SPAZI VETTORIALI

Si dice che V è uno spazio vettoriale su un campo K se è definita in V una operazione interna, detta addizione e indicata con +, in modo tale che la struttura algebrica (V, +) sia un gruppo commutativo, cioè:

1 $u+(v+w)=(u+v)+w$

2 $\exists$ un elemento neutro $\bar{0}$: $v+\bar{0}=\bar{0}+v=v$

3 $v+(-v)=(-v)+v=\bar{0}$

4 $v+w=w+v$

È inoltre definita una operazione esterna in V rispetto a K in modo che le proprietà siano soddisfatte:

5 $\alpha(v+w)=\alpha v+\alpha w$

6 $(\alpha+\beta)v=\alpha v+\beta v$

7 $(\alpha\beta)v=\alpha(\beta v)$

8 $\forall v\in V$ si ha $1v=v$

gli elementi di V si chiamano vettori, mentre quelli di K si chiamano scalari

Sottospazi

Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$, $W=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid x_n=0\}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ se si verificano queste condizioni:

1 $(x,0,z)+(x',0,z')=(x+x',z+z',0)$

2 $\alpha(x,0,z)=(\alpha x,0,\alpha z)$

nel sottospazio abbiamo la chiusura sia per l'addizione che per la moltiplicazione

Dato uno spazio vettoriale V, l'insieme $\{\bar{0}\}$ costituito dal solo vettore nullo di V è un sottospazio di V. Se V e W sono sottospazi di V, allora $V \cap W$ è un sottospazio di V.

In uno spazio vettoriale V si considerino n vettori $v_1, \dots, v_n$. Per ogni n-upla di scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, il vettore di V, $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ è detto combinazione lineare dei vettori $v_1 \dots v_n$. Il sottoinsieme W di V costituito da tutte le possibili combinazioni lineari dei vettori $v_1, \dots, v_n$ è un sottospazio di V.

Il sottospazio W, che è indicato con il simbolo $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ si chiama il sottospazio dei generatori dei vettori $v_1 \dots v_n$ e si dice che questi sono un sistema di generatori per W.

Dipendenza lineare

Sia V uno spazio vettoriale sul campo K e consideriamo i vettori $v_1, \dots v_n$. Si dice che i vettori $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente dipendenti su K se $\exists$ una n-upla di scalari non tutti nulli $\alpha_1, \dots, \alpha_n$:

$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \bar{0}$

Se invece una siffatta di n-upla $\nexists$ e si ha soltanto $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \bar{0}$ solo per $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, i vettori $v_1, \dots, v_n$ si dicono linearmente indipendenti su K

Se $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ è un insieme di vettori di V linearmente indipendenti, il vettore nullo allora non può appartenere a S e che ogni sottoinsieme non vuoto di S è costituito a sua volta di vettori linearmente indipendenti. Inoltre se $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ e $\beta_1, \dots, \beta_n$ sono due n-uple di scalari:

$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n$ allora

$(\alpha_1 - \beta_1) v_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) v_n = \bar{0}$ e pertanto $\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_n = \beta_n$

esempi di vettori linearmente dipendenti e indipendenti

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ i vettori $(1,1,0)$ e $(0,0,-1)$ sono linearmente ind., mentre i vettori $(1,1,1)$ e $(2,2,2)$ sono linearmente dip. Se infatti α, β sono numeri reali, da $\alpha(1,1,0) + \beta(0,0,-1) = \bar{0} \longrightarrow (\alpha, \alpha, 0) + (0, 0, -\beta) \longrightarrow$

$\longrightarrow (\alpha, \alpha, -\beta) = (0,0,0) \rightarrow a = 0,\ b = 0$

Mentre si ha $\alpha(1,1,1) + \beta(2,2,2) = \bar{0} \longrightarrow$

$\longrightarrow (a, a, a) + (2\beta, 2\beta, 2\beta) = (0,0,0) \longrightarrow$

$\longrightarrow (a + 2\beta,\ a + 2\beta,\ a + 2\beta) = (0,0,0) \Longleftrightarrow \begin{cases} a + 2\beta = 0 \rightarrow a = -2\beta \\ a + 2\beta = 0 \rightarrow - \\ a + 2\beta = 0 \end{cases}$

da rivedere

Base

Sia V uno spazio vettoriale sul campo K. Si dice che l'insieme ordinato di vettori $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V su K se i vettori sono linearmente indipendenti ed sono un sistema di generatori.

Se $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V. scelto comunque un vettore v. $\exists$ una n-upla di scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_n$: $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ in quanto B è un sistema di generatori in V. Inoltre essendo i vettori di B linear. ind, in quanto ragionato prima, la n-upla $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ è unica

esempio

i vettori $(1,1)$ e $(-1,1)$ sono una base dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$. essi sono infatti linearmente indipendenti, in quanto da $\alpha(1,1) + \beta(-1,1) = 0$. con α e β numeri reali, segue $\alpha = \beta = 0$. Inoltre essi sono un sistema di generatori in $\mathbb{R}^2$, poiché $\forall$ vettore $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. da $(a,b) = \alpha(1,1) + \beta(-1,1)$ si ottiene $\alpha = \frac{a+b}{2}$ $\beta = \frac{b-a}{2}$ e quindi (a,b) si può esprimere come combinazione lineare dei vettori $(1,1)$ e $(-1,1)$.

Teorema dello scambio

In uno spazio vettoriale V, sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base e sia $\{w_1, \dots, w_r\}$ un insieme di vettori linearm. ind. allora $r \leq n$

DIM: l'insieme $\{v_1, \dots, v_n\}$ è un sistema di generatori in V, $\exists$ quindi n scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_n$:

$w_1 = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$

essendo necessariamente $w_1 \neq \bar{0}$, gli scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ non sono tutti nulli. Indicizzando i vettori $v_1, \dots, v_n$ in maniera diversa, si può supporre $\alpha_1 \neq 0$. ne segue

$$v_1 = \frac{1}{\alpha_1} w_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} v_n$$

cioè $v_1 \in \langle w_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ e pertanto i vettori $w_1, v_2, \dots, v_n$ sono un sistema di generatori per V.

Procediamo per induzione e supponiamo che i vettori $w_1, \dots, w_s, v_{s+1}, \dots, v_n$ siano un sistema di generatori in V. $\exists$ allora gli scalari $\beta_1, \dots, \beta_s, \gamma_{s+1}, \dots, \gamma_n$:

$w_{s+1} = \beta_1 w_1 + \dots + \beta_s w_s + \gamma_{s+1} v_{s+1} + \dots + \gamma_n v_n$

non può essere $\gamma_i = 0$ altrimenti i vettori $w_1, \dots, w_{s+1}$ risulterebbero linear dip. Anche ora, indicizzando se necessario i vettori $v_{s+1}, \dots, v_n$ in modo diverso. Ne segue che $v_{s+1} \in \langle w_1, \dots, w_{s+1}, v_{s+2} \dots v_n \rangle$ e quindi i vettori $w_1, \dots, w_{s+1}, v_{s+2} \dots v_n$ sono un sistema di generatori per V

supponiamo ora che $r > n$. Si è dimostrato per induzione che i vettori $w_1, \dots, w_n$ sono un sist di generatori in V.

Pertanto esistono m scalari $\gamma_1, \dots \gamma_m$:

$w_n = \gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_m w_m$ ma questo è assurdo essendo i

vettori $w_1, \dots, w_m, w_n$ sono linear ind quindi $n \leq m$

Siano $\{v_1, \dots, v_m\}$ e $\{w_1, \dots, w_n\}$ due basi dello spazio vettoriale V. allora $m = n$

DIM: Ciascuna delle basi è un insieme di vettori linear ind quindi si dimostra $m \leq n$ e $n \leq m$

pertanto $m = n$