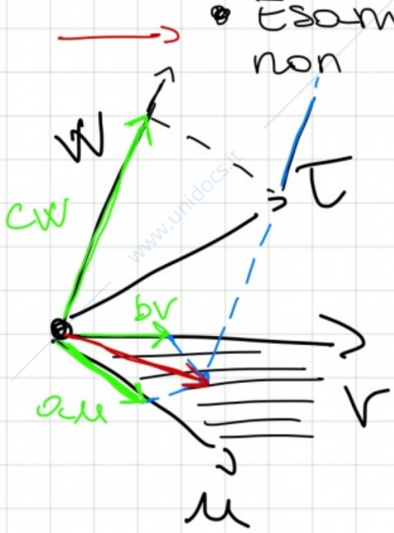
combinazioni:

- Se 1 dei 4 è L.D. $\Rightarrow$ i 4 sono L.D.
  $0, u, v, w$ $\qquad 1 \cdot \underbrace{0}_{\vec{v}} + \underbrace{0}_{\mathbb{R}} u + \underbrace{0}_{\mathbb{R}} v + 0w = 0 \to \vec{v}$
- Se 2 dei 4 sono LD $\Rightarrow$ i 4 sono LD
  $\underbrace{u, v}_{LD}, w, T$ $\qquad \underbrace{au + bv}_{} + 0w + 0T = 0 \to \vec{v}$
  u e v sono LD $\Rightarrow au + bv = 0$

funziona con gruppi infiniti → se alcuni sono LD agli altri do coeff $= 0$

qui ci sono 3 vett. complanari

- Se 3 dei 4 sono LD $\Rightarrow$ i 4 sono LD
  $\underbrace{u, v, w}_{LD}, T$
  $\Rightarrow \exists (a, b, c) \neq 0 \mid au + bv + cw = 0$
  allora $au + bv + cw + 0T = 0$
- Esaminiamo il caso in cui 3 dei 4 sono non complanari



u, v, w non complanari $\Rightarrow$ L.I.
se aggiungo un 4° diventano LD

$T = au + bv + cw$
$\Rightarrow$ i 4 sono LD

perché $au + bv + cw - T = 0$

Def: Siano $v_1, \dots v_k \in V$

$$\text{span}\{v_1 \dots v_k\} = \{a_1v_1 + \dots + a_kv_k \mid a_i \in \mathbb{R}\}$$

$|z| = \sqrt{\underbrace{z\bar{z}}_{x^2+y^2}}$ $\quad |z| = |\bar{z}|$ $\quad \rightarrow |z|^2 = \underbrace{z \cdot \bar{z}}$

$\hookrightarrow x^2 + y^2$

$x^2 \rightarrow Re$, $y^2 \rightarrow Im$

PROPOSIZIONE
Siano z, w due numeri complessi, allora

- $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$ • $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ $\quad |z+w| \leq |z| + |w|$ $\quad |z-w| \geq |z| - |w|$

$z, w \quad z = x + iy \quad \omega = \alpha + i\beta$

$|zw| = |z| \cdot |w|$

basta dimostrare che $|zw|^2 = |z|^2 |w|^2$

$zw = \underbrace{(x\alpha - y\beta)}_{Re} + i \underbrace{(x\beta + y\alpha)}_{Im}$ è come se $zw = \gamma$ ← un'altro n complesso

$\Rightarrow |\gamma|^2 = Re^2 + Im^2$

$\rightarrow (x\alpha - y\beta)^2 + (x\beta + y\alpha)^2 = |z \cdot w|^2 = x^2\alpha^2 + y^2\beta^2 - \cancel{2x\alpha y\beta} + x^2\beta^2 + y^2\alpha^2 + \cancel{2x\alpha y\beta}$

$\rightarrow \underbrace{(x^2+y^2)}_{z\bar{z}} \underbrace{(\alpha^2+\beta^2)}_{w\bar{w}} = |z|^2 \cdot |w|^2 = x^2\alpha^2 + x^2\beta^2 + y^2\alpha^2 + y^2\beta^2$

$\rightarrow$ Tutta la dimostrazione si basa su

$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$

$|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

Es. $z = 2 - i \quad w = 3 + 2i$

$\bar{z} = 2 + i$

$|z| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

$zw = (6+2) + i(4-3) = 8 + i$

$z^{-1} = \frac{1}{z\bar{z}} \cdot \bar{z} = \frac{1}{4+1}(2+i) = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$

$w^{-1} = \frac{1}{w\bar{w}} \cdot \bar{w} = \frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$

RAZIONALI

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z} \right\} / \sim$$ → le frazioni eq rappresentano stesso numero

$$\frac{m}{n} \sim \frac{p}{q} \text{ se } mq - np = 0$$

$(\mathbb{Q}, +)$ GRUPPO COMMUTATIVO

$(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ G1 G2 G3 G4 e C → Distributiva

G1 G2 G3 G4 → G. COMMUTATIVO

G2 ↳ $\frac{m}{n} \cdot \frac{n}{m} = 1$

$\frac{m}{n}$ ↳ g

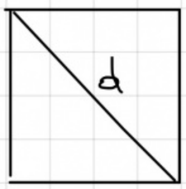
$\frac{n}{m}$ ↳ g^{-1}

⇒ $\mathbb{Q}$ è CAMPO dei NUM. RAZIONALI

↳ perché sia $(\mathbb{Q}, +)$ che $(\mathbb{Q}, \cdot)$ è gruppo COMM

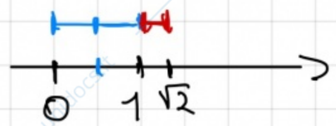
gruppo COMM ↳ ha le 4 proprietà

REALI



d non è COMMENSURABILE = non esprimibile con frazione

↳ non esiste frammento che divide sia e che d



$\sqrt{2}$ non è razionale → dimostro per assurdo

(razionale → $\mathbb{Q}$)

Dim:

suppongo che esistono $a, b \in \mathbb{Z}$ $\text{m.c.d}(a, b) = 1$ ↳ primi fra loro

tale che $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$

$\frac{a^2}{b^2} = 2 \rightarrow a^2 = 2b^2 \Rightarrow a^2$ è pari perché a^2 multiplo di 2

⇒ 2 divide a perché nella scomposizioni in fattori compare .

Se il a^2 divisibile per 2 ⇒ $a = 2^{\alpha} \cdot n^n \cdot k^k$

⇒ $a = 2^{\frac{\alpha}{2}} \cdot n^{n/2} \cdot k^{k/2}$

PROPRIETÀ NUMERI INTERI $\mathbb{Z}$

Def: Sia G un insieme;
una operazione $*$ su G è una applicazione
$* : G \times G \to G$
$(g, h) \to g * h$

Es. (Uso $\mathbb{Z}$)
$+ : (a, b) \to a + b$
$\cdot : (a, b) \to a \cdot b$
$\Big\}$ operazioni

$\{0, 1\}$

è una somma ipotetica diversa da quella in $\mathbb{Z}$

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

Def: Sia G un insieme con l'operazione $*$.
allora G è un gruppo se soddisfa 3 proprietà:

(G1) 1) $\exists$ un elemento e tale che $e * g = g * e = g$ $\forall g \in G$
elemento neutro

$\Rightarrow$ elemento NEUTRO

Es $(\mathbb{Z}, +)$ $n + 0 = 0 + n = n$
$(\mathbb{Z}, \cdot)$ 1 el NEUTRO

(G2) $\forall g \in G$ esiste un elemento g^{-1} T.c. $g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$
elemento opposto

Es$(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ $\mathbb{Z}$ non ha questo elemento

(G3) $\forall g, h, k \in G$ si ha $(g * h) * k = g * (h * k)$
$\hookrightarrow$ PROPRIETÀ ASSOCIATIVA

POTENZA

FORMULA DI MOIVRE: Sia $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$, allora $\forall n \in \mathbb{Z}$ si ha:

moltiplicare vuol dire sommare se stesso n volte. In questo caso gli angoli

$z^n = |z|^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$ ✓

$z^n = |z|^n \exp(in\theta)$

RADICI

RADICI: sia $z \in \mathbb{C}$; $z \neq 0$, sia $n \in \mathbb{N} > 0$ $\Big\} \Rightarrow$ n radici n-esime distinte di z

es $n=3$ $\exists$ 3 radici di $\sqrt[3]{z}$

Es.

$z = 1 + i0 = 1$ $\qquad 1 = \cos 0 + i \sin 0$

cerchiamo $w \mid w^n = 1$

$w = |w| \cos\rho + i \sin\rho$

$w^n = |w|^n \cos n\rho + i \sin n\rho = \cos 0 + i \sin 0 = 1$ $\quad$ → se $\rho = 0°$

→ $|w|^n = 1 \Rightarrow |w| = 1$

→ $n\rho = 2k\pi + 0$ → $\rho = 0$ $\quad \Rightarrow \rho = \dfrac{2k\pi}{n}$ con $1 \le k \le n$ → abbiamo n soluzioni

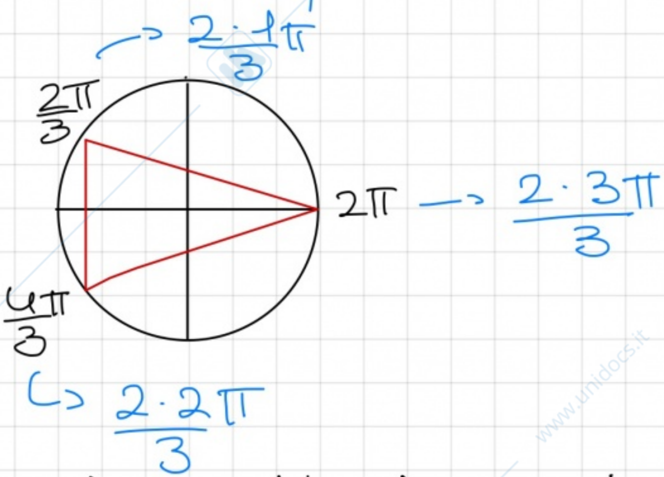
Troviamo le radici n-esime di 1

$\Rightarrow w = |w|\Big(\underbrace{\cos \frac{2k\pi}{n}}_{w_x} + i \underbrace{\sin \frac{2k\pi}{n}}_{w_y}\Big)$

Se $n = 3$

$\Rightarrow 1 \le k \le 3$

k numero intero



le radici n-esime di 1 sono i vertici del poligono regolare inscritto nella circonferenza goniometrica