DEF. MATRICE COMPLETA DI UN SISTEMA LINEARE

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \text{ MATRICE COMPLETA}$$

MATRICE DEI COEFFICIENTI | VETTORE COLONNA DEI TERMINI NOTI

DEF. MATRICE A SCALINI: $\forall$ RIGA NULLA, TUTTE LE RIGHE AD ESSA SOTTOSTANTI SONO NULLE E $\forall$ PRIMO ELEMENTO NON NULLO DI OGNI RIGA, TUTTI GLI ELEMENTI SOTTOSTANTI AD ESSO E AGLI ZERI CHE LO PRECEDONO SONO NULLI

DEF. PIVOT: IL PRIMO ELEMENTO NON NULLO DI UNA RIGA DI UNA MATRICE A SCALINI

DEF. SISTEMA A SCALINI: LA SUA MATRICE COMPLETA È A SCALINI

Th DI GAUSS: OGNI MATRICE A PUÒ ESSERE RIDOTTA AD UNA MATRICE A SCALINI $\tilde{A}$ MEDIANTE UN NUMERO FINITO DI OPERAZIONI ELEMENTARI SULLE RIGHE (SCAMBIO, SOMMA, MOLTIPLICAZIONE PER SCALARE) (E QUINDI $A \sim \tilde{A}$)

COROLLARIO: OGNI SISTEMA LINEARE È EQUIVALENTE AD UN SISTEMA LINEARE A SCALINI (OVVERO HANNO LO STESSO INSIEME SOLUZIONE)

Th DATO S UN SISTEMA LINEARE A SCALINI DI m EQUAZIONI IN n INCOGNITE CON MATRICE COMPLETA A' ED r NUMERO DEI PIVOT DI A' ALLORA:
- S È COMPATIBILE $\iff$ L'ULTIMO PIVOT DI A' NON APPARTIENE ALLA COLONNA DEI TERMINI NOTI
- S COMPATIBILE AMMETTE UN'UNICA SOLUZIONE $\iff n=r$
- S COMPATIBILE AMMETTE ∞^{n-r} SOLUZIONI $\iff r<n$

SOMMA DI MATRICI: DATE $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ $\quad A+B=(a_{ij}+b_{ij})$

PROPRIETÀ: ASSOCIATIVA, COMMUTATIVA, ESISTENZA DELLO ZERO E DELL'OPPOSTO

MOLTIPLICAZIONE DI UNA MATRICE PER UNO SCALARE: $A=(a_{ij})$, $k\in\mathbb{R}$ $\quad kA=(ka_{ij})$

PROPRIETÀ: $\forall A,B \in Mat_{p\times q}$: $h(kA)=(hk)A$, $(h+k)A=hA+kA$
$h(A+B)=hA+hB$, $1A=A$, $(-1)A=-A$, $0A=0$

COMBINAZIONE LINEARE DI MATRICI: $a_1A_1+a_2A_2+\dots+a_nA_n$ $\quad A_1,\dots,A_n\in Mat(p\times q)$, $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$

PRODOTTO DI MATRICI (RIGHE PER COLONNE): $A\in Mat_{m\times n}$ E $B\in Mat_{n\times p}$ $\quad (A\times B)\in Mat_{m\times p}$

L'ELEMENTO DI POSTO (i,j) DELLA MATRICE $A\times B$ È IL PRODOTTO DELLA i-ESIMA RIGA DI A PER LA j-ESIMA COLONNA DI B.

Es $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f\end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix} g & l \\ h & m \\ i & n\end{pmatrix}$ $\quad A\times B=\begin{pmatrix} ag+bh+ci & al+bm+cn \\ dg+eh+fi & dl+em+fn\end{pmatrix}$ n° RIGHE DI A E n° COLONNE DI B

PROPRIETÀ: ASSOCIATIVA, DISTRIBUTIVA, ESISTENZA DEGLI ELEMENTI NEUTRO E "NULLO"
<u>NON VALE LA PROPRIETÀ COMMUTATIVA</u>

MATRICE IDEANTITÀ $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1\end{pmatrix}$ $\quad AI=A=IA$ $\qquad$ MATRICE NULLA $O=\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0\end{pmatrix}$

MATRICE OPPOSTA: $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ $\quad -A=\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d\end{pmatrix}$ $\quad A+(-A)=O$

LEGGE DI CANCELLAZIONE: $AB=AC \iff B=C$, $A\neq O$

EQUIVALENZA: $A\sim B \iff$ UNA MATRICE È OTTENUTA DALL'ALTRA MEDIANTE UN NUMERO FINITO DI OPERAZIONI ELEMENTARI SULLE RIGHE

PROPRIETÀ: RIFLESSIVA, SIMMETRICA, TRANSITIVA

MATRICI QUADRATE DI ORDINE n: $A \in Mat_{n \times n}$

MATRICE TRASPOSTA: $A(a_{ij}) \rightarrow A^t(a_{ji})$ Es. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^t \Rightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

MATRICE SIMMETRICA: $A = A^t$ Es.: $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ MATRICE ANTISIMMETRICA: $A = -A^t$ Es.: $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$

OGNI MATRICE SI PUÒ ESPRIMERE COME SOMMA DI UNA SIMMETRICA E DI UNA ANTISIMMETRICA

$$A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t)$$

DETERMINANTE DI UNA MATRICE 2x2: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\det A = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

MATRICE AGGIUNTA: SIANO $A \in Mat_{n \times n}$ E $a_{ij} \in A$; LA MATRICE AGGIUNTA A_{ij} DI a_{ij} È LA MATRICE QUADRATA DI ORDINE $n-1$ OTTENUTA DA A SOPPRIMENDO LA i-ESIMA RIGA E LA j-ESIMA COLONNA

COMPLEMENTO ALGEBRICO: $\bar{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det A_{ij}$ (MATRICE AGGIUNTA) MATRICE DEI COMPLEMENTI ALGEBRICI: $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$

TH DI LAPLACE: $A \in Mat_{n \times n}$ a) $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det A_{kj} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \bar{a}_{kj}$ (SVILUPPO LUNGO LA k-ESIMA RIGA)

$\forall k = 1, \dots, n$
$\forall h = 1, \dots, n$ b) $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+h} a_{jh} \det A_{jh} = \sum_{j=1}^{n} a_{jh} \bar{a}_{jh}$ (SVILUPPO LUNGO LA h-ESIMA COLONNA)

NB: IL $\det A$ <u>NON DIPENDE DAL VETTORE</u> LUNGO IL QUALE VIENE CALCOLATO (IMPORTANZA DEL TH DI LAPLACE)

PROPRIETÀ DEL DETERMINANTE: $\det A = \det(A^t)$

$\det(A+B) \neq \det A + \det B$

FORMULA DI BINET: $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

A HA UN VETTORE NULLO $\Rightarrow \det A = 0$

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$ MATRICE TRIANGOLARE SUPERIORE

$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ MATRICE TRIANGOLARE INFERIORE

$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$ MATRICE DIAGONALE

A TRIANGOLARE (O DIAGONALE) $\Rightarrow \det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ij}$, $i=j$ (PRODOTTO DEGLI ELEMENTI SULLA DIAGONALE)

DETERMINANTE DI MATRICI EQUIVALENTI: SCAMBIO: $\det \tilde{A} = -\det A$
COMBINAZIONE LINEARE DI RIGHE $\Rightarrow \det \tilde{A} = \det A$
MOLTIPLICAZIONE DI UN VETTORE PER UNO SCALARE $\det \tilde{A} = k \det A$
$\det(kA) = k^n \det A$

CALCOLO DEL $\det A$ MEDIANTE ALGORITMO DI GAUSS: $\det \tilde{A} = 0 \Leftrightarrow \det A = 0$

$\tilde{A} \sim A$ (A SCALINI, SENZA MOLTIPLICAZIONI PER k) $\det A = (-1)^s \det \tilde{A}$ ($\tilde{A}$ MATRICE A SCALINI EQUIVALENTE AD A), s = NUMERO DEGLI SCAMBI DI RIGA

MATRICE INVERSA A^{-1}: A INVERTIBILE $\Leftrightarrow \exists! A^{-1} \mid AA^{-1} = A^{-1}A = I \Leftrightarrow \det A \neq 0$ NB: $A \in Mat_{n \times n}$

$A^{-1} = \dfrac{\bar{A}^t}{|A|}$ ← MATRICE DEI COMPLEMENTI ALGEBRICI DEGLI ELEMENTI DI A, TRASPOSTA; $|A|$ ← $\det A$

$A \in Mat_{2 \times 2} \Rightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

NB: $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

FORMA MATRICIALE DI UN SISTEMA LINEARE DI n EQUAZIONI IN n INCOGNITE

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow AX = B$$

A: MATRICE DEI COEFFICIENTI; B: VETTORE COLONNA DEI TERMINI NOTI; X: VETTORE COLONNA DELLE INCOGNITE; $AX = B$ ← FORMA MATRICIALE DI S

TH DI CRAMER: $S: AX = B$, $A \in Mat_{n \times n}$, $\det A \neq 0 \Rightarrow X = A^{-1}B \wedge x_i = \dfrac{\det A(i)}{\det A}$, $i = 1, \dots, n$

$A(i)$ OTTENUTA DA A SOSTITUENDO B ALLA i-ESIMA COLONNA

SISTEMA CRAMERIANO: $S: AX = B \mid A \in Mat_{n \times n} \wedge \det A \neq 0$

MINORE DI UNA MATRICE A: UNA SOTTOMATRICE QUADRATA DI A OTTENUTA INTERSECANDONE n RIGHE ED n COLONNE

RANGO rkA: $rkA=p$, $A\in Mat_{m\times n} \Leftrightarrow \exists\, \mu\in Mat_{p\times p} \mid det_\mu \neq 0$ μ=MINORE DI A $\wedge\ \forall \mu \in Mat_{(p+1)\times(p+1)} : det_\mu = 0$ (SE $\exists\ \mu \in Mat_{(p+1)\times(p+1)}$)

NB: $rkA = rk(A^t)$ NB $rkA = n°(a_{ij}\neq 0,\ i=j)$, A MATRICE DIAGONALE

Th: $rk\tilde{A}=r$, $\tilde{A}$ MATRICE A SCALINI, r = n° PIVOT

NB $A\in Mat_{n\times n}$, $|A|\neq 0 \Leftrightarrow rkA=n$

Th DEGLI ORLATI: $A\in Mat_{m\times n}$, $M\in Mat_{p\times p}$ MINORE DI A, $|M|\neq 0$.
(PER TUTTI I MINORI DI ORDINE MAGGIORE A p CHE CONTENGONO M) $\forall M'$ MINORE ORLATO DI M, $|M'|=0 \Leftrightarrow rkA=p$

Th MATRICI EQUIVALENTI HANNO LO STESSO RANGO

COROLLARIO: $A\sim\tilde{A}$ (A SCALINI) $\Rightarrow rkA$ = n° PIVOT DI $\tilde{A}$ ($\Rightarrow$ CALCOLO DI rkA CON GAUSS: RIDUCO A AD $\tilde{A}$ A SCALINI. CONTO I PIVOT DI $\tilde{A}$)

Th DI ROUCHÉ-CAPELLI: SIA S UN SISTEMA LINEARE DI m EQUAZIONI IN n INCOGNITE CON A MATRICE DEI COEFFICIENTI E A' MATRICE COMPLETA:

- S COMPATIBILE $\Leftrightarrow rkA=rkA'=r$
- S AMMETTE UNA E UNA SOLA SOLUZIONE $\Leftrightarrow r=n$
- S AMMETTE ∞^{n-r} SOLUZIONI $\Leftrightarrow S$ COMPATIBILE $\wedge\ r<n$

Th EQUAZIONI SIGNIFICATIVE $\Updownarrow$ (NON OTTENIBILI DALLA SOMMA DELLE ALTRE EQUAZIONI): S COMPATIBILE ($rkA=rkA'=p$), $M\in Mat_{p\times p}$ MINORE DI A, $|M|\neq 0$:
$S\sim SR$ $\leftarrow$ SISTEMA RIDOTTO OTTENUTO CONSIDERANDO SOLO LE p EQUAZIONI CORRISPONDENTI A M
$\Updownarrow$
$Sol(S)=Sol(SR)$

SISTEMA LINEARE OMOGENEO S: I SUOI TERMINI NOTI SONO TUTTI NULLI $\Leftrightarrow S: AX=\underline{O}$ ($B=\underline{O}$ $\leftarrow$ VETTORE NULLO)
È SEMPRE COMPATIBILE

Th $S: AX=O$ DI m EQUAZIONI IN n INCOGNITE AMMETTE AUTOSOLUZIONI $\Leftrightarrow rkA<n$

COROLLARIO: $A\in Mat_{n\times n} \Rightarrow S$ AMMETTE AUTOSOLUZIONI $\Leftrightarrow detA=0$

COROLLARIO: $S: AX=O$ DI m EQUAZIONI IN n INCOGNITE: $m<n \Rightarrow S$ AMMETTE AUTOSOLUZIONI

NB: SE UN SISTEMA LINEARE OMOGENEO AMMETTE AUTOSOLUZIONI (SOLUZIONI $X\neq\underline{O}$), NE AMMETTE INFINITE

COMBINAZIONI LINEARI: $v_1,\dots,v_k\in \mathbb{R}^m$, $a_1,\dots,a_k\in\mathbb{R} \Rightarrow a_1v_1+a_2v_2+\dots+a_kv_k$ È IL VETTORE COMBINAZIONE LINEARE DI $v_1,\dots,v_k$ A COEFFICIENTI $a_1,\dots,a_k$

DIPENDENZA LINEARE: $v_1,\dots,v_k\in\mathbb{R}^m$ LINEARMENTE DIPENDENTI $\Leftrightarrow \exists$ UNA RELAZIONE DI DIPENDENZA LINEARE TRA DI ESSI, CIOÉ $\exists$ UNA COMB. LIN.: $a_1v_1+\dots+a_kv_k=0$ CON ALMENO UN $a_i\neq 0$

INDIPENDENZA LINEARE: $v_1,\dots,v_k\in\mathbb{R}^m$ LINEARMENTE INDIPENDENTI $\Leftrightarrow \nexists$ UNA RELAZIONE DI DIPENDENZA LINEARE TRA DI ESSI, CIOÉ $a_1v_1+a_2v_2+\dots+a_kv_k=0 \Leftrightarrow a_1=a_i=a_k=0$

CRITERIO DEL RANGO: $v_1,v_2,\dots,v_k\in\mathbb{R}^m$ LINEARMENTE INDIPENDENTI $\Leftrightarrow rkMat(v_1,v_2,\dots,v_k)=k$ $\leftarrow$ n° VETTORI (MATRICE OTTENUTA INCOLONNANDO I VETTORI DATI)

COROLLARIO: $v_1,v_2,\dots,v_n\in\mathbb{R}^n$ LINEARMENTE INDIPENDENTI $\Leftrightarrow det Mat(v_1,v_2,\dots,v_n)\neq 0$

INDIPENDENZA LINEARE DI RIGHE E COLONNE: $A\in Mat_{n\times k}$:
- COLONNE L.I. $\Leftrightarrow rkA=k$ $\leftarrow$ n° COLONNE
- RIGHE L.I. $\Leftrightarrow rkA=n$ $\leftarrow$ n° RIGHE
- $n=k$, I VETTORI DI A SONO L.I $\Leftrightarrow detA\neq 0$

NB: $v_1,v_2,\dots,v_k\in\mathbb{R}^m$, $k>m \Rightarrow v_1,v_2,\dots,v_k$ L.D.

v L.I. $\Leftrightarrow v\neq 0$; $v_1,\dots,v_i,\dots,v_k$, $v_i=0 \Rightarrow v_1,\dots,v_i,\dots,v_k$ L.D.; v_1,v_2 L.D. $\Leftrightarrow v_1=kv_2$ (SONO PROPORZIONALI)

$A=\{v_1,\dots,v_k\}$ L.I. $\Rightarrow$ OGNI SOTTOINSIEME DI A É L.I.

SPAZIO VETTORIALE: INSIEME NON VUOTO I CUI ELEMENTI SONO CHIAMATI VETTORI, DOTATO DELLE OPERAZIONI: SOMMA: $u+v \in V,\ u,v \in V$

PRODOTTO PER UNO SCALARE $kv \in V,\ k \in \mathbb{R},\ v \in V$

CHE RISPETTANO LE PROPRIETÀ:

Es: $-\mathbb{R}^n$
$-Mat_{m \times n}$
$-\mathbb{R}[x]$

ASSIOMI DI SPAZIO VETTORIALE:

1) $(u+v)+w = u+(v+w)\ \forall u,v,w \in V$ 2) $u+v = v+u\ \forall u,v \in V$

3) $\exists\, 0 \in V \mid v+0 = v\ \forall v \in V$ (VETTORE NULLO) 4) $\forall v \in V\ \exists!\, -v \mid v+(-v) = 0$ (OPPOSTO DI V)

5) $1v = v\ \forall v \in V$ 6) $h(kv) = (hk)v\ \forall h,k \in \mathbb{R},\ \forall v \in V$

7) $(h+k)v = hv+kv\ \forall h,k \in \mathbb{R},\ \forall v \in V$ 8) $h(u+v) = hu+hv\ \forall h \in \mathbb{R},\ \forall u,v \in V$

PRIME PROPRIETÀ: PROPOSIZIONE: $u+v = u+w \Leftrightarrow v = w\quad v,u,w \in V$
$u+v = u \Leftrightarrow v = 0$

PROPOSIZIONE: $0v = 0\ \forall v \in V$
$h0 = 0\ \forall h \in \mathbb{R}$
$(-1)v = -v\ \forall v \in V$

PROPOSIZIONE: $h \in \mathbb{R},\ v \in V,\ hv = 0 \Leftrightarrow h = 0 \vee v = 0$

GENERATORI: $v_1,\dots,v_k \in V$ DI $V \Leftrightarrow \forall v \in V,\ v = a_1v_1+\dots+a_kv_k$; $\{v_1,\dots,v_k\}$ INSIEME DI GENERATORI DI V

SPAZIO VETTORIALE FINITAMENTE GENERATO: AMMETTE UN INSIEME FINITO DI GENERATORI

NB: AGGIUNGENDO VETTORI AD UN INSIEME DI GENERATORI, SI OTTIENE ANCORA UN INSIEME DI GENERATORI

BASE: INSIEME FINITO DI VETTORI $\{v_1,\dots,v_k\}$ BASE DI $V \Leftrightarrow$ È UN INSIEME DI GENERATORI L.I.

Th $v_1,\dots,v_k$ FORMANO UNA BASE DI $V \Leftrightarrow \forall v \in V$, v SI SCRIVE IN MODO UNICO COME COMBINAZIONE LINEARE DI $v_1,\dots,v_k$

COORDINATE DI UN VETTORE v RISPETTO A UNA BASE $\mathcal{B}$: $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}$: $v = a_1v_1+\dots+a_kv_k$, $\mathcal{B} = \{v_1,\dots,v_k\}$

SOTTOSPAZIO: SOTTOINSIEME E DI UNO SPAZIO VETTORIALE V: $\underline{0} \in E$
(E CHIUSO RISPETTO ALLA SOMMA E AL PRODOTTO PER K) $\begin{cases} u+v \in E,\ u,v \in E \\ ku \in E,\ k \in \mathbb{R},\ u \in E \end{cases}$

NB OGNI SOTTOSPAZIO DI UNO SPAZIO VETTORIALE È ESSO STESSO UNO SPAZIO VETTORIALE

PROP. $E = Sol(S)$, S DI m EQUAZIONI IN n INCOGNITE $\Rightarrow E$ SOTTOSPAZIO DI $\mathbb{R}^n$

SOTTOSPAZIO GENERATO DA $v_1,\dots,v_k$: $V = L[v_1,\dots,v_k] = \{a_1v_1+\dots+a_kv_k : a_1,\dots,a_k \in \mathbb{R}\}$

PROP: $v_1,\dots,v_{k+1} \in V$: $L[v_1,\dots,v_k] \subseteq L[v_1,\dots,v_{k+1}]$
$L[v_1,\dots,v_k] = L[v_1,\dots,v_{k+1}] \Leftrightarrow v_{k+1} = a_1v_1+\dots+a_kv_k$

Th DI ESISTENZA DI UNA BASE: $V \neq \{0\}$ SPAZIO VETTORIALE FINITAMENTE GENERATO AMMETTE ALMENO UNA BASE

COROLLARIO: OGNI INSIEME DI GENERATORI CONTIENE UNA BASE

LEMMA: $v_1,\dots,v_m \in V$ L.I., $w_1,\dots,w_n \in V$ GENERANO $V \Rightarrow m \leq n$

PROP.: TUTTE LE BASI DI UNO SPAZIO VETTORIALE V HANNO LO STESSO NUMERO DI VETTORI

DIMENSIONE: NUMERO DEI VETTORI DI UNA BASE QUALSIASI DI UNO SPAZIO VETTORIALE V FINITAMENTE GENERATO

Th V SPAZIO VETTORIALE, $\dim V = n \Rightarrow \nexists$ PIÙ DI n VETTORI L.I.; k VETTORI NON POSSONO GENERARE V SE $k < n$;
n VETTORI L.I. SONO GENERATORI E FORMANO UNA BASE;
n GENERATORI SONO L.I. E FORMANO UNA BASE.

Th DEL COMPLETAMENTO DI UNA BASE: $v_1,\dots,v_k \in V$ L.I., $k < n = \dim V \Rightarrow \exists\ n-k$ VETTORI $w_1,\dots,w_{n-k}$: $v_1,\dots,v_k,w_1,\dots,w_{n-k}$ FORMANO UNA BASE DI V

LEMMA: $v_1,\dots,v_k$ L.I., $E = L[v_1,\dots,v_k]$, $w \notin E \Rightarrow v_1,\dots,v_k,w$ L.I.

PROP.: TUTTE LE BASI DI $\mathbb{R}^n$ SONO COMPOSTE DA n VETTORI; $v_1,\dots,v_n \in \mathbb{R}^n$ SONO UNA BASE $\Leftrightarrow \det Mat(v_1,\dots,v_n) \neq 0$

PROP: $\dim Mat_{m \times n} = mn$ $\mathcal{B} = \{$MATRICI ELEMENTARI$\}$ Es MAT. EL.: $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in Mat_{2 \times 2}$ PROP.: $\mathbb{R}[x]$ NON È FINITAMENTE GENERATO PROP $\dim \mathbb{R}^n[x] = n$ CON $\mathcal{B} = \{1, x, \dots, x^{n-1}\}$

PROP: V SPAZIO VETTORIALE, E SOTTOSPAZIO DI V, $\dim V \geq \dim E$; $\dim V = \dim E \Leftrightarrow V = E$

LEMMA: a) I VETTORI COLONNA $v_1, \dots, v_k$ DI UNA MATRICE A SONO L.I. $\Leftrightarrow$ rk$A = k$

b) $A = Mat(v_1, \dots, v_k)$, $A' = Mat(v_1, \dots, v_k, v_{k+1})$, v_{k+1} COMB. LIN. DI $v_1, \dots, v_k \Leftrightarrow$ rkA' = rk$A$

Th $A = Mat(v_1, \dots, v_n) \in Mat_{m \times n}$, rk$A = \dim L[v_1, \dots, v_n]$ = E SOTTOSPAZIO DI $\mathbb{R}^m$

LA BASE DI E É DATA DALLE COLONNE CORRISPONDENTI AD UN MINORE M DI A DI MASSIMO ORDINE $|\det M \neq 0$

PROP. E SOTTOSPAZIO DI $\mathbb{R}^n$, $\dim E = k \Rightarrow \exists$ SISTEMA LINEARE OMOGENEO DI $n-k$ EQUAZIONI IN n INCOGNITE : $E = Sol(S)$

LE EQUAZIONI DI S SI DICONO "EQUAZIONI DEL SOTTOSPAZIO E" E <u>NON</u> SONO UNICHE MA SEMPRE IN NUMERO $n - k = n - \dim E$ = <u>CODIMENSIONE</u> DEL SOTTOSPAZIO E

SOTTOSPAZIO INTERSEZIONE : E, F SOTTOSPAZI DI $V \Rightarrow E \cap F$ SOTTOSPAZIO DI V, DI E E DI F $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \dim (E \cap F) \leq \min \{\dim E; \dim F\}$$

NB: $\mathcal{B}$ DI $E \cap F$ SI OTTIENE EGUAGLIANDO I VETTORI GENERICI DI E E F. ALTRIMENTI (SE LE CODIMENSIONI DI E E F SONO PARI A 1) SI POSSONO METTERE A SISTEMA LE EQUAZIONI DI E E DI F, OTTENUTE EQUAGLIANDO I DETERMINANTI DELLE MATRICI $Mat(\mathcal{B}, \overline{x})$ DI CIASCUN SOTTOSPAZIO A ZERO

SOTTOSPAZIO SOMMA: $E + F = \{u + v \in V : u \in E, v \in F\}$ É UN SOTTOSPAZIO DI V. <u>NB</u> $E \cup F$ <u>NON</u> É SOTTOSPAZIO

PROP. $E = L[v_1, \dots, v_k]$, $F = L[w_1, \dots, w_h] \Rightarrow E + F = L[v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_h]$

Th: FORMULA DI GRASSMAN ; E, F SOTTOSPAZI DI V S.V. $\Rightarrow \dim(E+F) + \dim(E \cap F) = \dim E + \dim F$

SOMMA DIRETTA $U \oplus W$: $U + W = U \oplus W \Leftrightarrow U \cap W = \{0\}$

PROP. : V SPAZIO VETTORIALE CON U, W SUOI SOTTOSPAZI. $V = U \oplus W \Leftrightarrow \forall v \in V, v = u + w, u \in U, w \in W$

NB U, W SOTTOSPAZI DI $\mathbb{R}^3$ $\dim U = \dim W = 2 \Rightarrow \dim(U + W) \geq 1 \Rightarrow U + W \neq U \oplus W$

Th a) $V^n = U \oplus W$

b) $\dim U + \dim W = n \wedge U \cap W = \{0\}$

c) $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_k)$ BASE DI U, $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_k)$ BASE DI $W \Rightarrow \mathcal{B} = (u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_k)$ BASE DI V^n

d) $\forall v \in V^n$, v SI DECOMPONE <u>IN MODO UNICO</u> IN $u + w$, $u \in U$, $w \in W$

COORDINATE DI UN VETTORE RISPETTO A UNA BASE: ESSENDO OGNI VETTORE DI UNO SPAZIO VETTORIALE ESPRIMIBILE COME COMBINAZIONE LINEARE DEI VETTORI DI UNA BASE, $F: V \to \mathbb{R}^n$ É L'APPLICAZIONE LINEARE CHE A UN VETTORE FA CORRISPONDERE IL VETTORE DELLE SUE COORDINATE RISPETTO UNA BASE (OVVERO I COEFFICIENTI DELLA COMBINAZIONE LINEARE)

NB: LO STESSO VETTORE HA COORDINATE DIVERSE IN BASI DIVERSE

PROP. V^n SPAZIO VETTORIALE CON $\dim V = n$, $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ BASE ORDINATA DI V^n, $v \in V^n \Rightarrow$

$F(v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ VETTORE DELLE COORDINATE DI v RISPETTO A $\mathcal{B}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ a) $w_1, \dots, w_k$ L.I. IN $V^n \Leftrightarrow F(w_1), \dots, F(w_k)$ L.I. IN $\mathbb{R}^n$

b) $w_1, \dots, w_k$ GENERANO $V^n \Leftrightarrow F(w_1), \dots, F(w_k)$ GENERANO $\mathbb{R}^n$

c) F TRASFORMA BASI DI V^n IN BASI DI $\mathbb{R}^n$

VETTORI COLONNA

PROP. V SPAZIO VETTORIALE E $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ UNA SUA BASE ; $w_1, \dots, w_k \in V$, $A = Mat(F(w_1), \dots F(w_k))$

a) $w_1, \dots, w_k$ L.I. $\Leftrightarrow$ rk$A = K$ b) $\dim L[w_1, \dots, w_k]$ = rk$A$

APPLICAZIONI FRA INSIEMI: $f: \underset{\substack{\uparrow \\ \text{INSIEME DI PARTENZA}}}{A} \to \underset{\substack{\uparrow \\ \text{INSIEME DI ARRIVO}}}{B}$ ASSOCIA A OGNI ELEMENTO a UN ELEMENTO $f(a) \in B$

IMMAGINE DI f: $\mathrm{Im} f = \{ b \in B : b = f(a), \forall a \in A \}$

f SURIETTIVA $\iff B = \mathrm{Im} f$; f INIETTIVA $\iff \big(a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')\big) \iff \big(f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'\big)$

f BIETTIVA O BIUNIVOCA $\iff$ f INIETTIVA E SURIETTIVA

APPLICAZIONE LINEARE TRA SPAZI VETTORIALI $f: V \to V' \iff \begin{cases} f(u+v) = f(u) + f(v), \ \forall u, v \in V \\ f(ku) = k f(u), \ \forall k \in \mathbb{R}, \forall u \in V \end{cases} \iff$

$\iff f(ku + hv) = k f(u) + h f(v), \ \forall k, h \in \mathbb{R}, \ \forall u, v \in V$

NB: UN'APPLICAZIONE LINEARE TRASFORMA COMBINAZIONI LINEARI IN COMBINAZIONI LINEARI

OMOMORFISMO DA V IN V' = APPLICAZIONE LINEARE DA V IN V'

PROP.: $f: V \to V'$ APPLICAZIONE LINEARE $\Rightarrow f(0) = 0 \wedge f(-v) = -f(v) \ \forall v \in V$

APPLICAZIONI LINEARI DA $\mathbb{R}^n$ A $\mathbb{R}^m$: $A \in Mat_{m \times n}$, $v \in \mathbb{R}^n \Rightarrow Av \in \mathbb{R}^m$. $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \iff f(v) = Av$

PROP.: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ LINEARE, $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{MATRICE CANONICA DI } f}}{A} = Mat\big(f(\underset{\uparrow}{e_1}), \dots, f(\underset{\uparrow}{e_n})\big) \in Mat_{m \times n} \Rightarrow f(v) = Av \ \forall v \in \mathbb{R}^n$

VETTORI DELLA BASE CANONICA DI $\mathbb{R}^n$

VICEVERSA: $\forall A \in Mat_{m \times n}$, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \mid f(v) = Av$ È LINEARE

NB: QUINDI LE APPLICAZIONI LINEARI DA $\mathbb{R}^n$ A $\mathbb{R}^m$ SONO IN CORRISPONDENZA BIUNIVOCA CON LE MATRICI $m \times n$

Th V S.V., $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ BASE DI V; $w_1, \dots, w_n \in V$. $\exists! f: V \to W \mid \begin{cases} f(v_1) = w_1 \\ \vdots \\ f(v_n) = w_n \end{cases}$

MATRICE ASSOCIATA A f RISPETTO ALLE BASI $\mathcal{B}$ E $\mathcal{B}'$: $f: V \to W$ $\dim V = n$ $\dim W = m$ $A \in Mat_{m \times n}$ $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ BASE DI V E $\mathcal{B}' = (w_1, \dots, w_m)$ BASE DI W. LA i-ESIMA COLONNA DI A È DATA DALLE COORDINATE DEL VETTORE $f(v_i)$ RISPETTO ALLA BASE $\mathcal{B}'$

Th $f: V \to W$ APP. LIN., $\mathcal{B}_V = (v_1, \dots, v_n)$, $\mathcal{B}_W = (w_1, \dots, w_m)$, A = MATRICE ASSOCIATA, X VETTORE COLONNA DELLE COORDINATE DI v RISPETTO A $\mathcal{B} \Rightarrow \underset{\text{COORDINATE DI}}{} f(v) = AX$

NUCLEO: SOTTOINSIEME DI V $\mathrm{Ker} f = \{ v \in V \mid f(v) = 0 \}$

PROP: a) $\mathrm{Ker} f$ SOTTOSPAZIO DI V b) f INIETTIVA $\iff \mathrm{Ker} f = \{0\}$ NB f APP. LIN. INIETTIVA $v_1, \dots, v_k$ L.I. $\to w_1, \dots, w_k$ L.I.

PROP: a) $\mathrm{Im} f$ SOTTOSPAZIO DI V' b) f SURIETTIVA $\iff \dim \mathrm{Im} f = \dim V'$ NB $v_1, \dots, v_k$ GENERANO $V \to f(v_1), \dots, f(v_k)$ GENERANO Im

PROP: $f: V \to V'$ APP LIN, A MAT. ASSOCIATA A f RISPETTO $\mathcal{B}$ E $\mathcal{B}'$ $\Rightarrow \mathrm{rk} A = \dim f$

Th: $f: V^n \to V'$ APP LIN $\Rightarrow \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f = \dim V = n$

PROP. $f: V^n \to V^m$ LIN. $\Rightarrow$ • f INIETTIVA $\iff n \leq m$ • f SURIETTIVA $\iff n \geq m$ • f BIUNIVOCA $m = n$

ISOMORFISMO: APPLICAZIONE LINEARE BIUNIVOCA

PROP $f: V \to V'$ ISOMORFISMO: a) $v_1, \dots, v_k$ L.I. $\iff w_1, \dots, w_k$ L.I. b) $v_1, \dots, v_k$ GENERANO $V \iff f(v_1), \dots, f(v_k)$ GENERANO V' c) f TRASFORMA BASI DI V IN BASI DI V' d) $\dim V = \dim V'$

Th OGNI SPAZIO VETTORIALE V CON $\dim V = n$ È ISOMORFO A $\mathbb{R}^n$

PROP. $v_1, \dots, v_k \in V$ L.I. $\iff \mathrm{rk}\, Mat\big(F(v_1), \dots, F(v_k)\big) = k$

ENDOMORFISMO (O OPERATORE) DI V: APPLICAZIONE LINEARE $f: V \to V$

MATRICE ASSOCIATA ALL'OPERATORE f RISPETTO A $\mathcal{B}$: MATRICE ASSOCIATA DELL'APPLICAZIONE LINEARE f PRENDENDO COME BASE $\mathcal{B}$ SIA NELLO SPAZIO DI PARTENZA CHE IN QUELLO DI ARRIVO

CAMBIAMENTO DI BASE: SIANO $\mathcal{B}$ E $\mathcal{B}'$ BASI DELLO STESSO S.V. V. OGNI VETTORE DELLA BASE $\mathcal{B}'$ SI PUÒ ESPRIMERE COME COMBINAZIONE LINEARE DEI VETTORI DELLA BASE $\mathcal{B}$

MATRICE DEL CAMBIAMENTO DI BASE: OTTENUTA INCOLONNANDO <u>LE COORDINATE</u> DEI VETTORI DI $\mathcal{B}'$ RISPETTO A $\mathcal{B}$. $M \in Mat(n \times n)$ $n = \dim V$ $(v_1', \dots, v_n') = (v_1, \dots, v_n) M \iff \mathcal{B}' = \mathcal{B} M$

PROP. a) LA MATRICE DEL CAMBIAMENTO DI BASE È INVERTIBILE

b) VICEVERSA SE $\mathcal{B}_V$ BASE DI V^n E $M = \{a_{ij}\}$ INVERTIBILE $A = \mathcal{B}_V M \Rightarrow A$ BASE DI V

c) $\mathcal{B}$ E $\mathcal{B}'$ BASI $\mathcal{B}' = \mathcal{B} M \iff \mathcal{B} = \mathcal{B}' M^{-1}$

OSS.: $V = \mathbb{R}^n$ $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_n) = \mathcal{B}_C M \Rightarrow M$ SI OTTIENE INCOLONNANDO $(w_1, \dots, w_n)$

MATRICI SIMILI: A E A' SIMILI $\iff \exists M$ INVERTIBILE $| A' = M^{-1} A M$

Th f ENDOMORFISMO DI V S.V., $\mathcal{B}$ E $\mathcal{B}'$ BASI DI V, A E A' MATRICI ASSOCIATE A f RISPETTO A $\mathcal{B}$ E $\mathcal{B}'$ RISPETTIVAMENTE $\Rightarrow A' = M^{-1} A M$ DOVE M MATRICE DEL CAMBIAMENTO DI BASE DA $\mathcal{B}$ A $\mathcal{B}'$

OSS. VALE ANCHE IL VICEVERSA: DUE MATRICI SIMILI RAPPRESENTANO LO STESSO ENDOMORFISMO RISPETTO A BASI DIVERSE DI V

ENDOMORFISMO DIAGONALIZZABILE DI V: PUÒ ESSERE RAPPRESENTATO DA UNA MATRICE DIAGONALE OVVERO $\exists \mathcal{B}_V$ RISPETTO ALLA QUALE LA MATRICE ASSOCIATA È DIAGONALE

DEF: SIA f UN ENDOMORFISMO DI UNO S.V. V: a) $v \neq 0$ AUTOVETTORE DI f ASSOCIATO ALL'AUTOVALORE λ SE $f(v) = \lambda v$

b) SCALARE λ AUTOVALORE DI $f \iff \exists v \neq 0 | f(v) = \lambda v$

NB $\lambda = 0 \iff \operatorname{Ker} f \neq \{0\}$

Th UN ENDOMORFISMO f DI UNO S.V. V È DIAGONALIZZABILE $\iff V$ AMMETTE UNA BASE FORMATA DA AUTOVETTORI DI f

ES: GLI ENDOMORFISMI NULLO $O: V \to V$ E IDENTITÀ $I: V \to V$ SONO DIAGONALIZZABILI

AUTOSPAZIO ASSOCIATO AD UN AUTOVALORE λ: SOTTOSPAZIO $E(\lambda) = \{v \in V | f(v) = \lambda v\}$

$\dim E(\lambda) = MG(\lambda) \leftarrow$ MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA DI λ NB: $MG(\lambda) \geq 1$; $E(0) = \operatorname{Ker} f$

PROP. f ENDOMORFISMO DI V^n, A MATRICE ASSOCIATA A $f \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ AUTOVALORE DI $f \iff \det(A - \lambda \underset{\text{MATRICE IDENTITÀ}}{I}) = 0$

$P_A(x) = \det(A - xI) \leftarrow$ POLINOMIO CARATTERISTICO DI A NELLA VARIABILE x E DI GRADO n

Th f ENDOMORFISMO DI V^n, A MATRICE ASSOCIATA A f, ALLORA:

a) GLI AUTOVALORI DI f SONO LE RADICI DEL POLINOMIO CARATTERISTICO DI A: $p_A(\lambda) = 0$

b) λ AUTOVALORE DI $f \Rightarrow MG(\lambda) = \dim E(\lambda) = n - rk(A - \lambda I)$

PROP.: MATRICI SIMILI HANNO LO STESSO POLINOMIO CARATTERISTICO

COROLLARIO: TUTTE LE MATRICI ASSOCIATE AD UNO STESSO ENDOMORFISMO HANNO LO STESSO POLINOMIO CARATTERISTICO

CALCOLO DEGLI AUTOSPAZI: $E(\lambda_i): (A - \lambda_i I) X = 0$ ($\leftarrow$ SISTEMA OMOGENEO) λ_i SI CALCOLANO COME RADICI DI $p_A(x)$

NB SE A TRIANGOLARE $\lambda_i = a_{kh}$, $k = h$ (ELEMENTI SULLA DIAGONALE PRINCIPALE)

PROP f ENDOMORFISMO DI V^n CON AUTOVALORI DISTINTI $\lambda_1, \dots, \lambda_h$, $h \geq 1$:

a) $\mathcal{B}_i$ BASE DI $E(\lambda_i)$, $i = 1, \dots, h \Rightarrow$ I VETTORI DI $\mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_h$ SONO L.I.

b) $\sum_{i=1}^{h} MG(\lambda_i) \leq n = \dim V^n$

Th UN ENDOMORFISMO DI UNO S.V. V^n È DIAGONALIZZABILE $\iff \sum_{i=1}^{k} MG(\lambda_i) = n$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ AUTOVALORI DISTINTI DI f

COROLLARIO: (C.S.) $f: V^n \to V^n$, f AMMETTE n AUTOVALORI DISTINTI $\Rightarrow f$ DIAGONALIZZABILE

PRIMO CRITERIO DI DIAGONALIZZABILITÁ: ENDOMORFISMO $f: V^n \to V^n$

1) FISSIANO $\mathcal{B}_{V^n}$ E A MATRICE ASSOCIATA A f
2) $\lambda_1, \dots, \lambda_k \mid p_A(x) = 0$
3) $MG(\lambda_i) = n - rk(A - \lambda_i I), \forall \lambda_i, i = 1, \dots, k$
4) $\sum_{i=1}^{k} MG(\lambda_i) < n \Rightarrow f$ NON DIAGONALIZZABILE
5) $\sum_{i=1}^{k} MG(\lambda_i) = n \Rightarrow f$ DIAGONALIZZABILE, $\mathcal{B}_i$ DI OGNI AUTOSPAZIO SI OTTIENE RISOLVENDO $(A - \lambda_i I)X = 0$

$\mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_k = \mathcal{B}_{V^n}$ DI AUTOVETTORI

MOLTEPLICITÁ ALGEBRICA DELL'AUTOVALORE λ $MA(\lambda)$: $k = MA(\lambda) \Leftrightarrow p_A(x)$ DIVISIBILE PER $(x-\lambda)^k$ MA NON PER $(x-\lambda)^{k+1}$

PROP. $MA(\lambda) \geq MG(\lambda) \geq 1$

Th $f: V^n \to V^n$ ENDOMORFISMO DIAGONALIZZABILE $\Leftrightarrow \begin{cases} p_A(x) \text{ DI } f \text{ TOTALMENTE RIDUCIBILE} \\ \forall \lambda, MA(\lambda) = MG(\lambda) \end{cases}$

AUTOVALORE SEMPLICE: $MA(\lambda) = 1$ $(= MG(\lambda))$ AUTOVALORE MULTIPLO: $MA(\lambda) > 1$

SECONDO CRITERIO DI DIAGONALIZZABILITÁ: ENDOMORFISMO $f: V^n \to V^n$

1) MATRICE ASSOCIATA A, CALCOLIAMO $p_A(x)$
2) $p_A(x)$ NON É TOTALMENTE RIDUCIBILE $\Rightarrow f$ NON É DIAGONALIZZABILE
3) $p_A(x)$ TOTALMENTE RIDUCIBILE $\Rightarrow$ CONSIDERIAMO GLI AUTOVALORI MULTIPLI λ_i: $\forall \lambda_i$ $MA(\lambda_i) = MG(\lambda_i) \Rightarrow f$ DIAGONALIZZABILE

AUTOVETTORE DI $A_{n \times n}$: VETTORE COLONNA $v \neq 0 \in \mathbb{R}^n \mid Av = \lambda v$ ($\Leftrightarrow v$ AUTOVETTORE DI $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ RAPPRESENTATO DA A RISPETTO $\mathcal{B}_{CANONICA}$.

MATRICE DIAGONALIZZABILE A: A SIMILE AD UNA MATRICE DIAGONALE D ($\Leftrightarrow \exists$ D DIAGONALE, M INVERTIBILE $D = M^{-1}AM$)

Th $A \in Mat_{n \times n}$, f OPERATORE DI $\mathbb{R}^n$ RAPPRESENTATO DA A RISPETTO $\mathcal{B}_C$: a) A DIAGONALIZZABILE $\Leftrightarrow f$ DIAGONALIZZABILE

b) $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ BASE DI AUTOVETTORI DI f ASSOCIATI AGLI AUTOVALORI $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, M MATRICE DI COLONNE $v_1, \dots, v_n$, ALLORA: $M^{-1}AM = D$ DOVE D MATRICE DIAGONALE CON ELEMENTI $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ RISPETTIVAMENTE

5

Prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$ di v e w: $\langle w;v\rangle = x_1y_1+\dots+x_ny_n$ $\quad x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ $\quad w=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$

Proprietà: $w,v,w\in\mathbb{R}^n$, $k\in\mathbb{R}$:

1) $\langle w,v\rangle=\langle v;w\rangle$ — commutativo
2) $\langle w+v,w\rangle=\langle w,w\rangle+\langle w;w\rangle$ — bilineare
3) $\langle kw,v\rangle=k\langle w,v\rangle$ — bilineare
4) $\langle w,w\rangle\geq 0$ — definito positivo
5) $\langle w,w\rangle=0 \Leftrightarrow w=0$ — definito positivo

$\langle a_1v_1+\dots+a_kv_k;w\rangle = a_1\langle v_1;w\rangle+\dots+a_k\langle v_k;w\rangle$

Vettori ortogonali w,v: $\langle w;v\rangle=0$ (w,v L.I.) **NB** il vettore nullo $\underline{0}$ è ortogonale a tutti i vettori

Norma di $w\in\mathbb{R}^n$: $\|w\|=\sqrt{\langle w;w\rangle}=\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}$ **NB** $\|w\|\geq 0\ \forall w\in\mathbb{R}^n$; $\|w\|=0\Leftrightarrow w=\underline{0}$

Th Disuguaglianza di Schwarz: $w,v\in\mathbb{R}^n$ $|\langle w,v\rangle|\leq\|w\|\cdot\|v\|$ **NB** l'uguaglianza vale $\Leftrightarrow w,v$ L.I.

Angolo tra due vettori w,v non nulli: $\theta \mid \cos\theta=\dfrac{\langle w,v\rangle}{\|w\|\|v\|}$

Prop. $v_1,\dots,v_k$ vettori non nulli di $\mathbb{R}^n$ a due a due ortogonali $\Rightarrow v_1,\dots,v_k$ L.I., $k\leq n$

NB $n=k\Rightarrow v_1,\dots,v_k$ base ortogonale di $\mathbb{R}^n$

Base ortonormale: $\mathcal{B}_E=(v_1,\dots,v_k)$, $\langle v_i,v_j\rangle=\begin{cases}0, & i\neq j\\ 1, & i=j\end{cases}$

Prop. $\mathcal{B}_E=(v_1,\dots,v_k)$ base ortonormale $\Rightarrow$ le coordinate di $v\in E$ rispetto a $\mathcal{B}_E$ sono
$\begin{pmatrix}\langle v;v_1\rangle\\ \vdots\\ \langle v;v_k\rangle\end{pmatrix}$ e sono dette coefficienti di Fourier di v

Prop. 1) $a\in\mathbb{R}$, $v\in\mathbb{R}^n$ $\|av\|=|a|\,\|v\|$ 2) $v\neq 0$, $w=\dfrac{1}{\|v\|}v$ vettore normalizzato di v

Corollario: $(v_1,\dots,v_k)$ base ortogonale del sottospazio $E\Rightarrow\left(\dfrac{v_1}{\|v_1\|},\dots,\dfrac{v_k}{\|v_k\|}\right)$ base di E ortonormale
vettori normalizzati $\longrightarrow$

Th Algoritmo Gram-Schmidt: $(v_1;\dots;v_k)$ base del sottospazio E

$$\begin{cases}w_1=v_1\\ w_2=v_2-a_{21}w_1\\ w_3=v_3-a_{31}w_1-a_{32}w_2\\ \vdots\\ w_k=v_k-a_{k1}w_1-a_{k2}w_2-\dots-a_{k\,k-1}w_{k-1}\end{cases}\qquad a_{ij}=\frac{\langle v_i,w_j\rangle}{\langle w_j,w_j\rangle}$$

$(w_1,\dots,w_k)$ base ortogonale di E

$\left(\dfrac{w_1}{\|w_1\|},\dots,\dfrac{w_k}{\|w_k\|}\right)$ base ortonormale di E

NB la base ortonormale non è unica

Matrice ortogonale M: $M\in Mat_{n\times n}\mid MM^T=I\Leftrightarrow M^T=M^{-1}$ **NB** $\det M=\pm 1$

Th a) La matrice di passaggio tra due basi ortonormali di $\mathbb{R}^n$ è ortogonale

b) $A\in Mat_{n\times n}$ ortogonale $\Leftrightarrow$ le colonne di A formano una base di $\mathbb{R}^n$ ortonormale

Complemento ortogonale di E sottospazio di $\mathbb{R}^n$: $E^\perp=\{v\in\mathbb{R}^n \mid \langle v;v_i\rangle=0,\ i=1,\dots,k\}$ $(v_1,\dots,v_k)$ base di E

Th a) $E\cap E^\perp=\{0\}$ b) $\dim E^\perp=n-\dim E=n-k$ (k = n° vettori L.I.) ($o\ n-rkA$, A formata da vettori non necessariamente L.I., $E^\perp$ sarebbe il sottospazio dei vettori $\perp$, non compl. ort.)

$\Downarrow$ c) $\mathbb{R}^n=E\oplus E^\perp$

Def. $v\in\mathbb{R}^n$, $w\in E$, $w^\perp\in E^\perp$ $v=w+w^\perp$ in modo unico $\Rightarrow w=P_E(v)$ proiezione ortogonale di v sul sottospazio E

NB $(w_1,\dots,w_k)$ base ortonormale di $E\Rightarrow P_E(v)=\langle v,w_1\rangle w_1+\dots+\langle v,w_k\rangle w_k$

Endomorfismo simmetrico di $\mathbb{R}^n$: la sua matrice associata rispetto la base canonica è simmetrica

Th f endomorfismo simmetrico di $\mathbb{R}^n\Leftrightarrow$ la matrice associata a f rispetto una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ è simmetrica $\Leftrightarrow\forall w,v\in\mathbb{R}^n$ $\langle f(w),v\rangle=\langle w,f(v)\rangle$

sempre verificato

Prop. Gli autospazi di un endomorfismo simmetrico sono ortogonali fra loro $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\lambda_1,\lambda_2$ autovalori distinti di f, $w\in E(\lambda_1)$, $v\in E(\lambda_2)\Rightarrow\langle w;v\rangle=0$

Th Teorema spettrale: f endomorfismo simmetrico di $\mathbb{R}^n\Rightarrow f$ diagonalizzabile $\Leftrightarrow\exists\mathcal{B}$ ortonormale di $\mathbb{R}^n$ costituita da autovettori di f

M ortogonale

Corollario $D=M^{-1}AM=M^TAM$ con A simmetrica, D diagonale

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari
www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

VETTORE DEL PIANO $\overrightarrow{AB}$: COPPIA ORDINATA DI PUNTI (A,B) DETTI ESTREMI. A È IL PUNTO DI APPLICAZIONE, B È IL VERTICE DEL VETTORE. LA DIREZIONE DEL VETTORE È LA RETTA PASSANTE PER A E B, IL MODULO DEL VETTORE $\|\overrightarrow{AB}\| = dist(A;B)$. IL VERSO DEL VETTORE È DA A A B. $\overrightarrow{AA}$ È IL VETTORE NULLO.

VETTORI PARALLELI: AVENTI LA STESSA DIREZIONE, OVVERO CONTENUTI IN RETTE PARALLELE. IL VETTORE NULLO È PARALLELO A TUTTI I VETTORI PER CONVENZIONE.

VETTORI EQUIPOLLENTI: DIFFERISCONO SOLO PER IL PUNTO DI APPLICAZIONE. TRASLANDO UN VETTORE SI OTTIENE UN VETTORE EQUIPOLLENTE (PER IL V POSTULATO DI EUCLIDE). UN VETTORE DEFINISCE UNA CLASSE DI VETTORI EQUIPOLLENTI.

SOMMA DI DUE VETTORI $\vec{v}$ E $\vec{v}'$ (REGOLA DEL PARALLELOGRAMMA): VETTORE SULLA DIAGONALE DEL PARALLELOGRAMMA COSTRUITO CON I VETTORI EQUIPOLLENTI A $\vec{v}$ E $\vec{v}'$ (RAPPRESENTA LA SOMMA DELLE CLASSI DI EQUIVALENZA DI $\vec{v}$ E $\vec{v}'$). LA SOMMA È ASSOCIATIVA E COMMUTATIVA, $\exists$ IL VETTORE NULLO, OGNI VETTORE HA IL SUO OPPOSTO CON LA CUI SOMMA SI HA IL VETTORE NULLO.

MOLTIPLICAZIONE PER UNO SCALARE: $\vec{w} = K\vec{v}$, $K \in \mathbb{R}$, $\vec{v} \in V_O^2$; $\vec{v} = \vec{O} \Rightarrow \vec{w} = \vec{O}$; $K = O \Rightarrow \vec{w} = \vec{O}$
$\vec{w}$ HA LA STESSA DIREZIONE DI $\vec{v}$ E MODULO PARI A $|k|\|\vec{v}\|$.
$K > O \Rightarrow \vec{v}$ E $\vec{w}$ HANNO LO STESSO VERSO; $K < O \Rightarrow \vec{v}$ E $\vec{w}$ HANNO VERSO OPPOSTO

PROP.: L'INSIEME V_O^2 DEI VETTORI APPLICATI NELL'ORIGINE O, CON LE OPERAZIONI SOMMA E PRODOTTO, È UNO S.V.

PROPRIETÀ DI V_O^2: $\vec{v}$ L.I. $\Leftrightarrow \vec{v} \neq \vec{O}$; $\vec{w}, \vec{v}$ L.I. $\Leftrightarrow \vec{w} \not\parallel \vec{v} \Leftrightarrow O, A, B$ ALLINEATI

Th $\dim V_O^2 = 2$ $\quad \mathcal{B}_{V_O^2}$: TUTTE E SOLE LE COPPIE DI VETTORI NON PARALLELI

SISTEMA DI RIFERIMENTO CARTESIANO: SISTEMA DI RIFERIMENTO AFFINE CON BASE $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ORTONORMALE
$\overrightarrow{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ $\quad P = (x;y) \leftarrow$ COORDINATE (CARTESIANE, IN CASO DI S.D.R. CART.)
ASSI $\vec{x}$ E $\vec{y}$: DIREZIONI DI $\vec{e}_1$ E $\vec{e}_2$ $\quad x$ = ASCISSA y = ORDINATA
COORDINATE DI $\overrightarrow{OP} = (x;y)$. LE COORDINATE DI $\vec{v}$ SONO QUELLE DEL SUO TRASLATO IN O

Th $\overrightarrow{OP} = (x;y), \overrightarrow{OP'} = (x';y'), K \in \mathbb{R} \Rightarrow K\overrightarrow{OP} = (Kx; Ky) \wedge (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP'}) = (x+x', y+y')$

PROP. $A = (x,y), B = (x',y') \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (x'-x; y'-y) = B - A$ NB VETTORI EQUIPOLLENTI HANNO COORDINATE UGUALI

EQUAZIONI PARAMETRICHE DI UNA RETTA: $r: \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}$ $(\Leftrightarrow P \in r \Rightarrow \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\vec{v})$ NB. SI PASSA ALL'EQUAZIONE CARTESIANA ELIMINANDO IL PARAMETRO t

$P_0 = (x_0; y_0) \in r$; $v = (l, m)$, $t \in \mathbb{R}$
$\uparrow$ PARAMETRI DIRETTORI DI r (SONO INFINITI, TUTTI PROPORZIONALI)
UN QUALSIASI VETTORE DIRETTORE DI r

RETTA PASSANTE PER DUE PUNTI: $P_1 = (x_1; y_1), P_2 = (x_2; y_2)$ $P_1, P_2 \in r \Leftrightarrow \begin{cases} l = x_2 - x_1 \\ m = y_2 - y_1 \end{cases} \wedge (P_1 \in r \vee P_2 \in r)$ P_1 E P_2 SI POSSONO INVERTIRE SOLO SE SI INVERTONO IN ENTRAMB LE COORDINATE

OPPURE: $r: \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = ax + by + c = 0$
$\uparrow$ EQUAZIONE CARTESIANA DI r: NB $\begin{cases} c = 0 \Rightarrow O \in r \\ b = 0 \Rightarrow r \parallel \vec{y} \\ a = 0 \Rightarrow r \parallel \vec{x} \end{cases}$

NB: $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0 \leftarrow$ CONDIZIONE DI ALLINEAMENTO PER 3 PUNTI

PARALLELISMO TRA DUE RETTE r E r': $r \parallel r' \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$. $r \not\parallel r' \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$

FASCIO DI RETTE PARALLELE ALLA RETTA DATA $r: ax + by + c = 0$: $r_k: ax + by + K = 0$, $K \in \mathbb{R}$ NB LE RETTE $\parallel r$ SONO ∞^1 (NEL PIANO)

FASCIO DI RETTE PASSANTI PER IL PUNTO $P_0 = (x_0; y_0)$: $r: a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$

PRODOTTO ~~VETTORIALE~~ SCALARE IN V_O^2: (GODE DI TUTTE LE PROPRIETÀ CHE HA IN $\mathbb{R}^n$) $v = (x;y), v' = (x';y') \Rightarrow \langle \vec{v}; \vec{v}' \rangle = xx' + yy'$; $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

DISTANZA TRA DUE PUNTI $A = (x_1; y_1)$ E $B = (x_2; y_2)$: $d(A;B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

PERPENDICOLARITÀ TRA DUE RETTE r E r': $r \perp r' \Leftrightarrow aa' + bb' = 0$

DISTANZA DI UN PUNTO DA UNA RETTA: $d(P_0; r) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

NB È PARI ALLA MISURA DEL SEGMENTO DI ESTREMI P_0 E LA PROIEZIONE ORTOGONALE DI P_0 SU r. QUESTA È IL PUNTO APPARTENENTE A r E ALLA PERPENDICOLARE A r PASSANTE PER P_0

PUNTO MEDIO DEL SEGMENTO AB CON $A = (x_1; y_1)$ E $B = (x_2; y_2)$: $M = \left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}; \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$

ASSE DEL SEGMENTO AB: INSIEME DEI PUNTI EQUIDISTANTI DA A E B; È LA RETTA ORTOGONALE A AB PASSANTE PER M

METODO DEL PUNTO MOBILE: SI SOSTITUISCONO ALLE COORDINATE DI UN PUNTO, APPARTENENTE A UNA RETTA, LE EQUAZIONI PARAMETRICHE DELLA RETTA ALLA QUALE APPARTIENE, NELLE EQUAZIONI CHE DEFINISCONO LE CONDIZIONI DA RISPETTARE. SOSTITUENDO I VALORI DI t CHE RISOLVONO LE EQUAZIONI NELLE EQUAZIONI PARAMETRICHE, SI DEFINISCONO LE COORDINATE DEL PUNTO RICHIESTO.

VETTORE DELLO SPAZIO $\vec{AB}$: DEF. SIMILE A QUELLA DEL VETTORE DEL PIANO

$V_0^3 = \{\vec{OP} : P$ È UN PUNTO DELLO SPAZIO$\}$ È UNO S.V. CON LE STESSE OPERAZIONI DI V_0^2

PUNTI ALLINEATI: APPARTENGONO ALLA STESSA RETTA. DUE PUNTI SONO SEMPRE ALLINEATI.
PUNTI COMPLANARI: APPARTENGONO ALLO STESSO PIANO. TRE PUNTI SONO SEMPRE COMPLANARI.
PER DUE PUNTI DISTINTI PASSANO UNA E UNA SOLA RETTA E INFINITI PIANI.
PER TRE PUNTI NON ALLINEATI PASSA UN SOLO PIANO
PER UN PUNTO DELLO SPAZIO PASSANO INFINITE RETTE
SE UN PIANO CONTIENE DUE PUNTI DISTINTI, ALLORA CONTIENE L'INTERA RETTA PER I DUE PUNTI

PROP. a) $\vec{v}$ E $\vec{w} \in V_0^3$ L.D $\Leftrightarrow$ SONO ALLINEATI; b) $\vec{v}$ E $\vec{w}$ NON ALLINEATI $\Rightarrow \exists!$ IL PIANO $\pi \mid \vec{v}, \vec{w} \in \pi$

TH $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ L.D $\Leftrightarrow$ SONO COMPLANARI. PROP a) $\dim V_0^3 = 3$ b) $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ SONO UNA BASE DI $V_0^3 \Leftrightarrow$ NON SONO COMPLANARI

SISTEMA DI RIFERIMENTO CARTESIANO: RC. $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ $\vec{v} = \vec{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \Rightarrow P = (x; y; z) = \vec{OP}$
ORIGINE $O(0;0;0)$ BASE ORTONORMALE $\exists$ UNA CORRISPONDENZA $V_0^3 \to \mathbb{R}^3$

PIANI COORDINATI: $xy: z=0$; $xz: y=0$; $yz: x=0$. ASSI COORDINATI: $x: y=z=0$; $y: x=z=0$; $z: x=y=0$.
ASCISSE ORDINATE QUOTE

COORDINATE DI UN VETTORE $\vec{v} = \vec{AB}$, $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$: COORDINATE DI $\vec{v}_0 = \vec{OB} - \vec{OA} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$

VETTORI EQUIPOLLENTI $\Leftrightarrow$ HANNO COORDINATE UGUALI. VETTORI PARALLELI $\Leftrightarrow$ HANNO COORDINATE PROPORZIONALI

EQUAZIONI PARAMETRICHE DI UNA RETTA: $r: \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$ $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in r$; $(l; m; n)$ PARAMETRI DIRETTORI DI r
NB: DIVENTANO CARTESIANE ELIMINANDO t (2 EQUAZIONI)

RETTE PARALLE: HANNO PARAMETRI DIRETTORI PROPORZIONALI

RETTA PASSANTE PER $P_1 = (x_1; y_1; z_1)$ E $P_2 = (x_2; y_2; z_2)$: HA PARAMETRI DIRETTORI PROPORZIONALI A $\begin{cases} l = x_2 - x_1 \\ m = y_2 - y_1 \\ n = z_2 - z_1 \end{cases}$

CONDIZIONE DI ALLINEAMENTO DI TRE PUNTI: $rk\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{pmatrix} \leq 1$
$P_1 = (x_1; y_1; z_1)$, $P_2 = (x_2; y_2; z_2)$, $P_3 = (x_3; y_3; z_3)$

2 RETTE NELLO SPAZIO POSSONO ESSERE: COMPLANARI — INCIDENTI (HANNO UN PUNTO IN COMUNE), PARALLELE $r \cap r' = \emptyset$; SGHEMBE $r \cap r' = \emptyset$

CONDIZIONE DI COMPLANARITÀ DI 4 PUNTI: $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = 0$ $P_1 = (x_1; y_1; z_1)$ $P_3 = (x_3; y_3; z_3)$ $P_2 = (x_2; y_2; z_2)$ $P_4 = (x_4; y_4; z_4)$

EQUAZIONE CARTESIANA DEL PIANO: $\pi: ax + by + cz + d = 0$, $(a; b; c) \neq (0,0,0)$ NB $d = 0 \Leftrightarrow O(0;0;0) \in \pi$
TERNA DEI PARAMETRI DI GIACITURA

PIANO PER TRE PUNTI NON ALLINEATI: $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$

TH DATI I PIANI $\pi: ax + by + cz + d = 0$ E $\pi': a'x + b'y + c'z + d' = 0$, SIA $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$ ALLORA: $\begin{cases} \pi \parallel \pi' \Leftrightarrow rkA = 1 \\ \pi \cap \pi' = r \Leftrightarrow rkA = 2 \Rightarrow \end{cases}$ (3 EQUAZIONI)
$\Rightarrow r: \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ EQUAZIONI CARTESIANE DI UNA RETTA NELLO SPAZIO. NB DIVENTANO PARAMETRICHE RISOLVENDO IL SISTEMA

NB I PARAMETRI DIRETTORI DI r SONO PROPORZIONALI ALLA TERNA: $l = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}$, $m = -\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$, $n = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$

POSIZIONI TRA UNA RETTA r E UN PIANO π: $r \cap \pi = \{P\} \Leftrightarrow$ INCIDENTI; $r \cap \pi = \emptyset \Leftrightarrow$ NON HANNO INTERSEZIONE; $r \cap \pi = r \Leftrightarrow r \in \pi$ $\Big\} \Rightarrow r \parallel \pi \Leftrightarrow al + bm + cn = 0$
(l, m, n) PARAMETRI DIRETTORI DI r
$(a; b; c)$ PARAMETRI DI GIACITURA DI π
NB SI VERIFICA $\Leftrightarrow$ SI VERIFICA LA CONDIZIONE E $r \cap \pi \neq \emptyset$

FASCIO DI PIANI PASSANTI PER UNA RETTA DATA $r: \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$: $\pi: h(ax + by + cz + d) + k(a'x + b'y + c'z + d') = 0$

NB: DATA UNA RETTA r E $P \notin r$, $\exists! \pi \mid P \in \pi \wedge r \in \pi$

STELLA DI PIANI DI CENTRO UN PUNTO $P_0(x_0; y_0; z_0)$: $\pi: a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$

NB $(a; b; c)$ È ALTERABILE PER UN FATTORE DI PROPORZIONALITÀ NON NULLO. NB ESISTONO ∞^2 PIANI PASSANTI PER P_0

PIANO PARALLELO A DUE DIREZIONI: $r \not\parallel r'$, $P_0 \Rightarrow \exists! \pi \mid \pi \parallel r \wedge \pi \parallel r' \wedge P_0 \in \pi$ $\pi: \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = 0$
$P_0 = (x_0; y_0; z_0)$; (l, m, n) E (l', m', n') PARAMETRI DIRETTORI RISPETTIVAMENTE DI r E r'

PRODOTTO SCALARE IN V_0^3: (GODE DI TUTTE LE PROPRIETÀ CHE HA IN $\mathbb{R}^n$) $\vec{v}=(x;y;z)$ $\vec{v}'=(x';y';z')$ $\langle\vec{v};\vec{v}'\rangle=xx'+yy'+zz'$

$\langle\vec{v};\vec{v}'\rangle=\|v\|\|v'\|\cos\vartheta$ $\quad \|\vec{v}\|=\sqrt{\langle\vec{v};\vec{v}\rangle}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $\quad \vec{v}\perp\vec{v}'\Rightarrow\langle\vec{v};\vec{v}'\rangle=0$ $\quad d(A;B)=\|\overrightarrow{AB}\|$ $\quad \cos\vartheta=\dfrac{\langle\vec{v};\vec{v}'\rangle}{\|\vec{v}\|\|\vec{v}'\|}$

AREA DI UN PARALLELOGRAMMA DI LATI $\vec{v}$ E $\vec{w}$: $A=\sqrt{\begin{vmatrix}\langle\vec{v};\vec{v}\rangle & \langle\vec{v};\vec{w}\rangle\\ \langle\vec{v};\vec{w}\rangle & \langle\vec{w};\vec{w}\rangle\end{vmatrix}}=\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|\sin\vartheta=\sqrt{\|\vec{v}\|^2\|\vec{w}\|^2-\langle\vec{v};\vec{w}\rangle^2}$

PRODOTTO VETTORIALE DI DUE VETTORI $\vec{v}=(a;b;c)$ E $\vec{w}=(a';b';c')$: $\vec{v}\wedge\vec{w}=\left(\begin{vmatrix}b & c\\ b' & c'\end{vmatrix};-\begin{vmatrix}a & c\\ a' & c'\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a & b\\ a' & b'\end{vmatrix}\right)$

PROP. a) $\vec{v}\parallel\vec{w}\Leftrightarrow\vec{v}\wedge\vec{w}=0$ $\quad$ b) $\vec{v}\wedge\vec{w}\perp\vec{v}$, $\vec{v}\wedge\vec{w}\perp\vec{w}$ $\quad$ c) $\|\vec{v}\wedge\vec{w}\|=$ AREA DEL PARALLELOGRAMMA DI LATI v E w

NB IL PRODOTTO VETTORIALE È ANTICOMMUTATIVO: $\vec{v}\wedge\vec{w}=-\vec{w}\wedge\vec{v}$

PROP $r\perp r'\Leftrightarrow ll'+mm'+nn'=0\Leftrightarrow\langle\vec{v};\vec{v}'\rangle=0$ NB RETTE ORTOGONALI POSSONO NON ESSERE INCIDENTI

PROP DATI P_0 E $r\not\parallel r'\Rightarrow\exists!\,s\mid P_0\in s,\ s\perp r,\ s\perp r'$

DEF. FISSATI π E $P_0\in\pi$, $\vec{n}$ APPLICATO IN P_0 È $\perp$ A $\pi\Leftrightarrow\vec{n}$ È ORTOGONALE A TUTTI I VETTORI APPLICATI IN P_0 CONTENUTI IN π

PROP. $\pi: ax+by+cz+d=0\Rightarrow\vec{n}=(a;b;c)\perp\pi$

PROP. $r\perp\pi\Leftrightarrow rk\begin{pmatrix}a & b & c\\ l & m & n\end{pmatrix}=1$ ($\Leftrightarrow$ I PARAMETRI DI GIACITURA DEL PIANO SONO PROPORZIONALI AI PAR. DIRETTORI DI r)

DEF. $\pi\perp\pi'\Leftrightarrow P_0\in\pi\perp\pi'$, $P_0\in r\in\pi'$, $r\perp\pi$

PROP. $\pi\perp\pi'\Leftrightarrow\langle\vec{n};\vec{n}'\rangle=0\Leftrightarrow aa'+bb'+cc'=0$ NB DATI π E $r\Rightarrow\exists\,\pi'\perp\pi\mid r\in\pi'$
π' È UNICO SE r NON È ORTOGONALE A π

PROIEZIONE ORTOGONALE DI UN PUNTO P_0 SU UN PIANO π: INTERSEZIONE TRA π E $r\perp\pi$, $P_0\in r$ $(r\cap\pi)=\{H\}$

$d(P_0;\pi)=d(P_0;H)$ (PER CALCOLARLA DEVO QUINDI CALCOLARE PRIMA $r\perp\pi$, $P_0\in r$ E $r\cap\pi$) $\quad d(P_0;\pi)=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

PROIEZIONE ORTOGONALE DI UN PUNTO P_0 SU UNA RETTA r: $r\cap\pi$, $\pi\perp r$, $P_0\in\pi$

$d(P_0;r)=d(P_0;H)$ | PROIEZIONE ORTOGONALE DI r SU π: $r'=\pi\cap\pi'$, $r\in\pi'$, $\pi\perp\pi'$

r E r' SONO
- INCIDENTI $\Rightarrow d(r;r')=0$
- PARALLELE $\Rightarrow d(r;r')=d(r;P')$, $P'\in r'$
- SGHEMBE $\Rightarrow d(r;r')=\|\overrightarrow{HH'}\|$, $H\in r$, $H'\in r'$, $\overrightarrow{HH'}\perp r$, $\overrightarrow{HH'}\perp r'$

Th r E r' SGHEMBE $\Rightarrow\exists!\,s\mid s\perp r,\ s\perp r',\ s\cap r=\{H\},\ s\cap r'=\{H'\}$

CIRCONFERENZA: LUOGO DEI PUNTI DEL PIANO EQUIDISTANTI DA UN PUNTO (CENTRO). RAGGIO $=d(P;C)$, $P\in\gamma$

$\gamma: (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$ $\quad C=(\alpha;\beta)$ R=RAGGIO $\Leftrightarrow$ EQ. CARTESIANA $\gamma: x^2+y^2+ax+by+c=0$ $\quad a=-2\alpha$ $\quad b=-2\beta$

$C=\left(-\dfrac{a}{2};-\dfrac{b}{2}\right)$ $\quad R=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$ $\qquad$ NB: $a^2+b^2-4c>0$ $\qquad c=\alpha^2+\beta^2-R^2$

PROP. PER TRE PUNTI NON ALLINEATI PASSA UNA E UNA SOLA CIRCONFERENZA. PER CALCOLARE γ PER P_1,P_2,P_3 SI POSSONO UTILIZZARE GLI ASSI PER TROVAR C E R OPPURE SOSTITUIRE LE COORDINATE NELL'EQ. GENERICA

UNA RETTA r PUÒ ESSERE ESTERNA $(\gamma\cap r=\emptyset)$, TANGENTE $(\gamma\cap r=\{T\})$ $d(r;C)=R$ O SECANTE $(\gamma\cap r=\{P_1;P_2\})$ RISPETTO A UNA CIRCONFERENZA γ

SFERA: LUOGO DEI PUNTI DELLO SPAZIO EQUIDISTANTI DA UN PUNTO (CENTRO). RAGGIO $=d(P;C)$, $P\in S$

$S: (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2$ $\quad C=(\alpha;\beta;\gamma)$ R=RAGGIO $\Leftrightarrow$ $S: x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ EQ CARTESIANA

NB $C=\left(-\dfrac{a}{2};-\dfrac{b}{2};-\dfrac{c}{2}\right)$ $\quad R=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2-4d}$ $\qquad a^2+b^2+c^2-4d>0$ $\qquad a=-2\alpha$ $b=-2\beta$ $c=-2\gamma$
$d=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-R^2$

PROP. PER QUATTRO PUNTI NON COMPLANARI PASSA UNA E UNA SOLA SFERA

COR. FISSATI QUATTRO PUNTI NON COMPLANARI $\Rightarrow\exists!$ PUNTO EQUIDISTANTE DAI QUATTRO PUNTI DATI

ASSE DI UN SEGMENTO: PIANO ORTOGONALE AL SEGMENTO PASSANTE PER IL SUO PUNTO MEDIO

UN PIANO π È TANGENTE A UNA SFERA $S\Leftrightarrow\pi\cap S=\{P\}\Leftrightarrow d(\pi;C)=R$

TRASFORMAZIONE DEL PIANO: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

ISOMETRIA: TRASFORMAZIONE DEL PIANO CHE CONSERVA LE DISTANZE

TRASFORMAZIONE LINEARE DEL PIANO: $f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ MATRICE CANONICA DI f

TRASLAZIONE: ISOMETRIA NON LINEARE $\quad v = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ $\quad f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+\alpha \\ y+\beta \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x' = x+\alpha \\ y' = y+\beta \end{cases}$

ROTAZIONE DI ϑ INTORNO A O: $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\vartheta - y\sin\vartheta \\ x\sin\vartheta + y\cos\vartheta \end{pmatrix}$ $\quad M = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$ $\quad M^t M = I$

(M É ORTOGONALE) (ISOMETRIA LINEARE)

PROIEZIONE ORTOGONALE SU r, $O \in r$: $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\quad A = w \cdot w^t$ $\quad w$ = BASE ORTONORMALE DI r

(A SIMMETRICA) (LINEARE) $\quad \mathrm{Ker}\, f = r^\perp$; $f^2 = f \Rightarrow A^2 = A$

SIMMETRIA RISPETTO A r: ISOMETRIA (LINEARE $\Leftrightarrow O \in r$) $\Rightarrow A = 2B - I$ $\quad B$ = MATRICE CANONICA DELLA PROIEZIONE ORTOGONALE

TRASFORMAZIONE COMPOSTA: $f \circ g(P) = f(g(P))$ $\quad f\circ g \neq g \circ f$

$f(P) = A(P)$, $g(P) = B(P) \Rightarrow f\circ g(P) = A \cdot B(P)$, $\quad f^k = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ VOLTE}} \Rightarrow f^k(P) = A^k(P)$

f INVERTIBILE $\Leftrightarrow f$ INIETTIVA E SURIETTIVA $\Leftrightarrow \exists g \mid f\circ g = g \circ f = I$ $\quad g = f^{-1}$ $\quad f^{-1}(P) = A^{-1}(P)$

$\Updownarrow$

A INVERTIBILE $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

UNA MATRICE 2×2 É ORTOGONALE $\Leftrightarrow$ É DEL TIPO $\begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & -\cos\vartheta \end{pmatrix}$, $\vartheta \in \mathbb{R}$

CAMBIAMENTO DI COORDINATE: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M^t \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$ $\quad$ (M = MATRICE DI PASSAGGIO DA $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ A $(\vec{e}_1\,'; \vec{e}_2\,')$; É ORTOGONALE $\Rightarrow M^t = M^{-1}$)

FORMULA INVERSA: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \Big| \; M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow T = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & x_0 \\ m_{21} & m_{22} & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$, $\det T = \pm 1$

FORMA QUADRATICA IN x E y: $q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \; \Big| \; q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy$

MATRICE DELLA FORMA QUADRATICA: $Q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ (SIMMETRICA) $\quad q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x; y)\, Q \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

NB q DIAGONALE $\Leftrightarrow Q$ DIAGONALE $\Leftrightarrow a_{12} = 0 \Leftrightarrow q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda x^2 + \mu y^2$

Th $q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Big| \; \lambda, \mu$ AUTOVALORI DI Q, $M^t Q M = D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \Rightarrow$ POSTO $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = M^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda X^2 + \mu Y^2$

CARATTERE DI UNA FORMA QUADRATICA: $q(P) > 0 \Leftrightarrow \det Q > 0,\ \mathrm{tr}\, Q > 0$

$q(P) < 0 \Leftrightarrow \det Q > 0,\ \mathrm{tr}\, Q < 0$

$q(P) \geq 0 \Leftrightarrow \det Q = 0,\ \mathrm{tr}\, Q > 0$

$q(P) \leq 0 \Leftrightarrow \det Q = 0,\ \mathrm{tr}\, Q < 0$

$q(P)$ INDEFINITA $\Leftrightarrow \det Q < 0$

IN GENERALE:
- q DEFINITA POSITIVA $\Leftrightarrow \mu, \lambda > 0$
- q SEMIDEFINITA $\Leftrightarrow \mu = 0 \vee \lambda = 0$

ELLISSE: $P \in \mathcal{E} \Leftrightarrow d(P; F_1) + d(P; F_2) = 2a$, $\; d(F_1; F_2) = 2c$, $\; a > c$ $\quad$ EQ. CANONICA: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $\quad b = \sqrt{a^2 - c^2}$

NB $a = b \Rightarrow c = 0$, $F_1 \equiv F_2 \Rightarrow \mathcal{E}$ É UNA CIRCONFERENZA $\mid A = \pi ab$

ECCENTRICITÁ: $e = \dfrac{c}{a}$ $\quad 0 \leq e < 1$ $\quad \Downarrow \; (e = 0)$

IPERBOLE: $P \in \mathcal{I} \Leftrightarrow |d(P; F_1) - d(P; F_2)| = 2a$, $d(F_1; F_2) = 2c$, $a < c$ $\quad$ EQ. CANONICA: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $\quad b = \sqrt{c^2 - a^2}$

ASINTOTI: $\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = 0$; $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 0$

PARABOLA: $P \in \mathcal{P} \Leftrightarrow d(P; r) = d(P; F)$, $F\left(\dfrac{p}{2}; 0\right)$, $r: x = -\dfrac{p}{2}$, $p = d(F; r) \neq 0$ $\quad$ EQ. CANONICA: $y^2 = 2px$

CONICA: EQUAZIONE DI 2° GRADO IN x, y DEL TIPO $\mathcal{C}: a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$

MATRICE DELLA CONICA:
(NB: A SIMMETRICA) $\Rightarrow A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$; $\mathcal{C}: (x;y;1)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=0$; PARTE PRINCIPALE DI A: $Q=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$
$Q \neq 0$

FORME SPECIALI:
1) ELLISSE REALE: $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$ 2) ELLISSE IMMAGINARIA ($\emptyset$): $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=-1$ 3) ELLISSE DEGENERE (UN PUNTO): $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=0$

4) IPERBOLE REALE: $\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$ 5) IPERBOLE DEGENERE (DUE RETTE): $\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=0$ 6) PARABOLA: $Y^2=2pX$, $p\neq 0$

7) PARABOLA DEGENERE (DUE RETTE PARALLELE): $Y^2=h^2$ 8) PARABOLA DEGENERE (UNA RETTA): $Y^2=0$ 9) PARABOLA IMMAGINARIA (DUE RETTE PARALLELE IMMAGINARIE): $Y^2=-K^2$, $K\neq 0$

Th $\exists\, \mathcal{R}'(O';X;Y) \mid \mathcal{C}$ ASSUME UNA DELLE FORME 1-9 (Th DI RIDUZIONE)

RIDUZIONE: 1) DETERMINO Q 2) AUTOVALORI DI Q 3) DETERMINO GLI AUTOSPAZI $E(\lambda)$ E $E(\mu)$, UNA BASE ORTONORMALE E D 4) PONGO $\mathcal{C}_Q=\mathcal{C}_D$ 5) TRASFORMO L'EQ DI $\mathcal{C}$ 6) COMPLETO AI QUADRATI

Th DI INVARIANZA: $\mathcal{R}\to\mathcal{R}' \Rightarrow \det A=\det A'$ ($rkA=rkA'$, $\det Q=\det Q'$, $trQ=trQ'$)

Th DI RIDUZIONE: $\forall\, \mathcal{C}$ IN $\mathcal{R}$, $\exists\, \mathcal{R}' \mid \mathcal{C}$ ASSUME UNA DELLE FORME CANONICHE:

Ⓐ $|Q|\neq 0 \Rightarrow \mathcal{C}: \lambda X^2+\mu Y^2+p=0$, $\mu,\lambda\neq 0$ $\quad X \parallel E(\lambda)$, $Y \parallel E(\mu)$

Ⓑ $|Q|=0$ A $|A|\neq 0 \Rightarrow \mathcal{C}_\mu Y^2+qX=0$, $q\neq 0$

Ⓒ $|Q|=|A|=0 \Rightarrow \mathcal{C}: \mu Y^2+r=0$

(Ⓑ, Ⓒ) $\Leftrightarrow \lambda=0$, $\mu\neq 0$

Ⓐ CONICA A CENTRO $\Rightarrow O'=\left(\frac{\alpha_{13}}{\det Q};\frac{\alpha_{23}}{\det Q}\right)$ Ⓑ PARABOLA Ⓒ PARABOLA DEGENERE:
- $\frac{r}{\mu}<0 \Rightarrow$ 2 RETTE PARALLELE DISTINTE
- $\frac{r}{\mu}>0 \Rightarrow \emptyset$
- $r=0 \Rightarrow$ 2 RETTE COINCIDENTI

NB SI PUÒ DETERMINARE L'EQ. CANONICA DI UNA CONICA CALCOLANDO $\det A$, $\overbrace{\lambda,\mu}^{\text{AUTOVALORI DI } Q}$

CLASSIFICAZIONE DI UNA CONICA

CONICHE GENERALI: $\det A\neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \det Q>0 \Rightarrow \begin{cases} \det A\cdot trQ>0 \Rightarrow \text{ELLISSE IMMAGINARIA} \\ \det A\cdot trQ<0 \Rightarrow \text{ELLISSE REALE} \end{cases} \\ \det Q<0 \Rightarrow \text{IPERBOLE} \\ \det Q=0 \Rightarrow \text{PARABOLA} \end{cases}$

CONICHE GENERALI: $\det A=0 \Rightarrow \begin{cases} \det Q>0 \Rightarrow \text{ELLISSE DEGENERE} \\ \det Q<0 \Rightarrow \text{IPERBOLE DEGENERE} \\ \det Q=0 \Rightarrow \text{PARABOLA DEGENERE} \end{cases}$