

- 1) Stabilire se $B = \{(1,1,1), (1,-1,1), (0,0,1)\}$ è una base di \mathbb{R}^3 , e, in caso di risposta affermativa, determinare le coordinate del generico vettore (a,b,c) rispetto a B .
- 2) Siano $U = \{ax^2+bx+c : c=0\}$ e $V = \{ax^2+bx+c : c=1\}$. Stabilire se i due sottoinsiemi sono sottospazi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}_2[x]$ dei polinomi di grado ≤ 2 nella indeterminata x e, in caso di risposta affermativa, determinare la dimensione e una base.
- 3) Al variare del parametro reale k
 - a) Calcolare il rango della matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2k & 2 \\ 1 & 2k & k-1 & 1 \end{bmatrix}$
 - b) Determinare la dimensione e una base dello spazio delle righe e dello spazio delle colonne di A .
- 4) Stabilire se la seguente matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ è diagonalizzabile motivando la risposta e, in caso di risposta positiva, diagonalizzarla.
- 5) Date le rette $r: \begin{cases} x = 1 + h \\ y = 1 - h \\ z = 1 + h \end{cases} \quad h \in \mathbb{R}$ ed $s: \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ 2x + 3y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$ e il punto $P \equiv (1,0,1)$

Determinare

 - a) Le equazioni parametriche e cartesiane della retta t per P ortogonale sia ad r che a s ;
 - b) L'equazione del piano α che contiene r e P ;
 - c) I coseni direttori di r orientata in modo da formare un angolo acuto coll'asse x ;
 - d) La distanza di P da r .

3 maggio 2018

Cognome:

Matricola:

29 giugno 2018 edili-architettura

Cognome:

Matricola:

- 1) Sia S lo spazio delle soluzioni dell'equazione $x+y-z-t=0$ nelle incognite x,y,z e t . Spiegare perché S è un sottospazio di \mathbb{R}^4 . Determinare, motivando le risposte, la dimensione e una base di S .
- 2) Discutere il seguente sistema lineare al variare di h in \mathbb{R} e risolverlo per $h=1$:

$$\begin{cases} hx + 2y - (h-1)z = h \\ (3h-2)x + (1-h)y - 3z = 1+h \end{cases}$$

3) Data la matrice $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

- a) Enunciare il teorema di Laplace, dare la definizione di complemento algebrico di un elemento e calcolare $|C|$;
- b) Determinare $r(C)$, motivando la risposta.
- 4) Dati i vettori $v_1 = (1,0,1,1)$ e $v_2 = (0,1,1,1)$ determinare:
- a) Quali sono i vettori (a,b,c,d) di \mathbb{R}^4 che sono combinazione lineare di v_1 e v_2 (in altre parole determinare $U=L(v_1,v_2)$);
- b) Una base B di \mathbb{R}^4 contenente v_1 e v_2 , e le coordinate di v_2 rispetto a B ;
- c) La dimensione e una base del complemento ortogonale $W = \{v_1, v_2\}^\perp$ (i.e. W è l'insieme dei vettori di \mathbb{R}^4 ortogonali sia a v_1 che a v_2).
- 5) Sia f una applicazione lineare da \mathbb{R}^3 a \mathbb{R}^3 tale che $f(1,0,0) = (2,2,0)$ e $f(0,1,0) = (2,2,0)$ determinare
- a) Un vettore di $\text{Ker } f$ e un vettore di $\text{Im } f$;
- b) $f(1,1,0)$;
- c) dare la definizione di autovettore di un endomorfismo e spiegare perché $(1,1,0)$ è un autovettore di f .
- 6) Dato il piano $\alpha: x-y+z+1=0$ e il punto $P \equiv (2,0,-2)$ determinare:
- a) Le equazioni cartesiane di una retta r di α ;
- b) Le equazioni parametriche di una retta s parallela ad r e non contenuta in α ;
- c) L'equazione del piano β per l'origine ortogonale ad α e al piano xy (il piano che contiene l'asse x e l'asse y).
- d) La distanza di P da α .

Nota bene: non è necessario per superare la prova fare tutti gli esercizi, ma è necessario fare bene quelli che si fanno, tenuto conto del tempo a disposizione. In altre parole è meglio fare poco e bene, che molto fatto male.

25 maggio 2018 Edili-Architettura

Cognome:

matricola:

- 1) Dare la definizione di rango di una matrice. Fare un esempio di matrice quadrata di ordine 3 e rango 3, diversa da I, motivando la scelta. Trovare l'inversa di A ed eseguire la verifica.
- 2) Dire quando un insieme finito di vettori X si dice linearmente dipendente, linearmente indipendente. Sia $X = \{(1,1,3), (1,0,1), (-1,2,3)\}$. Stabilire se X è linearmente dipendente o indipendente
 - a) usando la definizione;
 - b) usando le trasformazioni elementari;
 - c) usando i determinanti.
 Motivare bene tutte le risposte.
 - d) determinare il sottospazio $U = L(X)$, ovvero quali sono i vettori (a,b,c) di \mathbb{R}^3 che appartengono a U.
 - e) determinare la dimensione e una base di $L(X)$.
- 3) Sia $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ la matrice che ha per colonne i vettori dell'insieme X in 2), ed f_A l'applicazione matriciale definita da A
 - a) Determinare il rango di A, motivando la risposta;
 - b) Determinare $f_A(x,y,z)$, $f_A(0,1,0)$, $f_A^{-1}(2,1,4)$;
 - c) Determinare la dimensione e una base di $\text{Ker } f_A$ e $\text{Im } f_A$;
 - d) Stabilire se f_A è iniettiva o suriettiva.
- 4) Siano $\alpha: x-y-z+1=0$, $\beta: 2x+y+z=0$ due piani dello spazio ordinario Σ :
 - a) stabilire se i piani sono paralleli, incidenti, ortogonali, motivando le risposte;
 - b) determinare le equazioni parametriche e cartesiane della retta r per l'origine parallela sia ad α che a β .
 - c) Le equazioni parametriche e cartesiane della retta s per l'origine ortogonale ad α .
 - d) L'equazione di un piano γ per l'origine ortogonale ad α .

12 giugno 2018

Cognome:

matricola:

- 1) Stabilire se il seguente sistema è compatibile e se è un sistema di Cramer. Determinare l'insieme S delle soluzioni e stabilire, motivando la risposta, se è o non è un sottospazio di \mathbb{R}^3 .

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ x + 3y + 2z = 5 \\ 2x + 5y + z = 8 \end{cases}$$

- 2) Dare la definizione di insieme di generatori e di base di uno spazio vettoriale V .
Sia $B = \{(1,1), (1,0)\}$. Stabilire, motivando la risposta, se B è una base di \mathbb{R}^2 e, in caso di risposta affermativa, determinare le coordinate del generico vettore (a,b) di \mathbb{R}^2 rispetto alla base B .
- 3) Definire lo spazio delle righe di una matrice. Enunciare il teorema degli orlati.
Dati i vettori $(1,2,-3,1)$, $(3,7,1,-2)$, $(1,3,7,-4)$. Determinare:
- se sono linearmente dipendenti o indipendenti;
 - il rango della matrice A che ha per righe questi vettori;
 - la dimensione e una base dello spazio delle righe e dello spazio delle colonne di A ;
 - data la applicazione matriciale f_A , determinare $f_A(x,y,z,t)$ e $f_A^{-1}(1,3,1)$;
 - Dire cosa deve accadere affinché f_A sia iniettiva e cosa deve accadere affinché f_A sia suriettiva.
Stabilire se f_A è iniettiva o suriettiva, possibilmente senza fare ulteriori calcoli.
- 4) Data una matrice A quadrata di ordine n , dare la definizione di autovalore e di autovettore di A .
Calcolare autovalori e autovettori della seguente matrice, diagonalizzarla se possibile.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- 5) Dati i punti $A \equiv (1,0,1)$, $B \equiv (2,-1,3)$, $C \equiv (2,1,3)$ determinare
- l'equazione del piano α che contiene A , B e C ;
 - le equazioni parametriche e cartesiane, i coseni direttori della retta r per A e B orientata da B verso A ;
 - l'equazione del piano β per C ortogonale ad r .

11 maggio 2017

- 1) Dati i punti $A \equiv (1,2,1)$, $B \equiv (2,0,1)$ e $C \equiv (3,1,0)$ determinare:
 - a) Le equazioni parametriche e cartesiane della retta r per A e B ;
 - b) Le equazioni parametriche e cartesiane della retta s per C parallela ad r ;
 - c) L'equazione del piano α che contiene r ed s ;
 - d) L'equazione del piano β per C ortogonale ad r .

- 2) Classificare la conica Γ di equazione $x^2+y^2+2x+2y = 0$ e determinare l'equazione della tangente a Γ nell'origine del riferimento.

13 giugno 2017

Cognome:

Matricola:

- 1) Dato il vettore $\mathbf{v}=(1,1,0,2)$ determinare:
- Un versore \mathbf{e} proporzionale a \mathbf{v} ;
 - Una matrice ortogonale A avente una riga coincidente col vettore \mathbf{e} (**facoltativo**);
 - L'insieme S dei vettori di \mathbb{R}^4 ortogonali a \mathbf{v} . Spiegare perché S è un sottospazio di \mathbb{R}^4 , determinare la dimensione e una base di S .
- 2) Determinare al variare di h in \mathbb{R} il rango di $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & h \end{bmatrix}$ usando:
- Le trasformazioni elementari;
 - Il teorema degli orlati.
- 3) Sia $X = \{(1,1,0,1), (1,-1,2,3), (0,1,-1,0)\}$. Determinare l'insieme S dei vettori di \mathbb{R}^4 che sono combinazione lineare dei vettori di X . Spiegare perché S è un sottospazio di \mathbb{R}^4 , determinare la dimensione e una base di S .
- 4) Determinare l'insieme S delle soluzioni del sistema $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \\ -x - 2y = 0 \end{cases}$
- Spiegare perché S è un sottospazio di \mathbb{R}^3 , determinare la dimensione e una base di S .
- 5) Dati i vettori $u_1=(1,1,0)$, $u_2=(0,0,1)$, $u_3=(2,1,-1)$ stabilire:
- Se i vettori sono linearmente dipendenti o indipendenti;
 - Se il vettore $(2,7,1)$ è combinazione lineare di questi vettori;
 - Se $B=\{u_1, u_2, u_3\}$ è una base di \mathbb{R}^3 e, in caso di risposta affermativa, trovare le coordinate del generico vettore (a,b,c) rispetto a B .
- 6) Date le rette $r: \begin{cases} x - z = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$ ed $s: \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$
- Stabilire se le rette sono sghembe o complanari;
 - Determinare la retta per l'origine parallela ad r ;
 - Determinare l'equazione del piano che contiene la retta r e il punto $P \equiv (1,1,1)$;
 - Le equazioni della retta per P complanare sia con r che con s .

14 febbraio 2017 **A**

Cognome:

numero matricola:

- 1) Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una applicazione lineare tale che $f(1,0,0) = (1,2,3)$ e $f(0,1,0) = (1,0,-1)$, determinare, se possibile, $f(1,1,0)$ e $f(2,0,0)$.
- 2) Sia $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & h \end{bmatrix}$, stabilire per quale valore di h il vettore $v = (1,1)$ è un autovettore di A .
- 3) Dire, motivando la risposta, se le colonne di una matrice 4×5 sono linearmente dipendenti o indipendenti.
- 4) Sia $U = \{ (a,b,c) : c \geq 0 \}$. Stabilire se U è un sottospazio di \mathbb{R}^3 , motivando la risposta.
- 5) Sia $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.
 - a) Dopo aver enunciato il teorema di Laplace e illustrato come cambia il determinante quando su una matrice si eseguono delle trasformazioni elementari, calcolare il determinante di A .
 - b) Determinare il rango di A , la dimensione e una base dello spazio delle righe di A , usando preferibilmente il teorema degli orlati.
- 6) Sia S_1 lo spazio delle soluzioni dell'equazione $-x-2y=0$ e S_2 lo spazio delle soluzioni del sistema $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \end{cases}$, determinare la dimensione e una base di S_1 , S_2 , $S_1 \cap S_2$ giustificando bene tutte le risposte. Stabilire se S_1 ed S_2 sono supplementari.
- 7) Sia $\alpha: x-y+2z-3=0$ e $P \equiv (1,1,0)$
 - a) Determinare l'equazione del piano β che contiene l'asse x e l'asse y .
 - b) L'equazione del piano π per P parallelo ad α .
 - c) Le equazioni parametriche e cartesiane di una retta per P parallela ad α .
 - d) L'equazione del piano δ per P ortogonale sia ad α che a β .

TEORIA (facoltativo)

Dopo aver definito la somma e l'intersezione di due sottospazi S_1 ed S_2 di uno spazio vettoriale V , ed enunciato la relazione di Grassman, dimostrare che :

- a) la somma di due sottospazi è un sottospazio;
- b) $\dim(S_1+S_2) \leq \dim S_1 + \dim S_2$ (senza usare la relazione di Grassman)

16 maggio 2017

Cognome:

matricola:

- 1) Dato $v_1=(1,0,1,1)$
- Determinare v_2 e v_3 non nulli in modo che l'insieme X formato dai tre vettori sia ortogonale. Spiegare perché X è linearmente indipendente.
 - Determinare l'insieme S dei vettori di \mathbb{R}^4 ortogonali a v_1 . Dire per quale teorema S è un sottospazio di \mathbb{R}^4 .
- 2) Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & h \end{bmatrix}$
- Calcolare $|A|$.
 - Determinare $r(A)$ al variare di h in \mathbb{R} .
Giustificare teoricamente tutte le risposte.
($|A| = -h+4$)
- 3) Dati i vettori $v_1=(1,1,2)$ e $v_2 = (2,1,3)$, determinare:
- per quali valori di a, b, c il vettore (a,b,c) appartiene a $U = L(v_1, v_2)$, la dimensione e una base di U .
 - Una base B di \mathbb{R}^3 che contiene v_1 e v_2 .
- 4) Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ determinare
- l'applicazione matriciale f_A .
 - $f_A(4,-1)$ e $f_A^{-1}(2,1)$. Spiegare perché da questo calcolo segue che f_A non è né iniettiva né suriettiva. Determinare un vettore non nullo di $\text{Im } f_A$.
 - (facoltativo) Stabilire se A è diagonalizzabile e, in caso di risposta affermativa, diagonalizzarla.
- 5) Dati i punti $A \equiv (1,0,1)$, $B \equiv (2,1,-1)$, $C \equiv (3,1,2)$
- Verificare che i punti non sono allineati e determinare l'equazione del piano α per i tre punti:
 - Determinare le equazioni parametriche e cartesiane della retta r per A e B , i coseni direttori di r orientata da B verso A .
 - Indicare le equazioni cartesiane dell'asse x , dell'asse y e dell'asse z .

17 gennaio 2017

Compito **A**

Cognome:

Matricola:

1) Dare la definizione di anello e di campo. Fare uno o più esempi di anello che non sia un campo, motivando la risposta.

2) Definire la somma di due sottospazi e, usando la sola definizione, spiegare perché contiene il vettore nullo. Determinare la dimensione e una base di S_1 , S_2 , $S_1 \cap S_2$, $S_1 + S_2$, dove S_1 è lo spazio delle soluzioni del sistema $\begin{cases} x + y - z + t = 0 \\ 2x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$ ed S_2 è lo spazio delle soluzioni della equazione $3x + 4y - z + 2t = 0$.

Dire se la somma è diretta, se i sottospazi sono complementari o supplementari, motivando le risposte.

3) Dare la definizione di base e dimensione di uno spazio vettoriale e di coordinate di un vettore rispetto ad una base. Determinare una base B di \mathbb{R}^3 che contiene il vettore $(1,1,0)$, motivando la scelta, e le coordinate di $(2,2,0)$ rispetto a B .

4) Dire quando una matrice A si dice invertibile, definire lo spazio delle righe di A e la forma canonica per righe di A .

Sia $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & h \end{bmatrix}$ Stabilire per quali valori di h :

- A è invertibile;
- $r(A) = 4$;
- lo spazio delle righe di A è \mathbb{R}^4 ;
- la forma canonica per righe di A è I .

Motivare bene tutte le risposte.

5) Siano $\alpha: x - y - z + 1 = 0$, $\beta: 2x + y + z = 0$ due piani dello spazio ordinario Σ :

- stabilire se i piani sono paralleli, incidenti, ortogonali, motivando le risposte;
- determinare le equazioni parametriche e cartesiane della retta r per l'origine parallela sia ad α che a β .
- Le equazioni parametriche e cartesiane della retta per l'origine ortogonale ad α .

{

17 gennaio 2017

Compito **B**

Cognome:

Matricola:

- 1) Scrivere un sistema lineare in forma scalare, in forma vettoriale, in forma matriciale, spiegando brevemente come si passa da una forma all'altra. Dire perché l'insieme delle soluzioni di un sistema non omogeneo non è un sottospazio.
- 2) Dare la definizione di rango di una matrice. Fare un esempio di matrice quadrata di ordine 3 e rango 3, diversa da I, motivando la scelta. Trovare l'inversa di A ed eseguire la verifica.
- 3) Dire quando un insieme finito di vettori X si dice linearmente dipendente, linearmente indipendente. Sia $X = \{(1,1,3), (1,0,1), (-1,2,0)\}$. Stabilire se X è linearmente dipendente o indipendente
 - a) usando la definizione;
 - b) usando le trasformazioni elementari;
 - c) usando i determinanti.
 Motivare bene tutte le risposte.
 - d) determinare il sottospazio $U = L(X)$, ovvero quali sono i vettori (a,b,c) di \mathbb{R}^3 che appartengono a U.
- 4) Definire una applicazione lineare tra due spazi vettoriali V e W, nucleo di f e immagine di f.

Sia $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

 - a) determinare $f_A(x,y,z,t)$;
 - b) la dimensione e una base di $\text{Ker } f_A$ e $\text{Im } f_A$;
 - c) stabilire se f_A è iniettiva o suriettiva, motivando la risposta.
- 5) Siano $\alpha: x-y-z+1=0$, $\beta: 2x+y+z=0$ due piani dello spazio ordinario Σ :
 - a) stabilire se i piani sono paralleli, incidenti, ortogonali, motivando le risposte;
 - b) determinare le equazioni parametriche e cartesiane della retta r per l'origine parallela sia ad α che a β .
 - c) Le equazioni parametriche e cartesiane della retta per l'origine ortogonale ad α .

22 marzo 2017 A

Prova in itinere Edili-Architettura

Cognome:

Matricola:

- 1) a) Verificare che $B = \{(-1,0,-1), (2,0,-1), (0,1,0)\}$ è una base di \mathbb{R}^3 , spiegando bene il procedimento.
b) Determinare le coordinate del generico vettore (a,b,c) di \mathbb{R}^3 rispetto alla base B .
c) Determinare le coordinate del vettore $(3,2,-1)$ rispetto alla base B .
- 2) Dati i vettori $(1,2,-1,0)$, $(3,2,1,0)$, $(2,0,2,0)$, $(4,4,k,0)$.
 - a) Stabilire per quale valore di k i vettori sono linearmente indipendenti.
 - b) Determinare il rango della matrice A che ha per righe i vettori dati usando il teorema degli orlati.
 - c) Determinare la dimensione e una base dello spazio delle righe di A al variare di k in \mathbb{R} .
- 3) Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita dalla matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
 - a) Determinare $f(x,y,z)$, la dimensione e una base di $\text{Ker } f$ e $\text{Im } f$.
 - b) Stabilire se f è iniettiva o suriettiva.
 - c) Determinare un complementare di $\text{Ker } f$.
- 4) Dato il vettore $v=(1,1,0)$, determinare
 - a) determinare la dimensione e una base di v^\perp .
 - b) una base ortogonale di \mathbb{R}^3 che contiene v .
- 5) Verificare che $B = \{(1,0,-1), (0,1,0), (1,0,1)\}$ è una base di autovettori di $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Spiegare perché A è diagonalizzabile e diagonalizzarla.

22 marzo 2017 B

Prova in itinere Edili-Architettura

Cognome:

Matricola:

- 1) a) Stabilire se $X = \{(1,1,0), (3,2,1), (1,0,1)\}$ è linearmente dipendente o indipendente, spiegando bene il procedimento.
b) Determinare quali sono i vettori (a,b,c) di \mathbb{R}^3 che appartengono a $L(X)$.
c) la dimensione e una base di $L(X)$.
- 2) Dati i vettori $(1,2,-1,0)$, $(3,2,1,0)$, $(2,0,2,0)$, $(4,4,k,0)$.
 - a) Stabilire per quale valore di k i vettori sono linearmente indipendenti.
 - b) Determinare il rango della matrice A che ha per righe i vettori dati usando il teorema degli orlati.
 - c) Determinare la dimensione e una base dello spazio delle righe di A al variare di k in \mathbb{R} .
- 3) Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita dalla matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
 - a) Determinare $f(x,y,z)$, la dimensione e una base di $\text{Ker } f$ e $\text{Im } f$.
 - b) Stabilire se f è iniettiva o suriettiva.
 - c) Determinare un complementare di $\text{Ker } f$.
- 4) Dato il vettore $v=(1,0,1)$, determinare
 - a) determinare la dimensione e una base di v^\perp .
 - b) una base ortogonale di \mathbb{R}^3 che contiene v .
- 5) Verificare che $B = \{(1,0,-1), (0,1,0), (1,0,1)\}$ è una base di autovettori di $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Spiegare perché A è diagonalizzabile e diagonalizzarla.

25 maggio 2017

- 1) Dati la retta $r: \begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0 \\ 2x - 3y - z + 2 = 0 \end{cases}$ e il punto $P \equiv (1, 1, 0)$ determinare:
- Le equazioni parametriche e cartesiane della retta s per P parallela ad r ;
 - L'equazione del piano α per P ortogonale ad r ;
 - L'equazione del piano β contenente r e P ;
 - Le equazioni della retta t per P ortogonale ed incidente r (facoltativo) ;
 - I coseni direttori di r orientata in modo da formare un angolo acuto coll'asse z .
- 2) Classificare la conica $\gamma: x^2 - 2xy + y^2 + 2x = 0$ e l'equazione della tangente a γ nell'origine.

7 febbraio 2017 **A**

Cognome:

numero matricola:

- 1) Data la retta $r: \begin{cases} x + y - z + 3 = 0 \\ 2x - y + 4z + 3 = 0 \end{cases}$ e il punto $P \equiv (0, -1, 2)$ determinare
- i coseni direttori di r in modo che formi un angolo acuto coll'asse y ;
 - le equazioni parametriche e cartesiane della retta per P parallela ad r , dopo aver verificato che $P \notin r$;
 - Le equazioni del piano per P parallelo ad r e all'asse x ;
 - La distanza di P da r (facoltativo).
- 2) Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$, verificare che i vettori $v_1 = (2, 2, 6)$, $v_2 = (1, -1, 0)$ e $v_3 = (1, 0, -1)$
- costituiscono una base B di \mathbb{R}^3 ;
 - che il vettore $v = (1, -3, -8)$ ha coordinate $(-1, 1, 2)$ rispetto alla base ordinata B .
 - che sono autovettori di A ;
 - che A è diagonalizzabile, e diagonalizzarla;
 - determinare la dimensione e una base del nucleo e dell'immagine dell'applicazione matriciale f_A .
 - determinare una base di \mathbb{R}^3 formata da autovettori di f_A .
 - senza fare calcoli, dire quanto vale il rango di A e perché, indicare la dimensione e una base dello spazio delle righe e dello spazio delle colonne di A .
- 3) Dato il vettore $v = (1, 0, 1, 1)$, determinare
- Una base ortogonale di \mathbb{R}^4 che contiene v ;
 - La dimensione e una base del complemento ortogonale di v .

TEORIA (facoltativo)Sia $f: V \rightarrow W$ una applicazione lineare, definire $\text{Ker } f$ e $\text{Im } f$, dimostrare che:

- $\text{Ker } f$ è un sottospazio di V ;
- che f trasforma vettori linearmente dipendenti in vettori linearmente dipendenti;
- che se B è una base di V allora $f(B)$ è un insieme di generatori di $\text{Im } f$.

Prova in itinere edili-architettura

30 gennaio 2017

1) Dati i vettori $\mathbf{u}_1 = (1,1,0)$, $\mathbf{u}_2 = (0,0,1)$, $\mathbf{u}_3 = (2,1,-1)$ stabilire:

- se i vettori sono linearmente dipendenti o indipendenti (motivando la risposta);
- se il vettore $(2,7,1)$ è combinazione lineare di questi vettori e, in caso di risposta affermativa, secondo quali scalari.

2) Dati i vettori $\mathbf{u} = (1,0,1,1)$ e $\mathbf{w} = (2,1,2,3)$, determinare:

- una base ortogonale B di \mathbb{R}^4 che contiene \mathbf{u} ;
- un vettore \mathbf{v} di \mathbb{R}^4 che sia ortogonale ai vettori \mathbf{u} e \mathbf{w} ;
- il complemento ortogonale di $X = \{\mathbf{u}, \mathbf{w}\}$;
- la chiusura lineare di X .

3) Fare un esempio di matrici quadrate di ordine 3 di rango 1, 2, 3 rispettivamente, motivando la scelta.

4) Date le matrici $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ indicare, senza fare calcoli, una matrice E tale che $EA=B$.

11 MAGGIO 2016, prof. A. D'Aniello

Cognome:

matricola:

- 1) Dato l'insieme $X = \{(1,2,-3,1), (3,7,1,-1), (1,3,7,-4)\}$, stabilire se sono linearmente dipendenti o linearmente indipendenti usando;

- a) La definizione;
b) Le trasformazioni elementari.

Giustificare le risposte.

3 punti

- 2) Determinare il rango di $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & k \end{bmatrix}$ al variare di k in \mathbb{R} , giustificando tutte le risposte.

2 punti

- 3) Sia $B = \{(1,1), (1,0)\}$

- a) Verificare che B è una base di \mathbb{R}^2 , motivando la risposta;
b) Determinare le coordinate del generico vettore (a,b) di \mathbb{R}^2 rispetto alla base B . Giustificare il procedimento.

3 punti

- 4) Data l'equazione $x+y-2z=0$, spiegare perché l'insieme delle soluzioni è un sottospazio di \mathbb{R}^3 , determinare la dimensione e una base di S .

2 punti

- 5) Data la matrice $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

- a) Verificare che il polinomio caratteristico di A è $(t+2)^2(t-1)$. Determinare autovalori e autovettori di A , diagonalizzarla se possibile. 3 punti
b) Determinare l'applicazione matriciale f_A e stabilire se è suriettiva. 2 punti

- 6) Dati i punti $A \equiv (1,0,1)$, $B \equiv (2,-1,1)$, $C \equiv (2,1,3)$ e $D \equiv (2,1,0)$ determinare

- a) L'equazione del piano α che contiene A , B e C ;
b) Le equazioni parametriche e cartesiane della retta r per D ortogonale ad α ;
c) I coseni direttori di r orientata in modo da formare un angolo acuto coll'asse z ;
d) La distanza di D da α .

4 punti

11 ottobre 2016

Cognome:

matricola:

- 1) Dato l'insieme $X = \{(1,0,1,3), (2,1,3,5), (0,1,1,-1)\}$
- Stabilire se X è linearmente dipendente o indipendente.
 - Determinare $L(X)$ (ovvero stabilire quali sono i vettori di \mathbb{R}^4 che sono combinazione lineare dei vettori di X).
 - Determinare il rango della matrice A che ha per righe i vettori di X ;
 - Determinare la forma canonica per righe di A ;
 - Stabilire se il vettore $(0,2,2,-2)$ è combinazione lineare dei vettori di X e, in caso di risposta affermativa, secondo quali scalari.

Non bastano calcoli e conclusioni, bisogna motivare teoricamente tutte le risposte.

- 2) Sia A l'insieme delle matrici antisimmetriche di ordine 3, stabilire se A è un sottospazio dello spazio delle matrici quadrate di ordine 3e, in caso di risposta affermativa, determinare la dimensione e una base di A .
- 3) Sia A una matrice di tipo $m \times n$ sul campo reale, definire l'applicazione matriciale f_A , dominio, codominio, equazioni di f_A . Data la matrice
- $$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$
- determinare:
- $f_A(2,1,-1)$, $f_A^{-1}(4,1)$;
 - la dimensione e una base di $\text{Ker } f_A$ e $\text{Im } f_A$;
 - stabilire se f_A è iniettiva o suriettiva motivando le risposte.
- 4) Dato il piano $\alpha: x+y-z-2=0$ e il punto $P \equiv (2,3,0)$ determinare:
- Le equazioni parametriche e cartesiane di una retta per P parallela ad α ;
 - L'equazione del piano β per P parallelo ad α ;
 - La distanza tra i piani α e β .

TEORIA

- 5) Dire quando una applicazione f tra due spazi vettoriali V e W si dice lineare, definire $\text{Ker } f$ e $\text{Im } f$. Dimostrare che $\text{Ker } f$ è un sottospazio di V e che f trasforma vettori linearmente dipendenti di V in vettori linearmente dipendenti di W .
- 6) Enunciare e dimostrare le condizioni di parallelismo e ortogonalità tra due piani.

12-01-2016

Cognome:

Matricola:

- 1) Sia $X = \{(1,1,-2), (1,-1,0), (1,1,h)\}$ stabilire per quale valore di h i vettori di X sono linearmente dipendenti. Posto $h=1$ verificare

a) che i vettori di X sono auto vettori della matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ senza calcolare il polinomio

caratteristico; determinare poi molteplicità algebrica e molteplicità geometrica dei corrispondenti autovalori con argomenti di tipo teorico (ovvero senza determinare polinomio caratteristico e autospazi);

b) se A è diagonalizzabile e, in caso di risposta affermativa, diagonalizzarla;

c) determinare dominio, codominio, equazioni dell'applicazione matriciale f_A , $f_A(1,0,1)$, $f_A^{-1}(2,1,1)$. Stabilire se f_A è iniettiva, suriettiva o biettiva.

- 2) Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & h & 4 \end{bmatrix}$

a) Calcolare $|A|$ e $r(A)$ al variare di h in \mathbb{R} ;

b) Stabilire per quali valori di h la matrice A è invertibile.

- 3) Spiegare, senza fare calcoli, perché l'insieme S delle soluzioni dell'equazione $x+2y-z+t=0$ è un sottospazio di \mathbb{R}^4 . Determinare la dimensione e una base di S .

- 4) Date le rette $r: \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + y - 2z - 1 = 0 \end{cases}$ ed $s: \begin{cases} x - y - z - 1 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$ e il punto $P \equiv (1,1,2)$ determinare:

a) Le equazioni parametriche e cartesiane della retta t per P ortogonale sia ad r che ad s ;

b) L'equazione del piano α per P parallelo sia ad r che ad s .

13 dicembre 2016

Cognome:

Numero di matricola:

- 1) Dato un sottoinsieme $X = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ di uno spazio vettoriale V dire quando i vettori si dicono linearmente dipendenti, quando indipendenti, definire $L(X)$, dire quando X si dice una base di V e come si definisce la dimensione di V .
- 2) Sia X un sottoinsieme di uno spazio vettoriale euclideo V , definire il complemento ortogonale X^\perp di X .
- 3) Sia $U = \{(x,y) : y=1\}$, Stabilire se U è un sottospazio di \mathbb{R}^2 .
- 4) Sia $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$, definire $r(A)$, spazio delle righe di A , applicazione matriciale f_A .
- 5) Calcolare il determinante della matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ e il complemento algebrico A_{12} , stabilire se A è invertibile e se lo spazio delle righe di A è \mathbb{R}^4 .
- 6) Dati i vettori $u_1 = (1,0,1,-1)$, $u_2 = (2,1,3,-2)$, $u_3 = (0,1,1,0)$ e $U = L(u_1, u_2, u_3)$ determinare:
 - a) Se i vettori sono linearmente dipendenti o indipendenti, se sono una base di \mathbb{R}^4 ;
 - b) Quali sono i vettori di \mathbb{R}^4 che appartengono a U (ovvero il sottospazio $L(u_1, u_2, u_3)$);
 - c) La dimensione e una base di U ;
 - d) Una base B di \mathbb{R}^4 che contiene i vettori u_1, u_2 e le coordinate di u_2 rispetto a B ;
 - e) Una base B di \mathbb{R}^4 che contiene i vettori u_1, u_2, u_3 ;
 - f) Il rango della matrice A avente i vettori dati come vettori riga;
 - g) Dopo aver determinato l'applicazione matriciale f_A , calcolare $f_A(1,0,1,1)$, $f_A^{-1}(0,0,1)$, la dimensione e una base di $\text{Im } f_A$.
 - h) La dimensione e una base del complemento ortogonale di U .

MOTIVARE TUTTE LE RISPOSTE

- 7) Dato il piano $\alpha : x + y - z + 1 = 0$ e il punto $P \equiv (1,1,0)$ determinare:
 - a) Le equazioni parametriche e cartesiane della retta per P ortogonale ad α ;
 - b) La distanza di P da α ;
 - c) L'equazione del piano β per P parallelo ad α ;
 - d) Le equazioni della retta t per P parallela ad α e al piano xy .

(*) Facoltativo: Dimostrare che il complemento ortogonale di X è un sottospazio vettoriale di V e che l'applicazione matriciale f_A è lineare.

15 marzo 2015

Cognome:

n.m.

- 1) Dato il punto $P \equiv (-2, 1, 1)$ e le rette $r: \begin{cases} x - z = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$ ed $s: \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$, verificare che r ed s sono sghembe e determinare:
- Il piano α che contiene r e P ;
 - Il piano β che contiene r ed è parallelo ad s ;
 - Le equazioni della retta t per P parallela ad r ;
 - Le equazioni di una retta t' per P ortogonale ad r ;
 - Definire un fascio di piani ed dire come si determina la sua equazione.
 - Enunciare e dimostrare le condizioni di parallelismo e ortogonalità tra retta e piano.
- 2) Dare la definizione di insieme di generatori e base di uno spazio vettoriale V . Dire che cosa si intende per coordinate di un vettore rispetto ad una base. Verificare che $B = \{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (1, 1, 2)\}$ è una base di \mathbb{R}^3 , motivando la risposta, e determinare le coordinate del vettore $(5, 3, -1)$ rispetto a B .
- 3) a) Dare la definizione di applicazione lineare f tra due spazi vettoriali V e W , definire $\text{Ker } f$ e $\text{Im } f$. b) Studiare l'endomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito da $f(x, y, z) = (x+y, 3x+3y, 7x+2z)$, stabilire se $(1, 3, 2)$ appartiene a $\text{Im } f$.
- b) verificare se la matrice A associata ad f è diagonalizzabile, ed in caso di risposta affermativa, diagonalizzarla.
- 4) Dato il vettore $v = (1, 2, 1)$, determinare l'insieme S dei vettori di \mathbb{R}^3 ortogonali a v , spiegare perché S è un sottospazio di \mathbb{R}^3 , determinare la dimensione e una base di S .

15 marzo 2016

Cognome:

n.m.

TEORIA

- 1) Dimostrare che la somma di due sottospazi è il più piccolo sottospazio che contiene entrambi.
- 2) Dimostrare che un insieme di vettori è linearmente dipendente se e solo se un vettore è combinazione lineare dei rimanenti.
- 3) Dimostrare che un insieme ortogonale che non contiene il vettore nullo è linearmente indipendente.
- 4) Dimostrare che se una matrice A quadrata di ordine n è invertibile allora $|A| \neq 0$.
- 5) Dimostrare che ogni piano dello spazio si rappresenta mediante una equazione del tipo $ax+by+cz+d=0$.

15 novembre 2016

Cognome:

numero matricola:

- 1) Nell'anello $Z_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dei resti modulo 7
- Risolvere l'equazione $2x=1$;
 - Determinare, se esiste, l'inverso di 4.
- 2) Sia $X = \{(1, 1, 1), (1, 2, 0), (2, 1, 3)\}$. Stabilire se:
- X è linearmente indipendente o linearmente dipendente, usando la definizione;
 - X è linearmente dipendente o indipendente, usando le trasformazioni elementari;
 - X è un insieme di generatori di R^3 ;
 - X è una base di R^3 ;
 - Stabilire quali sono i vettori (a, b, c) di R^3 che appartengono a $L(X)$.
Giustificare in modo chiaro tutte le risposte.
- 3) Data la matrice $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- Verificare che C è invertibile, determinare l'inversa di C e fare la verifica;
 - Sia $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{M}_n : CA = AC\}$, verificare che \mathcal{A} è un sottospazio di \mathcal{M}_n , determinare una base B e la dimensione di \mathcal{A} (spiegare perché B è una base).
- 4) Trovare una soluzione particolare e l'insieme S delle soluzioni del sistema lineare:
- $$\begin{cases} x + y - z + t = 0 \\ 2x + 3y + z - 2t = 0 \\ 4x + 5y - z = 0 \end{cases}$$
- 5) Dare la definizione di rango, spazio delle righe e spazio delle colonne di una matrice. Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -1 & h \end{bmatrix}$ determinare:
- il rango di A ;
 - la dimensione e una base dello spazio delle righe di A ;
 - la dimensione e una base dello spazio delle colonne di A .
- Giustificare tutte le risposte.
- 6) Spiegare perché $\dim R^2 = 2$.

16 febbraio 2016, Gestionali

Cognome:

n.m.:

- 1) Verificare che $X = \{(1,0,0), (0,1,-1), (0,1,1)\}$ è una base di \mathbb{R}^3 , e determinare
 - a) le coordinate del generico vettore (a,b,c) di \mathbb{R}^3 rispetto alla base X .
 - b) Le coordinate del vettore $(1,2,0)$ rispetto a X .

- 2) Dato il vettore $\mathbf{v} = (1,1,0,2)$ di \mathbb{R}^4 , determinare:
 - a) L'insieme S dei vettori di \mathbb{R}^4 ortogonali a \mathbf{v} ;
 - b) Una base ortogonale B di \mathbb{R}^4 contenente il vettore \mathbf{v} , spiegare poi perché B è una base di \mathbb{R}^4 .

- 3) Sia $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
 - a) determinare $\text{Ker } f_A$, $\text{Im } f_A$ e dimostrare che sono sottospazi complementari di \mathbb{R}^4 .
 - b) diagonalizzare A .

- 4) Data la retta $r: \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ 2x + y - 3z + 2 = 0 \end{cases}$ determinare:
 - a) Un punto $A \in r$ e un punto $B \notin r$;
 - b) Le equazioni parametriche e cartesiane di una retta s per B perpendicolare ad r ;
 - c) I coseni direttori di r orientata in modo da formare un angolo acuto con l'asse x ;
 - d) Il piano α che contiene r e B ;
 - e) L'equazione del piano β per B parallelo ad r e all'asse x .

18 febbraio 2016, ore 11.45, aerospaziali

Cognome:

n.m.:

- 1) Determinare una base B di \mathbb{R}^3 che contiene il vettore $(1,0,1)$, spiegare perché B è una base di \mathbb{R}^3 , determinare le coordinate del vettore $(0,1,1)$ rispetto a B , le coordinate del generico vettore (a,b,c) di \mathbb{R}^3 rispetto a B .
- 2) Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
 - a) Stabilire se l'applicazione matriciale f_A è iniettiva o suriettiva, motivando le risposte;
 - b) Determinare una matrice invertibile E tale che $E^{-1}AE$ sia diagonale ed eseguire la verifica.
 - c) Dopo aver definito il rango di una matrice determinare $r(A)$, motivando in modo chiaro la risposta.
 - d) Scelto a piacere un autovettore di A dimostrare che è anche un autovettore della matrice $3A-I$.
- 3) Determinare la dimensione e una base dello spazio S delle soluzioni dell'equazione $x+y-z-t=0$. Determinare un complementare T di S .
- 4) Dare la definizione di spazio vettoriale su un campo. Fare un esempio algebrico e un esempio geometrico di spazio vettoriale reale.
- 5) Dati la retta $r: \begin{cases} x = 1 + z \\ y = 2 - z \end{cases}$ e il punto $P \equiv (1,1,2)$ determinare:
 - a) L'equazione del piano α per P ortogonale ad r ;
 - b) L'equazione del piano β che contiene r e P ;
 - c) Le equazioni parametriche e cartesiane della retta per P ortogonale ed incidente r ;
 - d) La distanza di P da r ;
 - e) I coseni direttori di r orientata in modo da formare un angolo ottuso coll'asse x .

18 febbraio 2016 ore 16

Cognome:

Matricola:

- 1) Dati i vettori $\mathbf{u}_1=(1,0,1,-1)$, $\mathbf{u}_2=(2,1,3,-2)$, $\mathbf{u}_3=(0,1,1,0)$ e il sottospazio $U = L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ determinare:
- Se i vettori sono linearmente dipendenti o indipendenti;
 - La dimensione e una base di U ;
 - Una base B di \mathbb{R}^4 che contiene i vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ e le coordinate del vettore \mathbf{u}_2 rispetto a B ;
 - Il rango della matrice A che ha per colonne i vettori dati;
 - La dimensione e una base di $\text{Im } f_A$;
 - La dimensione e una base del complemento ortogonale di U .
- Motivare brevemente le risposte.

- 2) Sia S lo spazio delle soluzioni del sistema $\begin{cases} x - y + 2z - t = 0 \\ 3x - 4y + z + t = 0 \end{cases}$ e T lo spazio delle soluzioni dell'equazione $x+y+z+t=0$. Determinare la dimensione e una base di S , T , $S \cap T$, $S+T$.

- 3) Determinare $r(A)$ al variare di h in \mathbb{R} , motivando la risposta

$$A = \begin{bmatrix} h & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & h \end{bmatrix}$$

- 4) Stabilire per quale valore di k il seguente sistema è di Cramer:

$$\begin{cases} 2x - y - z = k \\ (k+1)x + y + z = k \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

- 5) Dati i punti $A \equiv (1,1,2)$ e $B \equiv (2,1,-1)$ determinare:

- Le equazioni parametriche e cartesiane della retta r per A e B ;
- L'equazione di un piano α parallelo ad r ;
- Le equazioni parametriche e cartesiane di una retta per l'origine perpendicolare ad r e all'asse y ;
- L'angolo che la retta forma con l'asse y .

18 maggio 2016, prof. A. D'Aniello

Cognome:

matricola:

- 1) Dato l'insieme $X = \{ (1,0,1), (0,1,0), (1,1,-1) \}$
 - a) Verificare che X è una base di \mathbb{R}^3 (giustificare le risposte); (2 punti)
 - b) Determinare le coordinate del vettore $(2,6,4)$ rispetto alla base X ; (1 punto)
 - c) Determinare le coordinate del generico vettore (a,b,c) di \mathbb{R}^3 rispetto ad X ; (1 punto)
 - d) Dire quanto vale il rango della matrice A che ha per colonne i vettori di X , giustificando la risposta; (1 punto)
 - e) Dire se A è invertibile e, in caso di risposta affermativa, calcolare l'inversa di A ed eseguire la verifica. (2 punti)

7 punti
- 2) Dato l'insieme $X = \{ (2,0,-1,0) \text{ e } (1,0,2,1) \}$;
 - a) Determinare una base ortogonale di \mathbb{R}^4 che contiene l'insieme X ; (2 punti)
 - b) Determinare la dimensione e una base del complemento ortogonale di X ; (2 punti)

4 punti
- 3) Determinare la dimensione e una base dello spazio S delle soluzioni dell'equazione $x-y+z-t=0$; (2 punti)
- 4) Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ determinare la applicazione matriciale f_A , la dimensione e una base di $\text{Ker } f_A$ e $\text{Im } f_A$, dire se f_A è suriettiva motivando la risposta. (2 punti)
- 5) Dato il piano $\alpha: x-2y+z-3=0$, determinare:
 - a) Le equazioni parametriche o cartesiane di una retta r di α ; (1 punto)
 - b) Le equazioni parametriche e cartesiane di una retta s parallela ad r e non contenuta in α ; (1 punto)
 - c) L'equazione di un piano β per l'origine ortogonale ad α ; (1 punto)

19-01-2016

Cognome:

Matricola:

- 1) Dato l'insieme $X = \{(1,1,-1,2), (0,1,-1,0), (1,-1,1,2)\}$, determinare
- se X è linearmente dipendente o indipendente;
 - la dimensione e una base B_1 del sottospazio $U = L(X)$;
 - quali sono i vettori (a,b,c,d) di \mathbb{R}^4 che appartengono ad U ;
 - una base ortogonale B_2 di U ;
 - una base ortogonale B di \mathbb{R}^4 che contiene B_2 ;
 - una base B di \mathbb{R}^4 che contiene B_1 ;
 - il rango della matrice A che ha per colonne i vettori di X usando il teorema degli orlati;
 - Dominio, codominio, equazioni della applicazione matriciale f_A , la dimensione e una base di $\text{Ker } f_A$ e $\text{Im } f_A$.

- 2) (facoltativo) Verificare che la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ è invertibile e calcolare l'inversa.

- 3) (facoltativo) Stabilire se $U = \{(h, h^2) : h \in \mathbb{R}\}$ è un sottospazio di \mathbb{R}^2 , motivando la risposta.

- 4) Date le rette $r: \begin{cases} 3x - y - 2z - 3 = 0 \\ x + y - 2z - 1 = 0 \end{cases}$ ed $s: \begin{cases} x - y - z - 1 = 0 \\ 2x - y - 3z + h = 0 \end{cases}$ verificare che le rette sono coplanari solo per $h = -2$. Posto poi $h = -2$ determinare:
- l'equazione del piano α che le contiene;
 - l'equazione del piano β che contiene r ed è ortogonale ad s ;
 - se r ed s sono incidenti o parallele;
 - le equazioni parametriche e cartesiane della retta t per l'origine ortogonale sia ad r che ad s ;
 - supponiamo di voler fissare un riferimento cartesiano $C' = (O', B')$ di Σ in cui l'asse delle ascisse coincida con la retta r . Cosa dobbiamo fare?

- 5) In che secolo è vissuto Galileo Galilei?

19 luglio 2016 ESERCIZI

Cognome:

matricola:

- 1) Sia $U_1 = L((0,1,1), (1,1,0))$ e $U_2 = L((1,2,1), (0,0,1))$ sottospazi di \mathbb{R}^3 , determinare la dimensione e una base di U_1 , U_2 , $U_1 \cap U_2$ e $U_1 + U_2$. Giustificare le risposte e il procedimento.
- 2) Dati i vettori $v_1 = (-1, 1, 1, 0)$, $v_2 = (1, 0, -1, 0)$, $v_3 = (0, 1, 0, 0)$, $v_4 = (-1, 1, 1, 1)$
 - a) Stabilire se sono un insieme di generatori di \mathbb{R}^4 ;
 - b) Verificare che sono linearmente dipendenti usando la definizione;
 - c) Determinare un vettore che è combinazione lineare dei rimanenti e secondo quali scalari.
 - d) Determinare il rango (e una base dello spazio delle righe) della matrice che ha per righe i vettori dati.
 - e) Motivare tutte le risposte.
- 3) Verificare che $B = \{(1, 1, -1), (-1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$ è una base di \mathbb{R}^3 , determinare le coordinate del generico vettore (a, b, c) di \mathbb{R}^3 rispetto alla base B , determinare le coordinate del vettore $(0, 0, 2)$ rispetto alla base B .
- 4) Determinare una base ortogonale B di \mathbb{R}^4 che contiene il vettore $(1, 1, 1, 0)$, spiegare perché B è ortogonale e perché è una base. Determinare $\{(1, 1, 1, 0)\}^\perp$, la dimensione e una base.
- 5) Sia $A = \begin{bmatrix} 2 & k \\ k & 2 \end{bmatrix}$,
 - a) verificare che $f_A(x, y) = (2x + ky, kx + y)$
 - b) stabilire per quali valori di k f_A è iniettiva;
 - c) stabilire per quali valori di k f_A è suriettiva;
 - d) determinare la dimensione e una base di $\text{Ker } f_A$ e $\text{Im } f_A$, al variare di k in \mathbb{R} .
(In caso di difficoltà fare l'esercizio ponendo $k = -2$)
- 6) Dati i punti $A \equiv (1, 0, 0)$, $B \equiv (1, 1, 0)$ e $C \equiv (1, 1, 1)$
 - a) Verificare che A , B e C non sono allineati;
 - b) Determinare l'equazione del piano α per i punti A , B e C ;
 - c) Le equazioni parametriche e cartesiane della retta r per i punti A e C ;
 - d) Determinare i coseni direttori di r e l'angolo che la retta forma con l'asse x .
- 7) Classificare la conica $\gamma: x^2 + 2y^2 + 2xy + 2x + 2y = 0$ e determinare l'equazione della tangente a γ nell'origine.

22 giugno 2016

Cognome:

Matricola:

- 1) Sia $Z_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ l'anello degli interi modulo 7, determinare $4+3$, $5+6$, $3 \cdot 4$, l'opposto e l'inverso di 2.
- 2) Sia $S = L((1, 1, -1), (2, -1, 4))$ e T l'insieme delle soluzioni del sistema lineare
$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 3x + 5y + 2z = 0 \end{cases}$$
 - a) Stabilire per quali valori di a, b, c il vettore (a, b, c) di \mathbb{R}^3 appartiene ad S .
 - b) Spiegare perché T è un sottospazio, determinare la dimensione e una base di T .
 - c) Verificare che S e T sono sottospazi complementari di \mathbb{R}^3 .
- 3) Stabilire per quali valori di h la matrice A è invertibile,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & h \end{bmatrix}$$

Posto $h=2$

- a) Determinare l'inversa di A ed eseguire la verifica.
- b) Stabilire se l'applicazione matriciale f_A è suriettiva, motivando la risposta.
- 4) Verificare che i vettori $(1, 1)$ e $(2, -1)$ sono autovettori della matrice $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, spiegare perché da questo segue che A è diagonalizzabile.
- 5) Dimostrare che l'insieme $B = \{(1, 1), (1, -1)\}$ è una base di \mathbb{R}^2 motivando la risposta.
 - a) Determinare le coordinate del vettore $(2, 4)$ rispetto alla base B .
 - b) Le coordinate del generico vettore (a, b) di \mathbb{R}^2 rispetto alla base B .
- 6) Dati i piani $\alpha: x+y-z+2=0$ e $\beta: 2x+3y-z+1=0$ e il punto $P \equiv (2, 0, 1)$ determinare:
 - a) Le equazioni parametriche e cartesiane della retta per P ortogonale ad α ;
 - b) Le equazioni parametriche e cartesiane della retta s per P parallela sia ad α che a β ;
 - c) La distanza di P da α .
 - d) I coseni direttori di r orientata in modo da formare un angolo acuto con l'asse z .

Edile-Architettura : prova del 25 gennaio 2016

Cognome:

matricola:

- 1) Fare un esempio di anello infinito che non è un campo.
- 2) Fare un esempio di anello finito che non è un campo.
- 3) Dato l'anello $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ calcolare $4+3$ e $4 \cdot 3$, determinare l'inverso e l'opposto di 2.
- 4) Determinare l'insieme S delle soluzioni e una soluzione particolare dell'equazione $x+2y-z=0$.
(Spiegare perché S è un sottospazio di \mathbb{R}^3 , determinare la dimensione e una base di S)
- 5) Stabilire per quale valore di h il vettore $\mathbf{v} = (1,1,0,3)$ è una soluzione dell'equazione $x+hy-z+t=0$.
- 6) Determinare l'insieme S delle soluzioni, una soluzione particolare e il numero delle soluzioni del sistema lineare omogeneo
$$\begin{cases} x + y - z + t = 0 \\ 2x + 3y + 2z - t = 0 \end{cases}$$
- 7) Determinare l'insieme S delle soluzioni, una soluzione particolare e il numero delle soluzioni del sistema
$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$
 - a) nelle incognite x e y
 - b) nelle incognite x , y e z
 - c) nelle incognite x , y , z e t
- 8) Sia $X = \{(1,2,1), (1,3,0), (-1,2,-5)\}$. Stabilire se $\mathbf{v}=(1,7,2)$ è combinazione lineare dei vettori di X .
- 9) Sia $X = \{(1,1,2), (2,1,1), (4,3,h)\}$. Stabilire:
 - a) Per quali valori di h X è linearmente dipendente;
 - b) Per quali valori di h X è una base di \mathbb{R}^3 ;
 - c) Il rango della matrice A che ha per righe i vettori di X ;
 - d) La dimensione e una base di $L(X)$;
 - e) La dimensione e una base dello spazio delle righe di A .
- 10) Sia $B = \{(1,1), (1,0)\}$, verificare che B è una base di \mathbb{R}^2 , determinare le coordinate del generico vettore (a,b) di \mathbb{R}^2 rispetto a B .
- 11) Sia $X = \{(1,1,0), (2,1,1), (1,2,-1)\}$, stabilire quali sono i vettori (a,b,c) di \mathbb{R}^3 che appartengono a $L(X)$.
- 12) Sia $X = \{(1,0,0,2), (1,1,-1,2), (0,-2,2,0)\}$, stabilire quali sono i vettori (a,b,c,d) di \mathbb{R}^4 che appartengono a $L(X)$.
- 13) Sia $X = \{(1,0,0,2), (1,1,-1,2), (2,1,0,4)\}$. Stabilire se X è linearmente dipendente o indipendente usando la definizione. Determinare, senza fare calcoli il rango della matrice A che ha per righe i vettori di X .
- 14) Determinare una base B di \mathbb{R}^3 che contiene il vettore $\mathbf{v}_1 = (1,2,1)$ e le coordinate del vettore $\mathbf{v} = (-2,-4,-2)$ rispetto a B .
- 15) Spiegare perché $\dim \mathbb{R}^2=2$.

25 maggio 2016 edili architettura

Cognome:

matricola:

- 1) Dato il sistema lineare dipendente dal parametro
- a
- :

$$\begin{cases} x + z = -1 \\ 2x + 2y = a \\ 3x + 4y - z = -a^2 \end{cases}$$

- Determinare l'unico valore di a per cui il sistema è compatibile.
- Assegnato ad a il valore trovato determinare una soluzione particolare, la generica soluzione e l'insieme S delle soluzioni del sistema ottenuto;
- Dire, senza fare calcoli, se S è un sottospazio di \mathbb{R}^3 motivando la risposta.

~ 4 punti

- 2) Sia
- $S = L((2,1,1), (1,1,0))$
- e
- T
- l'insieme delle soluzioni dell'equazione lineare omogenea
- $x-y+3z=0$
- .

- Stabilire quali sono i vettori (a,b,c) di \mathbb{R}^3 che appartengono ad S ;
- Determinare la dimensione e una base di S e T .
- Determinare la dimensione e una base di $S+T$ e $S \cap T$.
- Stabilire se S e T sono supplementari o complementari.
- Determinare una base B di \mathbb{R}^3 che contiene i vettori $(1,1,0)$ e $(2,1,1)$, un complementare S' di S , e le coordinate del vettore $(3,2,1)$ rispetto alla base B .
Motivare in modo chiaro tutte le risposte.

~ 6 punti

- 3) Sia
- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$
- ed
- $f_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$
- l'applicazione matriciale definita da
- A
- .

- Determinare $f_A(x,y,z)$, $f_A(1,1,0)$, la dimensione e una base di $\text{Ker } f_A$ e $\text{Im } f_A$.
- Stabilire se f_A è iniettiva o suriettiva.

Motivare tutti i procedimenti e le risposte.

~ 3 punti

- 4) Data la retta
- $r: \begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$
- e il punto
- $P \equiv (1,1,0)$
- determinare:

- L'equazione del piano α che contiene r e P ;
- Le equazioni parametriche e cartesiane della retta per P ortogonale ad α ;
- La distanza del punto $A \equiv (2,0,1)$ dal piano α .

~ 3 punti

6 aprile 2016, prova in itinere, Edili-Architettura

- 1) Sia $X = \{(1,1,0), (1,0,1), (1,-1,0)\}$ un sottoinsieme di \mathbb{R}^3 .
- Verificare che X è un insieme di generatori di \mathbb{R}^3 usando la definizione (1 punto);
 - Verificare che X è linearmente indipendente usando la definizione (1 punto);
 - Determinare le coordinate di $v = (0,3,1)$ rispetto a X (1 punto);
 - Verificare che i vettori di X sono autovettori della matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (1 punto);
 - Spiegare perché A è diagonalizzabile (1 punto).
 - Diagonalizzare A (3 punti).
- 2) Dati i vettori $v = (1,2,1)$ e $w = (2,3,1)$
- determinare l'insieme dei vettori S di \mathbb{R}^3 ortogonali sia a v che a w . Spiegare perché S è un sottospazio di \mathbb{R}^3 , determinare la dimensione e una base di S (2 punti).
 - Sia $T = L(v,w)$, verificare che S e T sono sottospazi complementari di \mathbb{R}^3 (2 punti).

3) Sia $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & h & 3 & 0 \\ 0 & 0 & h-4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & h-3 \end{bmatrix}$.

- Calcolare $|A|$ (1 punto);
- $r(A)$ al variare di h in \mathbb{R} (2 punti);
- stabilire per quali valori di h A è invertibile (1 punto).

MOTIVARE BREVEMENTE TUTTE LE RISPOSTE