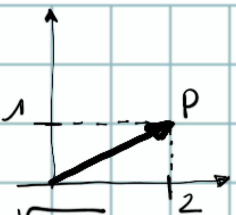
Vettori

$\mathbb{R}^2$ $P(2,1)$



vettore (caratteristiche)
- DIREZIONE
- VERSO
- MODULO - lunghezza

$\vec{v}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \|\vec{v}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ (MODULO)

Operazioni con vettori

(1) MOLTIPLICAZIONI PER SCALARI

$\vec{v}$ vettore, $\lambda \in \mathbb{R}$ VETTORE · SCALARE $\Rightarrow$ VETTORE

$\lambda \cdot \vec{v}$ stessa direzione, modulo $\cdot \lambda$, verso opposto (se è $-\lambda$), uguale (se è $+\lambda$)

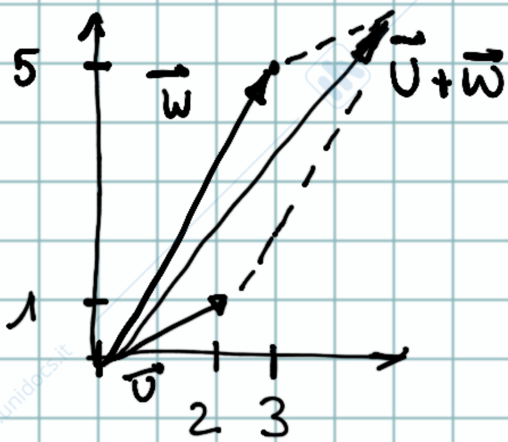
Esempio -> (1) $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\lambda = 3$ $\lambda\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 \\ 1 \cdot 3 \end{pmatrix}$

(2) SOMMA DI VETTORI

$\vec{v} + \vec{w}$

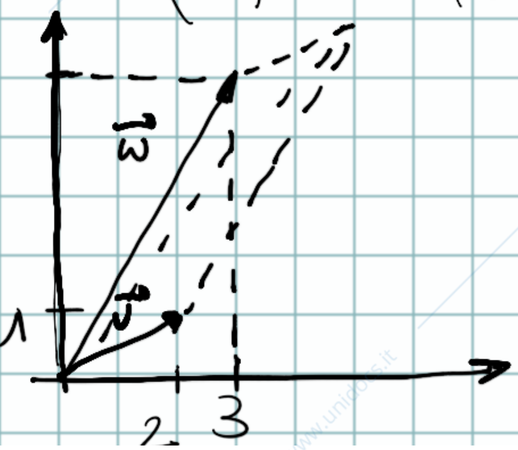
regola del parallelogramma

Esempio (1) $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{w}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$



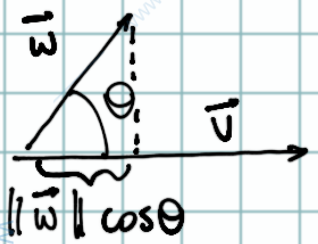
SOMMA TRA I VETTORI

$\vec{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ $\vec{w} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ $\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$ VETTORE + VETTORE $\Rightarrow$ VETTORE



③ PRODOTTO SCALARE

VETTORE · VETTORE → SCALARE



$\vec{w}\cdot\vec{v} = \|\vec{v}\|\|\vec{w}\|\cos\theta$ prodotto del modulo di $\vec{v}$ per la proiezione di $\vec{w}$ su $\vec{v}$

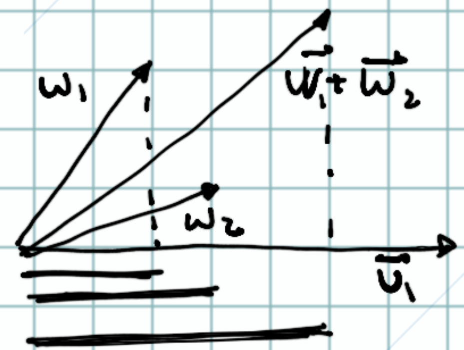
N.B $\vec{v}\cdot\vec{w} = \vec{w}\cdot\vec{v}$

Esempio ① $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ $\vec{w}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ $\vec{w}\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix} = 6+5 = 11$

② $\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix} = 0$ Vettori perpendicolari

$\vec{v}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ $\vec{w}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ $\vec{v}\cdot\vec{w} = a_1\cdot b_1 + a_2 b_2$ $\qquad \vec{v}\cdot(\vec{w}_1+\vec{w}_2) = \vec{v}\cdot\vec{w}_1 + \vec{v}\cdot\vec{w}_2$

La proiezione di $(\vec{w}_1+\vec{w}_2)$ su $\vec{v}$ è uguale alla somma delle proiezioni di $\vec{w}_1$ su $\vec{v}$ e di $\vec{w}_2$ su $\vec{v}$



$\vec{v}\cdot(\vec{w}_1+\vec{w}_2) = \vec{v}\cdot\vec{w}_1 + \vec{v}\cdot\vec{w}_2$

$= \|\vec{v}\|\cdot(\text{proiezione di } \vec{w}_1) + \|\vec{v}\|\cdot(\text{proiezione di } \vec{w}_2)$

$= \|\vec{v}\|\cdot(\text{proiezione di } \vec{w}_1+\vec{w}_2)$

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}b_1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\b_2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\b_1\end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2$$

Esercizio

① l'angolo formato dai vettori $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\-3\\5\end{pmatrix}$ e $\vec{w}\begin{pmatrix}10\\3\\0\end{pmatrix}$ è acuto VERO o FALSO?

I METODO $= \vec{v}\cdot\vec{w} = \|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|\cos\theta = \sqrt{1+9+25}\cdot\sqrt{100+9}\cdot\cos\theta = \sqrt{35}\cdot\sqrt{109}\cos\theta = \sqrt{3815}\cos\theta$

II METODO $= \vec{v}+\vec{w} = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 = 1 - 10 + (-3)3 + 5\cdot 0 = 1$

$\Rightarrow 1 = \sqrt{3815}\cos\theta \rightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3815}} \rightarrow \theta = \underset{\cos^{-1}}{\arccos}\frac{1}{\sqrt{3815}}$ l'angolo è ACUTO

ANGOLO ACUTO → $\cos > 0$

ANGOLO OTTUSO → $\cos < 0$

ANGOLO RETTO $= 0$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|}}$$

SISTEMI E VETTORI // I SISTEMI LINEARI

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 4x + 5y = -1 \end{cases}$$

equazioni di rette che passanti per l'origine

RETTE PARALLELE $\rightarrow 2x - 3y = 0 \iff \vec{v}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$