Appunti per esame di Geometria

Geometria

Università degli Studi di Firenze (UNIFI)

25 pag.

Appunti di Geometria-Algebra lineare

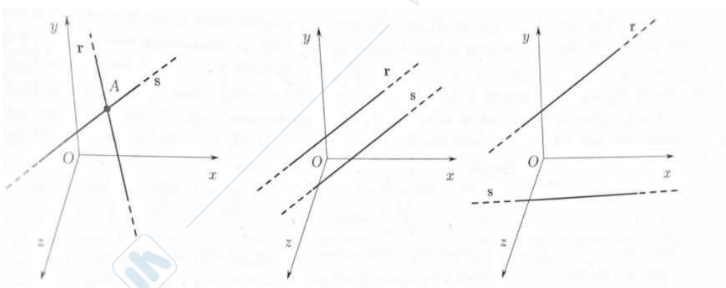
Capitolo 1- Spazio euclideo e vettori

Assiomi di incidenza:

1. Per due punti passa una e una sola retta
2. Per tre punti non allineati passa uno e un solo piano
3. Se una retta e un piano si intersecano in più di un punto, allora la retta è contenuta nel piano
4. Se due piani distinti hanno un punto in comune, allora la loro intersezione è una retta (Spazio tridimensionale)

Assioma delle parallele e direzione di una retta:

1. Incidenti: un punto in comune e complanari
2. Parallele: Nessun punto in comune e complanari
3. Sghembe: Non complanari



Se due rette hanno la stessa direzione sono parallele.

Rette ortogonali: Rette complanari incidenti in un punto O in cui formano 4 angoli uguali e quindi retti

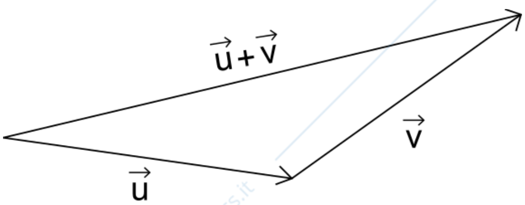
Due rette possono essere ortogonali anche se non incidenti

Vettori

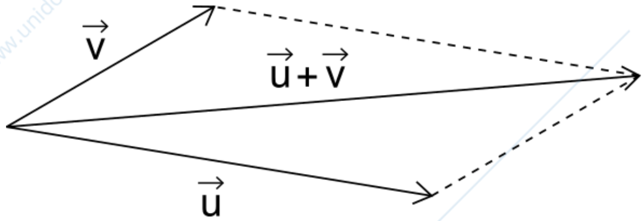
Vettore libero -> Definito da:

1. Modulo
2. Direzione
3. Verso

Somma di vettori: Sia $\overrightarrow{OP} \equiv v$ il vettore v applicato in O e sia $\overrightarrow{PQ} \equiv u$ il vettore w applicato in P. La somma v+u è il vettore libero rappresentano da $\overrightarrow{OQ}$



La somma può anche essere definita tramite la regola del parallelogramma:



Proprietà somma di vettori:

1. Proprietà commutativa: u+v=v+u
2. Proprietà associativa: (w+v)+u=w+(v+u)
3. Esistenza dell'elemento neutro: v+0=v
4. Esistenza dell'opposto del vettore dato

Prodotto per uno scalare

Il prodotto del vettore v per lo scalare t è il vettore tv, caratterizzato da:

1. Modulo: ||tv||=|t| ||v||
2. Direzione di v
3. Verso:
    a. Uguale a v se t>0
    b. Opposto a quello di v se t<0

Proprietà prodotto di un vettore per uno scalare:

1. Distributiva rispetto alla somma di vettori: t(u+v)=tu+tv
2. Distributiva rispetto alla somma di scalari: (s+t)v=sv+tv
3. Associativa del prodotto scalare: s(tv)=(st)v

Sistemi di riferimento

Il vettore nullo è parallelo ad ogni altro vettore

Sia v un vettore non nullo e sia w un vettore parallelo a v. Allora esiste un unico scalare t t.c. w=tv

$$t=+\text{¿}-\frac{\|w\|}{\|v\|}\quad w=+\text{¿}-\frac{\|w\|}{\|v\|}v$$

Sistema di riferimento di un piano:

1. O è un punto di H, detto origine delle coordinate
2. u e v sono due vettori paralleli al piano H e non paralleli tra loro. Questo significa che le rette per O dirette come u e v sono contenute nel piano H e sono distinte: tali rette si dicono assi del sistema di riferimento e si dice che {u,v} è una base del piano H

Combinazioni lineari: Vettori possibile scriverli come w=xu+yv

Supponiamo {u,v} una base di H. Un vettore w è parallelo ad H se e solo se è una combinazione lineare di u e v

Sistemi di riferimento nello spazio

Per poter assegnare delle coordinate a un punto dello spazio abbiamo bisogno di fissare un punto origine O e tre vettori con direzioni indipendenti.

Tre vettori si dicono linearmente dipendenti, se esistono tre scalari a,b,c, non tutti nulli, t.c.:

$$au+bv+cw=0$$

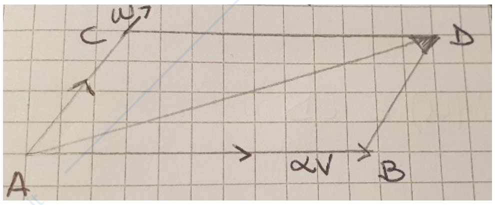
I vettori u, v, w si dicono linearmente indipendenti se non sono LD

Proposizione:

1. Un vettore è LD se e solo se v=0
2. Due vettori sono LD se e solo se sono paralleli
3. Tre vettori di V sono LD se e solo se sono complanari
4. Quattro vettori sono sempre LD

Dimostrazioni:

1. V=xu con u=0 -> v=0
2. Dati v, w LD
   av+bw=0 con (a,b)≠(0,0)
   Supponiamo a≠0
   $v=\frac{-b}{a}w$
   v,w sono paralleli poiché v,w essendo multipli hanno la stessa direzione
3. u, v, w LD -> u=av+bw
   Sono complanari



Coordinate cartesiane nello spazio

Versore: Vettore il cui modulo è uguale a 1 ‖e‖=1

Prodotto scalare: ‖**tv**‖=|t|‖**v**‖

Esistono al massimo due versori: $e_1=\frac{v}{\|v\|}$ ed $e_2=\frac{-v}{\|v\|}$

Due vettori paralleli hanno angolo uguale a 0 se hanno lo stesso verso, mentre uguale a Π se hanno verso opposto. Infatti due vettori non nulli dividono il piano in due angoli, uno convesso ed uno concavo. L'angolo convesso è determinato dal suo coseno.

Vettori ortogonali: Due vettori non nulli si dicono ortogonali se l'angolo tra essi compreso è un angolo retto. Il vettore nullo è per definizione ortogonale a qualsiasi altro vettore. Inoltre due vettori sono ortogonali se il loro prodotto scalare è nullo.

Se v e w sono ortogonali allora:

$\|v+w\|^2=\|v\|^2+\|w\|^2$

Se {i,j,k} formano una base ortonormale dello spazio, il modulo del vettore v=xi+yj+zk è

$\|v\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Proiezioni ortogonali e prodotto scalare

Siano v e w due vettori non nulli e sia a l'angolo formato da v e w. Per la proiezione ortogonale di v lungo w vale la formula:

$v_w = ¿ w, \frac{v}{\|v\|} > \frac{v}{\|v\|}$

$v_w = ¿ w, v > \frac{¿}{¿ v, v > ¿ v ¿} ¿$

Prodotto scalare: Siano v e w due vettori non nulli e sia α l'angolo da essi formato. Il prodotto scalare di v e w è il numero reale definito dalla formula:

$¿ v, w \geq \|v\|\|w\| \cos\alpha$

Sia {i,j,k} una base ortonormale dello spazio. Se v=xi+yj+zk allora:

x=<v,i> y=<v,j> z=<v,k>

Quindi le coordinate x,y,z di v sono il prodotto scalare di v coi versori i,j,k degli assi coordinati.

Dimostrazione

Il vettore yj+zk è parallelo al piano yz, quindi perpendicolare a i

V=xi+(yj+zk) il vettore xi è parallelo a i, mentre yj+zk è perpendicolare ad i, quindi xi è la proiezione ortogonale di v_i di v sull'asse x.

Ma v_i=<v,i>i quindi x=<v,i>

Proprietà del prodotto scalare:

1. Commutativa: <w,v>=<v,w>
2. Lineare sul primo fattore (e quindi sul secondo): <αv,w>=α<v,w> <u+v,w>=<u,w>+<v,w>
   Dimostrazione (Guardare quaderno)
3. Definito positivo: <v,v> ≥0
   Dimostrazione
   <v,v>=‖v^2‖>0, ‖v^2‖=0 se e solo se v=0

Se {i,j,k} formano una base ortonormale dello spazio allora il prodotto scalare dei vettori $v_1=x_1i+y_1j+z_1k$ e $v_2=x_2i+y_2j+z_2k$ è:

$<v_1,v_2>=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$

$V=\sqrt{v \cdot v}$

$\cos\alpha = ¿ v, w > \frac{¿}{\|v\| \|w\|} ¿$

Prodotto vettoriale e prodotto misto

Il prodotto vettoriale di due vettori v e w è: $v\wedge w=\|v\|\ \|w\| \sin\alpha$

Se v e w sono paralleli il loro prodotto vettoriale è nullo

Se {i,j,k} è una terna ortonormale destrorsa.

$i\wedge j=k$ $j\wedge k=i$ $k\wedge i=j$

Proprietà:

1. Anticommutativo: $v\wedge w=-w\wedge v$
2. Bilineare: $(\alpha v)\wedge w=\alpha(v\wedge w)$
3. Dissociativa

Si definisce attraverso il determinante di una matrice

V=i-2j

W=3i+j-+k

$v\wedge w=\begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ = -2i-j+7k

Identità di Lagrange: $\|v\wedge w\|=\|v^2\|\ \|w^2\|-(<v,w>)^2$

Prodotto misto: $<u\wedge v,w>$

Con il prodotto vettoriale è possibile calcolare l'area di una figura, con il prodotto misto il volume-

Geometria analitica di rette e piani nello spazio

Equazione parametrica di una retta nello spazio: Un punto P=(x, y, z) appartiene alla retta r passante per il punto A=(xa, ya, za) e diretta come il vettore $v=[a, b, c]^T$ se e soltanto se esiste uno scalare t tale che: $\begin{cases} x=xa+at \\ y=ya+bt \\ z=za+ct \end{cases}$

I coefficienti a, b, c sono le componenti del vettore posizione: $v_r=\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

Posizione reciproca di due rette nello spazio:

1. **Incidenti**: Prodotto scalare nullo tra i vettori posizione e prodotto misto=0
2. **Parallele**: Prodotto vettoriale nullo tra i vettori posizione
3. **Sghembe**: Prodotto misto≠0

Equazione cartesiana di un piano ortogonale a n:

P=(x ,y, z) A=(xa, ya, za) n=$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

$$ax+by+cz+d=0$$

Equazione cartesiana di un piano per tre punti:

$$\begin{bmatrix} x-xa & y-ya & z-za \\ xb-xa & yb-ya & zb-za \\ xc-xa & yc-ya & zc-za \end{bmatrix}$$

Equazione cartesiana di una retta nello spazio:

n_1=$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ n_2=$\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$

Equazione: ¿

Distanza tra due punti:

P=(x, y, z) Q=(x_2, y_2, z_2)

D(P,Q)=$\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2}$

Distanza tra un punto e un piano:

d(P,H)=$¿ a x_p + b y_p + c z_p + d \vee \frac{¿}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} ¿$

Distanza punto e retta:

d(P,r)=$\frac{\|(P-R)\Lambda v_r\|}{\|v_r\|}$

Capitolo 2-Sistemi lineari

Ambientazione problema: n dimensionale dello spazio cartesiano in cui le incognite sono rappresentate come vettori [x_1, ,x_n] con n componenti e con R^n lo spazio dei vettori.

Le soluzioni del sistema si ottengono attraverso la somma e prodotto per scalare.

Teorema di Rouchè-Capelli -> Aiuta a definire il *rango* ossia il numero di equazioni che realmente contano nel sistema

m= numero di equazioni

n= numero incognite

Sistemi:

1. Determinati

2. Sovradeterminati
3. Sottodeterminati

Insiemi numerici

Per studiare una equazione lineare bisogna ricorrere a un sistema in cui siano definite tutte e quattro le operazioni con le usuali proprietà (campo).

Campo: Q, R, C

Vettori colonna

K-> Campo degli scalari

K^n-> l'insieme degli n componenti di K

$v \in K^n$ -> Vettore colonna a cui appartengono n componenti

$v=[x_1, ,x_n]^T$

Anche in questo caso bisogna introdurre le operazioni di somma e prodotto per i vettori.

Somma vettori:

$$\begin{bmatrix} x1 \\ y1 \\ z1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x2 \\ y2 \\ z2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x1+¿x2 \\ y1+¿y2 \\ z1+¿z2 \end{bmatrix}$$

Prodotto:

$$t\begin{bmatrix} x1 \\ y1 \\ z1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} tx1 \\ ty1 \\ tz1 \end{bmatrix}$$

Spazio vettoriale: Insieme V su cui sono definite le operazioni di somma e prodotto per scalare

Combinazione lineare: Si dice che un vettore v è combinazione lineare dei vettori $v_1, ,v_n$ se esistono degli scalari $t_1, ,t_n \in K$ t.c.:

$$v=t_1v_1+ +t_nv_n$$

Vettori particolari: Vettori in cui è presente un solo 1 e tutte le altre componenti sono 9

$e_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ L'insieme ordinato $\{e_1, \ ,e_n\}$ si dice base canonica di K^n

Ogni vettore è combinazione lineare dei vettori della base canonica

$[x_1, \ x_n]^T=x_1e_1+ +x_ne_n$

Sistemi lineari e matrici

Una matrice A di tipo (m,n) a elementi in K è una tabella rettangolare di numeri:

$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ disposti in *m* righe e *n* colonne. a_{ij} si definisce come il numero che sta sulla i-esima riga e j-esima colonna di A.

Prodotto riga per colonna

Dati un vettore riga **a** e un vettore colonna **v** con lo stesso numero di componenti, il loro prodotto **a v** è lo scalare definito dalla formula:

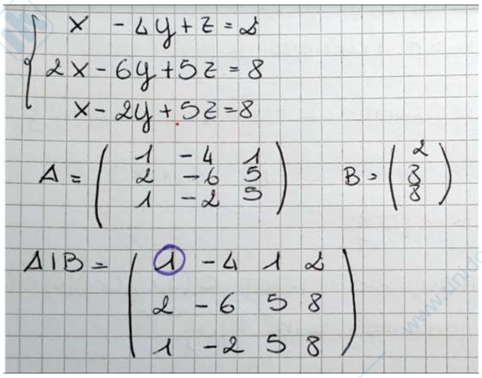
$$\mathbf{a}\,\mathbf{v} = [a_1 \quad a_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = a_1x_1 + \; + a_nx_n$$

Prodotto di una matrice per il vettore colonna

Il numero dei componenti del vettore colonna deve essere uguale al numero delle colonne della matrice.

$$\mathbf{A\,v} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 & a_{12}x_2 & \cdots & a_{1n}x_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & a_{m2}x_2 & \cdots & a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

Matrice completa: Matrice formata dai coefficienti del sistema lineare a cui sono stati aggiunti i termini noti



Dato Ax=b, se b=0 il sistema è omogeneo.

Le soluzioni del sistema Ax=b sono i vettori nella forma $v=v_0+v_h$, dove v_h denota una soluzione qualsiasi del sistema.

Nucleo di una matrice

Data una matrice A di tipo m x n, l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo Ax=0 si dice nucleo della matrice. Lo denoteremo col simbolo Ker(A):

Ker(A)={v ∈ K^n : **Av**=0}

se v_0 è una soluzione particolare del sistema lineare Ax=b, l'insieme delle soluzioni del sistema è: v_0+Ker(A)

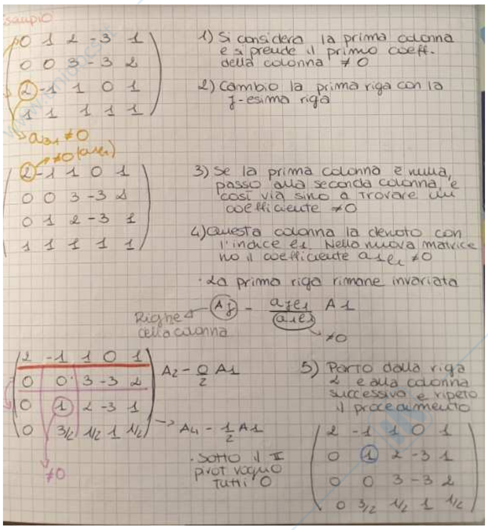
Metodo di eliminazione di Gauss

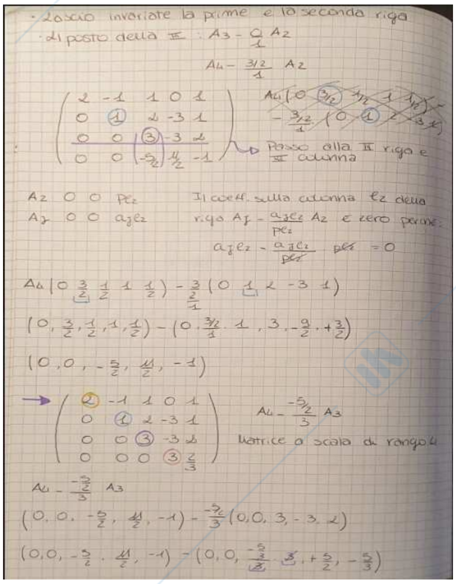
Il metodo permette di:

1. Le operazioni effettuate sulle righe delle matrici complete lasciano invariato l'insieme delle soluzioni di un sistema
2. Tali operazioni vengono effettuate fino a ridurre la matrice completa del sistema a una "matrice a scala", ovvero una matrice sulla quale non è possibile compiere eliminazioni
3. Il sistema corrispondente a una matrice a scala si risolve col metodo di sostituzione all'indietro

Operazioni ammesse sulle righe:

1. Scambio di due righe
2. Aggiungere a una riga una combinazione lineare delle rimanenti





$$A|B=\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\2&-1&0&1&0\\3&-1&1&1&0\end{pmatrix}$$

$$R_3\rightarrow R_3-3\cdot R_1 \quad \begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\2&-1&0&1&0\\0&-1&-2&1&0\end{pmatrix}=$$

$$R_2\rightarrow R_2-2\cdot R_1 \quad \begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\0&-1&-2&1&0\\0&-1&-2&1&0\end{pmatrix}=$$

$$R_2\rightarrow -1\cdot R_2 \quad \begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&2&-1&0\\0&-1&-2&1&0\end{pmatrix}=$$

$$R_3\rightarrow R_3+R_2 \quad \begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&2&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=$$

$$A|B=\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&2&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix} \quad quindi \ A=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&2&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Due sistemi lineari si dicono *equivalenti* quando hanno le stesse soluzioni.

Matrice a scala

Sia U una matrice e siano U_1, ,U_m le sue righe. Se una riga U_i è non nulla il pivot di U_i è il primo elemento non nulla sulla riga. La matrice U si dice matrice a scala se le seguenti condizioni sono soddisfatte:

1. Le righe nulle sono raggruppate in fondo alla matrice
2. In due righe consecutive non nulle il primo pivot della riga superiore viene strettamente prima del primo pivot della riga inferiore

$$\begin{array}{c} \text{pivot} \\ \begin{pmatrix} 0 & \boxed{5} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Rango di una matrice: Il rango di A è il massimo numero di colonne di A LI

Matrice a scala: Se la riga i-esima ha i primi j coefficienti nulli, allora la riga (i+1)-esima ha i primi (j+1) coefficienti nulli

Matrice quadrata: Una matrice A si dice quandrata se il numero delle colonne e il numero delle righe sono uguali. Una matrice quadrata di ordine n è una matrice n x n

Matrice triangolare: Sia U una matrice quadrata, se U è a scala è sempre triangolare ossia tutti i suoi elementi sotto la diagonale principale sono nulli

Rango di una matrice. Teoremi di Rouchè-Capelli

Rango

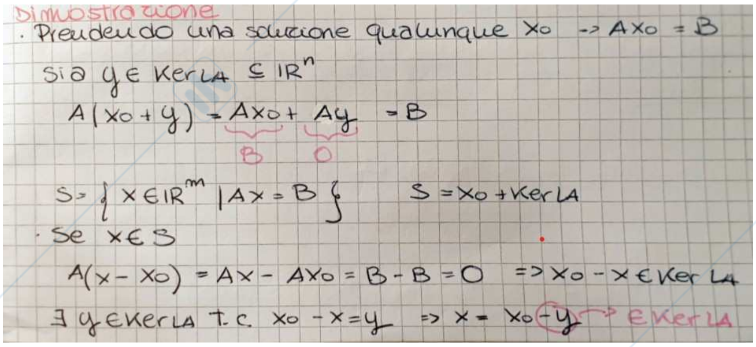
Il rango r(U) di una matrice a scala U è il numero di righe non nulle di U. Se A è una matrice qualsiasi, il rango di A è il rango della matrice a scala U ottenuta a partire da A con l'algoritmo di riduzione di Gauss

Teorema di Rouchè-Capelli

Sia Ax=b un sistema lineare in n incognite a coefficienti in K. Allora:

- Il sistema ammette soluzioni se e solo se il rango della matrice A è uguale al rango della matrice [A|b]
- Se esistono soluzioni, l'insieme delle soluzioni è lo spazio affine $S=v_0+Ker(A)$ che ha dimensione n (colonne)-r(A)

Dimostrazione



Dimostrazione

. Prendendo una soluzione qualunque $x_0 \to Ax_0 = B$

Sia $y \in \operatorname{Ker} L_A \subseteq \mathbb{R}^n$

$A(x_0 + y) = \underbrace{Ax_0}_{B} + \underbrace{Ay}_{0} = B$

$S = \{ x \in \mathbb{R}^m \mid Ax = B \}$ $\quad S = x_0 + \operatorname{Ker} L_A$

. Se $x \in S$

$A(x - x_0) = Ax - Ax_0 = B - B = 0 \Rightarrow x_0 - x \in \operatorname{Ker} L_A$

$\exists\, y \in \operatorname{Ker} L_A$ t.c. $x_0 - x = y \Rightarrow x = x_0 - y \in \operatorname{Ker} L_A$

Soluzioni

Sia Ax=b un sistema in n incognite. Posto r=r(A) e r'=r([A|b]) per il teorema abbiamo tre possibilità:

1. Se r=r' il sistema ammette un'unica soluzione (sistema determinato)
2. Se r<r' il sistema ammette infinite soluzioni (sistema sottoderminato)
3. Se r≠r' il sistema non ammette soluzioni (sistema sovradeterminato)

Capitolo 3- Algebra delle matrici

Somma e prodotto per uno scalare

Una matrice m x n può essere pensata come un vettore con m x n componenti, quindi come un elemento di $K^{m \times n}$. Possiamo quindi definire le operazioni di somma e prodotto per uno sclare.

Prodotto per uno scalare: $A=[a_{ij}]$, $tA=[ta_{ij}]$

Una matrice generica può essere scritta come combinazione lineare delle matrici della base canonica:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{12}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{21}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_{22}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Prodotto righe per colonne

$L_{AB} = L_A \circ L_B$ ossia $(AB)v = A(vB)$

Il prodotto AB è definito solo se il numero di colonne di A coincide con il numero di righe di B

Il numero di righe di AB è uguale al numero di righe di A e il numero di colonne di AB è uguale al numero di colonne di B

Prodotto tra matrici: (m,n) x (n,p) =(m,p)

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 7 + 0\cdot 1 + 1\cdot 0 & 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 1\cdot 4 \\ 1\cdot 7 + 5\cdot 1 + (-1)\cdot 0 & 1\cdot 1 + 5\cdot 0 + (-1)\cdot 4 \\ 3\cdot 7 + 2\cdot 1 + 0\cdot 0 & 3\cdot 1 + 2\cdot 0 + 0\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 12 & -3 \\ 23 & 3 \end{pmatrix}$$

Proprietà prodotto tra matrici:

1. Il prodotto tra matrici NON è commutativo
2. $A \cdot 0 = 0$
3. $A \cdot id = A$
4. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
5. $A(\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2) = \lambda_1 (AB_1) + \lambda_2 (AB_2)$
6. $(\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2)^T = \lambda_1 B_1^T + \lambda_2 B_2^T$
7. $(A \cdot B) = B^T \cdot A^T$
8. A è simmetrica se e solo se $A^T = A$

Matrice nulla: Matrice m x n con tutti gli elementi uguali a 0

Matrice identità: Matrice n x n che ha gli elementi sulla diagonale principale tutti uguali a 1 e gli altri elementi uguali a 0

matrice nulla

$$A(n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

WWW.ANDREAMININI.ORG

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

WWW.ANDREAMININI.ORG

Matrice diagonale: Matrice quadrata che ha tutti gli elementi al di fuori della diagonale principale nulli

diagonale

$$A(n) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

WWW.ANDREAMININI.ORG

La matrice nulla e la matrice identità sono matrici diagonali

Potenza di una matrice quadrata: Per ogni intero $k \geq 2$ possiamo definire la potenza k-esima A^k di una matrice quadrata A come prodotto di A^{k-1} per A

$A^k = A^{k-1} A = AA....A$

Come per i numeri si pone: $A^0 = I$ e $A^1 = A$

Matrici invertibili

Siano A e B due matrici quadrate di ordine n. Si dice che B è una matrice inversa di A se AB=BA=I

Si dice che A è invertibile se esiste una matrice inversa di A.

Una inversa sinistra di una matrice A di tipo (m,n) è una matrice B di tipo (n,m) t.c. $BA=I_n$; un'inversa destra di A è una matrice B di tipo (n,m) t.c. $AB=I_m$

Sia A una matrice quadrata:

1. Se B e C sono, rispettivamente, un'inversa destra e un'inversa sinistra di A, allora B=C e, quindi, B è un'inversa di A
2. Se A è invertibile, A ha un'unica matrice inversa che si denota con il simbolo A^{-1}

Dimostrazione

L'ipotesi 1) significa che AB=I=CA. La tesi B=C segue dalla proprietà associativa del prodotto e dal fatto che la matrice identità è l'elemento neutri per il prodotto di matrici

$$B=IB=(CA)B=C(AB)=CI=C$$

Una matrice quadrata di ordine n è invertibile se e solo se ha rango r (massimo possibile)

Condizioni di invertibilità

Per una matrice A quadrata di ordine n le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. A ha rango massimo: r(A)=n
2. L'unica soluzione di Ax=0 è x=0 t.c. Ker(A)=

{0}

3. A è invertibile
4. A ha un'inversa sinistra
5. A ha un'inversa destra

~~Se A e B sono due matrici quadrate dello stesso ordine AB=I, allora A e B sono invertibili,~~ $B=A^{-1}$ ~~e~~ $A=B^{-1}$

Inversa di una matrice 2 x 2

Una matrice $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ è invertibile se e solo se ad-bc≠0, e in tal caso:

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Inversa di un prodotto

Siano A e B due matrici quadrate di ordine n. La matrice prodotto AB è invertibile se e solo se A e B sono invertibili. In tal caso:

$$(AB)^{-1}= B^{-1} A^{-1}$$

Dimostrazione

$(AB)(B^{-1}A^{-1})=I$

$((B^{-1}A^{-1})A)B=I$

Matrice trasposta e matrice simmetrica

Matrice trasposta: La trasposta di una matrice A è la matrice A^T che ha per righe le colonne di A: l'elemento di posto

(i, j) di A è l'elemento di posto (j, i) della matrice A^T

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 8 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Proprietà matrice trasposta:

1. Se A e B sono matrici m x n e t ∈ K, allora $(A + B)^T= A^T + B^T$ e $(tA)^T = tA^T$
2. Per ogni matrice A $(A^T)^T=A$
3. Supponiamo AB sia definito. Allora anche $B^T A^T$ è definito e $(AB)^T = B^T A^T$
4. Sia A una matrice quadrata invertibile. Allora A^T è invertibile, e $(A^T) = (A^{-1})^T$

Matrice simmetrica: Una matrice A si dice simmetrica se $A^T = A$. Una matrice A si dice antisimmetrica se $A^T = -A$

ESEMPIO

$$M=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^{AS} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad M^S = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

WWW.ANDREAMININI.ORG

Capitolo 4-Spazi vettoriali e applicazioni lineari

Spazio vettoriale: Insieme in cui sono definite le operazioni di somma e prodotto per uno scalare

Concetto principale: Applicazioni lineare

Applicazioni lineari: Funziona t.c. L: V -> W tra spazi vettoriali si dice lineare se preserva le operazioni di somma e prodotto per uno scalare, nel senso che $L(v_1+v_2)= L(v_1) + L(v_2)$ e che $L(tv)= t L(v)$ per ogni scalare t e per ogni vettore v ϵ V.

Spazio vettoriale: Assiomi ed esempi

Spazio vettoriale sul campo K

Uno spazio vettoriale sul campo K è un insieme V, i cui elementi si dicono vettori dotato di:

- Un'operazione interna che a una coppia di vettori v e w di V associa un vettore di V che si dice vettore somma di v e w e si denota col simbolo v + w
- Un'operazione esterna che a uno scalare t ϵ K e a un vettore v ϵ V associa un vettore di V che si dice prodotto di v per lo scalare t e si denota con il simbolo tv

Proprietà:

1. Commutativa della somma
2. Associativa della somma
3. Esistenza elemento neutro della somma
4. Esistenza dell'opposto di un dato vettore
5. Proprietà distributiva del prodotto per uno scalare rispetto alla somma di vettori
6. Proprietà distributiva del prodotto per uno scalare rispetto alla somma di scalari
7. Proprietà associativa del prodotto per uno scalare
8. Normalizzazione del prodotto per uno scalare

Riprendendo il concetto di Combinazione Lineare:

Sia A una matrice m x n e siano $c_1, \ ,c_n \in K^m$ le colonne di A. Se x è il vettore $[t_1, \ ,t_n]^T$, il prodotto Ax è la combinazione lineare delle colonne di A con coefficienti $t_1, \ ,t_n$:

$$A\begin{bmatrix} t_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ t_n \end{bmatrix} = tc_1 + \quad +tc_n$$

Sottospazi vettoriali

Sia V uno spazio vettoriale. Un sottoinsieme H di V si dice sottospazio vettoriale se H è uno spazio vettoriale rispetto alle operazioni di somma e prodotto per uno scalare di V. Questo è il caso se e solo se H soddisfa le seguenti proprietà:

1. Il vettore nullo 0_v appartiene a H
2. H è chiuso rispetto alla somma
3. H è chiuso rispetto al prodotto

Applicazioni lineari

Sia A la matrice che ha come elemento di posto (i, j) lo scalare a_{ij}. Possiamo riscrivere nella forma compatta y=Ax

Data la matrice A di tipo (m, n), la funzione $L_a : K^n \to K^m$ definita dalla formula:

$$L_a(x) = Ax \text{ per ogni } x \in K^n$$

Si dice applicazione rappresentata dalla matrice A

Sia A una matrice di tipo (m, n). La funzione $L_a: K^n \to K^m$ gode delle seguenti proprietà:

1. L è additiva:
$$L(x_1+x_2) = L(x_1) + L(x_2)$$
2. L è omogenea:
$$L(tx) = tL(x)$$

Definizione di applicazione lineare

Siano V e W due spazi vettoriali sul campo K. Una funzione L : V -> W si dice lineare se:

1. L è additiva:

   $$L(v_1+v_2) = L(v_1) + L(v_2)$$

2. L è omogenea:

   $$L(tv) = tL(v)$$

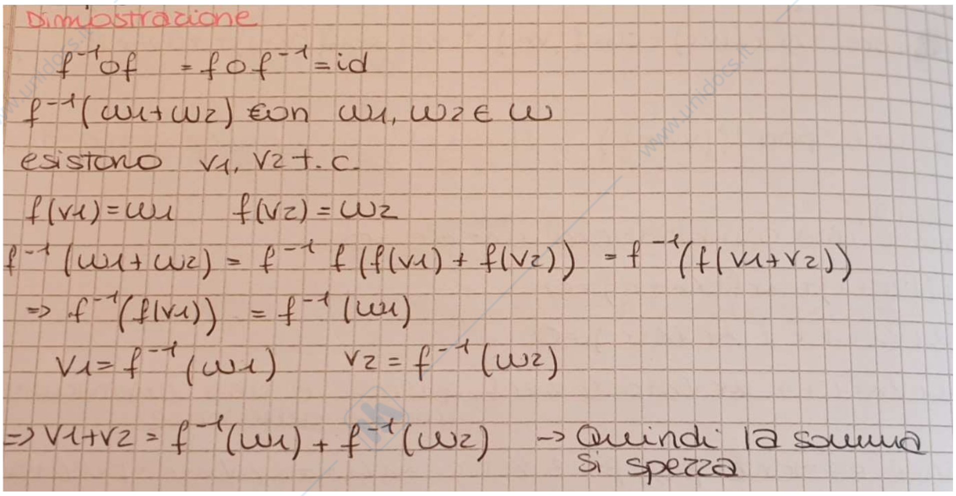
Criterio di invertibilità per le funzioni

Una funzione è invertibile se e solo se è iniettiva e suriettiva

Linearità della funzione inversa

Sia L : V -> W un'applicazione lineare iniettiva e suriettiva. Allora la funzione inversa L^{-1} : W -> V è lineare

Dimostrazione



Dimostrazione

$f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = id$

$f^{-1}(w_1+w_2)$ con $w_1, w_2 \in W$

esistono v_1, v_2 t.c.

$f(v_1)=w_1$ $\quad f(v_2)=w_2$

$f^{-1}(w_1+w_2) = f^{-1}(f(v_1)+f(v_2)) = f^{-1}(f(v_1+v_2))$

$\Rightarrow f^{-1}(f(v_1)) = f^{-1}(w_1)$

$v_1 = f^{-1}(w_1)$ $\quad v_2 = f^{-1}(w_2)$

$\Rightarrow v_1+v_2 = f^{-1}(w_1)+f^{-1}(w_2)$ -> Quindi la somma si spezza

Basi

Sia V uno spazio vettoriale sul campo K. Un insieme ordinato B={b_1,   ,b_n} di vettori di V si dice base di V se ogni vettore v di V si scrive in uno e un solo modo come combinazione lineare

$$V=t_1b_1+\quad+t_nb_n$$

Di $b_1,\dots,b_n$

Base di Ker(A)

Sappiamo che l'insieme Ker(A) delle soluzioni del sistema omogeneo Ax=0 è un sottospazio vettoriale di K^n. Risolvendo il sistema si trova una base di Ker(A): per il teorema di Rouchè-Capelli, detto r il rango di A, se n>r, esistono dei vettori t.c. un vettore v di Ker(A) si scrive in uno e un solo modo come combinazione lineare:

$$v= t_1v_1+ \quad +t_nv_n$$

Quindi $v_1,\dots,v_n$ è una base di Ker(A)

Nucleo, immagine e insiemi generatori

Ad ogni applicazione lineare sono associati due sottospazi: un nucleo e un'immagine

Definizione di Immagine

Sia L : V -> W una funzione. Per ogni sottoinsieme U di V, l'insieme delle immagini di elementi di U mediante L si dice immagine di U e si denota con il simbolo L(U):

$$L(U) = \{w \in W : \text{esiste } v \in U \text{ t.c. } w=L(v)\}$$

Definizione di nucleo

Sia L : V -> W un'applicazione lineare.

- Il nucleo Ker(L) è l'insieme delle controimmagini del vettore nullo 0_w di W:
$$Ker(L) = \{v \in V : L(v) = 0_w\}$$

Sia L : V -> W un'applicazione lineare. Il nucleo Ker (L) è un sottospazio vettoriale del dominio V; l'immagieìne Im (L) è un sottospazio vettoriale del codominio W.

Span: Insieme delle combinazioni lineari di $v_1, \quad ,v_k$

Insieme di generatori

Sia $v_1, \quad v_n$ vettori di uno spazio vettoriale V. Si dice che $\{v_1,\dots v_n\}$ è un insieme di generatori di V se ogni vettore di V è combinazione lineare di $v_1,\dots,v_n$, cioè se $V=Span(v_1,\dots.v_n)$

Intersezione e somma di sottospazi

Siano H e K due sottospazi di uno spazio vettoriale V.

L'intersezione

$$H\cap K = \{v \in V \text{ t.c. } v \in H \text{ e } v \in K\}$$

E' un sottospazio di V

Somma di sue sottospazi:

$H + K = \{v \in V \text{ t.c. esistono } h \in H \text{ e } k \in K \text{ t.c. } v = h+k\}$

Criterio di iniettività

Un'applicazione lineare L : V -> W è iniettiva se e solo se

$$Ker(L) = \{0\}$$

Dimostrazione

Se f è iniettiva: sappiamo che f(0)=0 quindi v ϵ V t.c. f(v)=0 ossia v ϵ Ker si ha v=0 per l'iniettività di f

Insieme di vettori linearmente dipendenti

Si dice che l'insieme $\{ v_1, \ ,v_n\}$ di vettori di V è linearmente dipendente se esistono gli scalari $t_1, \ ,t_n$ non tutti nulli t.c. :

$$t_1v_1+ \ +t_nv_n=0$$

Si dice che l'insieme $\{v_1, \ v_n\}$ è linearmente indipendente se non è linearmente dipendente, cioè se un'uguaglianza $t_1v_1+ \ +t_nv_n=0$ implica $t_1 = t_2 = t_n =0$

Sia V uno spazio vettoriale. L'insieme $\{b_1, \ ,b_n\}$ è una base di V se e solo se:

1. $\{b_1, \ ,b_n\}$ è un insieme di generatori di V
2. $\{b_1, \ ,b_n\}$ è l'insieme indipendente

Sia L : V -> W un'applicazione lineare iniettiva. Se l'insieme $\{ v_1, \ ,v_n\} \subseteq V$ è linearmente indipendente, allora l'insieme $\{ L(v_1),...,L(v_n)\} \subseteq W$ è linearmente indipendente

Dimostrazione

Siamo $v_1, \ ,v_k$ LI e poiché iniettiva Ker={0}

$\alpha f(v_1)+ \ +\alpha_k f(v_k)=0$

$f(\alpha v_1) + f(\alpha_k v_k)=0$

allora: $\alpha v_1+ \ + \alpha_k v_k=0$

Quindi sono LI e $\alpha_1= \alpha_k=0$

Dimensione

Dimensione: Minimo numero di parametri per descrivere i vettori dello spazio

Ogni base di uno spazio di dimensione n consiste di esattamente n vettori

Dim(V)= massimo numero di vettori LI di V

Dimensione:

1. **Finita**: Fissato uno spazio vettoriale V esiste un numero *m* t.c. ogni insieme linearmente indipendente di vettori di V abbia cardinalità ≤ *m*
2. **Infinita**: Per ogni intero positivo m esiste un insieme linearmente indipendente di vettori di V di cardinalità maggiore di *m*

Lemma fondamentale

Uno spazio vettoriale si dice di dimensione finita se V ammette un insieme di generatori finito

Teorema

Sia V uno spazio di dimensioni finita allora:

- Un sottoinsieme LI di V di cardinalità n è una base di V
- Se V ha una base di cardinalità n, allora dim(V)=n
- Le basi esistono ed hanno tutte lo stesso numero di elementi

Siano H ⊆ V spazi vettoriali di dimensione finita. Se dim(H)=dim(V), allora H=V

Rango di una matrice

Rango di una matrice: Dimensione dello spazio generato dalle righe della matrice, e anche la dimensione dello spazio generato dalle colonne.

Il rango è il massimo numero di righe LI, e anche il massimo numero di colonne LI.

La somma della dimensione del nucleo e del rango (Ker(L)+r=m}) è il numero delle colonne della matrice.

dim Im= span {colonne} = r

Soluzioni di un sistema lineare: n – r

Sia A una matrice (m x n), lo spazio colonna di A coincide con l'insieme dei vettori b di K^m per i quali il sistema lineare Ax=b ammette soluzione, o ancora con l'immagine dell'applicazione lineare L_a associata ad A:

$$Col(A)=Im(L_a)$$

Teorema di nullità più rango per le matrici

Se A è una matrice con n colonne di rango r, allora Ker(A)= n – r

Teorema

Il rango per righe e il rango per colonne di una matrice A coincidono:

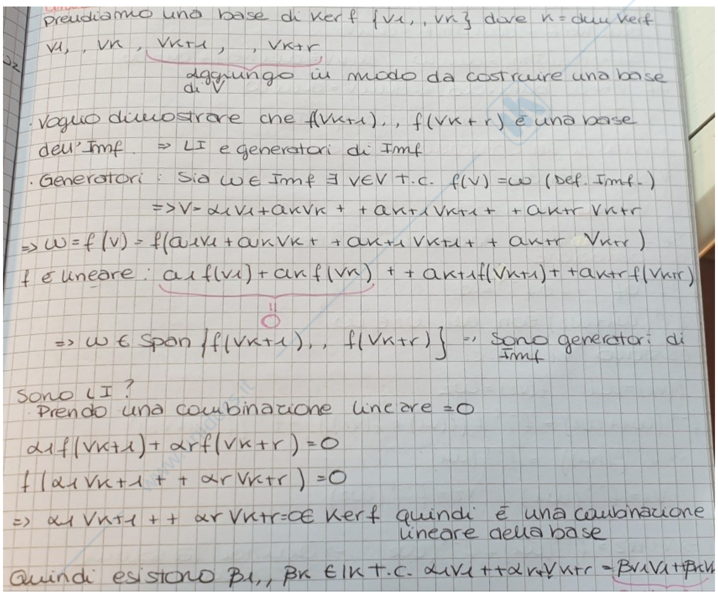
dim Span{righe A}= dim Span{colonne A}

Teorema di nullità più rango

Sia L : V -> W un'applicazione lineare. Se V ha dimensione finita, allora:

$$\dim (V) = \dim Ker(L) + \dim Im(L)$$

Dimostrazione


prendiamo una base di Ker f $\{v_1, , v_k\}$ dove $k = \dim Ker f$

$v_1, , v_k, \underbrace{v_{k+1}, , v_{k+r}}_{\text{aggiungo in modo da costruire una base di V}}$

. Voglio dimostrare che $f(v_{k+1}), , f(v_{k+r})$ è una base dell'Imf. ⇒ LI e generatori di Imf

. Generatori: Sia $w \in Imf$ $\exists v \in V$ t.c. $f(v) = w$ (Def. Imf.)

$\Rightarrow v = \alpha_1 v_1 + a_k v_k + + a_{k+1} v_{k+1} + + a_{k+r} v_{k+r}$

$\Rightarrow w = f(v) = f(a_1 v_1 + a_k v_k + + a_{k+1} v_{k+1} + + a_{k+r} v_{k+r})$

f è lineare: $\underbrace{a_1 f(v_1) + a_k f(v_k)}_{=0} + + a_{k+1} f(v_{k+1}) + + a_{k+r} f(v_{k+r})$

$\Rightarrow w \in Span\{f(v_{k+1}), , f(v_{k+r})\}$ ⇒ Sono generatori di Imf

Sono LI?

. Prendo una combinazione lineare $=0$

$\alpha_1 f(v_{k+1}) + \alpha_r f(v_{k+r}) = 0$

$f(\alpha_1 v_{k+1} + + \alpha_r v_{k+r}) = 0$

$\Rightarrow \alpha_1 v_{k+1} + + \alpha_r v_{k+r} = 0 \in Ker f$ quindi è una combinazione lineare della base

Quindi esistono $\beta_1, , \beta_k \in K$ t.c. $\alpha_1 v_1 + + \alpha_r v_{k+r} = \beta_1 v_1 + \beta_k v_k$

Ottengo $\beta_1 v_1 + \dots + \beta_k v_k - \alpha_1 v_1 - \dots - \alpha_k v_{k+r} = 0$

$\Rightarrow \beta_1 = \beta_k = \alpha_1 = \alpha_r = 0$

Quindi i miei vettori $f(v_{k+1}), \dots, f(v_{k+r})$ sono LI e generatori di Imf quindi sono una base dell'Imf

Abbiamo: $k = \dim \ker f$ $\quad k+r = \dim V$

$r = \dim \operatorname{Im} f$

Sia L : V -> W un'applicazione lineare tra spazi di dimensione finita. Siano n la dimensione di V, m la dimensione di W e r il rango di L. Allora:

- L è iniettiva se e solo le r=n
- L è suriettiva se e solo se r=m
- L è biettiva se e solo so r=m=n

Somma diretta e formula di Grassmann

La formula di Grassmann esprima la relazione tra la dimensione dell'intersezione e la dimensione della somma di due sottospazi.

Dati due spazi vettoriali H e K sul campo K, la somma diretta H⊕K di H e K è lo spazio su K così definito:

- Gli elementi che lo formano sono coppie ordinate (h,k) formate da un vettore h di H e da un vettore k di K
- La somma è definita da: $(h_1,k_1)+(h_2,k_2)=(h_1+h_2,k_1+k_2)$
- Il prodotto per lo scalare è definito da: t(h,k)=(th,tk)

Se H e K sono spazi vettoriali su K di dimensione finita, allora:

$$\dim(H\oplus K)=\dim(H) + \dim(K)$$

Teorema-Formula di Grassmann

Siano H e K due sottospazi di uno spazio vettoriale V. Supponiamo che H e K abbiano dimensione finita. Allora:

$$\dim(H+K)=\dim(h) + \dim(K) - \dim(H\cap K)$$

Capitolo 5-Determinante

Il determinante è diverso da 0 se e solo se le righe della matrice sono LI

Proprietà fondamentali:

1. Il determinante è diverso da zero se e solo se la matrice è non singolare
2. Il determinante è il polinomio omogeneo di grado n negli elementi della matrice
3. Il determinante di un prodotto di matrici è il prodotto dei determinante det(AB)=det(A) det(B)

Determinante e mosse di Gauss

Determinante: Prodotto dei pivot della matrice

Segno: Dipende dal numero di scambi di righe che il MEG richiede

Teromea-Determinante e MEG

Esiste un'unica funzione

$$\det : M_K(n, n) \to K$$

con le seguenti proprietà:

- **Invarianza per scorrimento**: Se B è ottenuta da A sommando a una riga un multiplo di un'altra riga, det(B)=det(A)
- **Alternanza**: Se B è ottenuta da A scambiando due righe, allora det(B)= -det(A)
- **Normalizzazione**: se U è una matrice triangolare alta, det (U) è il prodotto degli elementi sulla diagonale principale di U:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \det(A)= 2 \cdot 3 \cdot (-1) \cdot 4$$

Matrici non singolari

Per una matrice quadrata A di ordine n le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- r(A)=n
- det(A)≠0
- A è invertibile

Annullamento del determinante

Il determinante di A è nullo nei seguenti casi:

1. Una riga o una colonna è nulla
2. Due righe o due colonne sono uguali
3. Una riga è combinazioni lineare delle altre righe (o stessa cosa per le colonne)

Parità di permutazione

- Ogni permutazione σ è il prodotto di un certo numero di cambi
- Se una permutazione σ è il prodotto di un numero pari (rispettivamente dispari di scambi), allora ogni altra decomposizione di σ come prodotti di scambi ha un numero pari di fattori

Permutazioni pari e dispari

Una permutazione σ si dice pari se è il prodotto di un numero pari di scambi. Si pone $(-1)^{\sigma}$=1 se σ è pari, $(-1)^{\sigma}$=-1 se σ è dispari.

Determinante di una matrice di permutazione

Supponiamo che esista la funzione determinante con le proprietà richieste. Allora il determinante della matrice di permutazione P_{σ} è uguale a 1 se σ è pari, è pari a -1 se σ è dispari: $det(P_{\sigma})=(-1)^{\sigma}$

Formula esplicita per il determinante

Formula analitica del determinante

Sia A= [a_{ij}] una matrice n x n. Il determinante di A è lo scalare:

$$det(A)=\sum_{\sigma \epsilon S_n} (-1)^{\sigma} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

è l'unica funzione M_K (n, n) -> K con le seguenti proprietà:

1. È multilineare e alternante come funzione delle righe della matrice
2. Vale 1 per la matrice identità (normalizzazione)

Determinante: Polinomio omogeno di grado n

Funzione multilineare

Sia V uno spazio vettoriale sul campo K. Una funzione V -> K si dice multilineare se, fissate arbitrariamente tutte le variabili tranne una, D è una funzione lineare della rimanente variabile.

Determinante della matrice trasposta

Per ogni matrice quadrata di A: det(A^T)=det(A)

Sviluppo di Laplace

Completamento algebrico

Sia A=[a_{ij}] una matrice quadrata di ordine n. Per ogni coppia (i, j) con 1≤i, j≤n, sia A_{ij} la sottomatrice quadrata di A ottenuta cancellando la riga i e la colonna j di A; il determinante $C_{ij} = (-1)^{i+j}det(A_{ij})$ si dice completamento algebrico dell'elemento a_{ij}

Teorema-sviluppo di Laplace

Sia A una matrice quadrata di ordine n e sia C_{ij} il completamento algebrico dell'elemento a_{ij}. Allora:

- Fissato un indice di riga i, vale la formula det(A) = $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det\ (A_{ij})$ che si dice sviluppo di Laplace del determinante rispetto alla riga i
- Fissato un indice di colonna j, vale la formula det(A)=$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det\ (A_{ij})$ che si dice sviluppo di Laplace del determinante rispetto alla colonna j

Formula di Laplace per la matrice inversa

Sia A una matrice quadrata e sia A^* la matrice che ha come elemento di posto (j, i) il complemento algebrico C_{ij} di A, Allora:

$AA^* = A^*A = det(A)I$

In particolare, se det(A)≠0,

$$A^{-1} = \frac{1}{det\ (A)} A^{¿}$$

$det(A^{-1}) = det(A)^{-1}$

Il teorema di Binet e il determinante di un'applicazione lineare

Se A e B sono matrici quadrate di ordine n, allora: det(AB)= det(A) det(B)

Capitolo 6-Autovalori e Autovettori

Autovettore: Un autovettore è un vettore non nullo v la cui direzione è lasciata invariata da L

Autovettore e Autovalori di un'applicazione lineare

Matrice diagonale: Matrice i cui elementi significativi si trovano sulla diagonale principale

$$diag(\lambda_1, \ ,\lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \lambda_2 & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Sia L : V -> V un' applicazione lineare, e sia B={v_1, ,v_n} una base di V. La matrice che rappresenta L rispetto alla base B è la matrice diagonale diag(λ_1, ,λ_n) se e solo se L(v_k)= $\lambda_k v_k$ per ogni k=1, ,n

Autovettori: Vettori non nulli per i quali esiste uno scalare λ per cui L(v)= λv

L(v)= λv si dice equazione degli autovettori e le soluzioni sono uno coppia (v, λ) formata da un autovettore e un autovalore.

Autovalori e Autovettori di un'applicazione lineare

Sia L: V -> V un'applicazione lineare. Un vettore v ϵ V si dice autovettore di L se:

1. V non è il vettore nullo
2. Esiste λ ϵ K t.c. L(v)=λv

V è un autovettore di L se e solo se L(v) è parallelo a v

L(v) = λv = λI(v) dove I è l'applicazione lineare identità

$(L-\lambda I)(v) = 0$

Un vettore v è un autovettore di L se e solo se è un vettore non nullo nel nucleo $L-\lambda I$

Autospazi di un'applicazione lineare

Per ogni $\lambda \in K$ poniamo:

$$V_\lambda = Ker(L-\lambda I) = \{v \in V : L(v) = \lambda v\}$$

Il sottospazio V_λ di V si dice autospazio di L relativo all'autovalore λ. I suoi elementi non nulli sono precisamente gli autovettori di L relativi all'autovalore fissato.

Autovalori e Autovettori di una matrice

Sia A una matrice quadrata di ordine n. Un vettore non nullo $x \in C^n$ si dice autovettore di A se esiste uno scalare $\lambda \in C$ t.c. $Ax=\lambda x$

Lo scalare λ è univocamente determinato da x e si dice autovalore di A relativo all'autovettore di x

Sia A una matrice quadrata di ordine n a elementi in K, e supponiamo che $S=[b_1, \; ,b_n]$ sia una matrice invertibile in $M_K(n, n)$. Allora $S^{-1} AS= diag(\lambda_1, \; ,\lambda_n)$ se e solo se $Ab_k= \lambda_k b_k$ per ogni k=1, 2,…n

Una matrice quadrata reale A di ordine n si dice diagonalizzabile su R se esiste una matrice quadrata reale e invertibile S di ordine n t.c. $S^{-1}AS$ sia una matrice diagonale

Primo criterio di diagonalizzabilità

Una matrice quadrata A di ordine n è diagonalizzabile su K se e solo se K^n ha una base formata da autovettori di A

Ricerca di autovalori e autovettori

Soluzione: Riportare secondo membro dell'equazione uguale al primo moltiplicandolo per la matrice identità: $Ax=\lambda Ix$

$(A-\lambda I)x=0$

Uno scalare $\lambda_0 \in C$ è un autovalore di A se e solo se λ_0 è una soluzione dell'equazione $\det(A-\lambda i)=0$ che si dice equazione caratteristica di A

Ricerca autovettori e autovalore di A:

1. Si trovano gli autovalori di A risolvendo l'equazione caratteristica $\det(A-\lambda I)=0$
2. Per ogni autovalore λ_0 trovato nel primo passo si risolve il sistema omogeneo: $(A-\lambda_0 I)x=0$
   Le soluzioni non nulle sono gli autovettori di A relativi all'autovalore di λ_0

Polinomio caratteristico

Sia A una matrice quadrata di ordino n. La funzione $\det(A-\lambda I)$ è un polinomio di grado n nella variabile λ: $\det(A-\lambda I)= (-1)^n\lambda^n + c_1\lambda^{n-1}+ \; +c_{n-1}\lambda+c_n$ che si dice *polinomio caratteristico* di A. Il secondo ed ultimo coefficiente sono: $c_1= (-1)^{n-1}tr(A)$ $c_n=\det(A)$

tr(A): Somma degli elementi di A sulla diagonale principale

Esempio

A ha ordine 2: det(A-λI)= λ^2-tr(A) λ+det(A)

Molteplicità algebrica: Molteplicità della radice λ del polinomio P(λ_0) ossia: $P_f(\lambda)=(\lambda_0-\lambda)^{m(\lambda_0)}$

Sia A una matrice quadrata reale o complessa di ordine n. Allora A ha esattamente n autovalori complessi $\lambda_1, \ , \lambda_n$. Inoltre la traccia e il determinante di A sono, rispettivamente, la somma e il prodotto degli autovalori:

tr(A)= $\lambda_1+\lambda_2+ \ +\lambda_n$

det(A)= $\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n$

Molteplicità geometrica di un autovalore

Sia A una matrice quadrata di ordine n con elementi nel campo K. Fissato un autovalore λ ϵ K di A, l'*autospazio* di A relativo a λ è il sottospazio di K^n: V_λ= Ker(A-λI)={v ϵ K: Av=λv}

La molteplicità geometria g_λ di un autovalore λ di A è la dimensione dell'autospazio V_λ: g_λ = dim{v ϵ K^n : Av=λv}

g_λ =n – r(A- λI)

Matrici simili

Una matrice B si dice simile a una matrice A se esiste una matrice invertibile S t.c. $B=S^{-1}AS$

Principali invarianti per similitudine

Supponendo che le matrici A e B siano simili. Allora:

1. Le due matrici hanno lo stesso polinomio caratteristico
2. Le due matrici hanno gli stessi autovalori, con uguali molteplicità algebrica e geometria
3. Le due matrici hanno uguale rango, traccia e determinante