

L'insieme \mathbb{R}^n è l'insieme di n-uple ordinate di numeri reali.

Siano x e y due variabili: $ax + by = c$. Se i coefficienti a e b non sono entrambi nulli avremo sempre infinite soluzioni.

Una soluzione è una n-pla ordinata che soddisfa l'equazione. Un'equazione ammette ∞ soluzioni dove n indica il numero di incognite presenti nell'equazione.

Ci sono 3 tipi di sistemi:

- determinati \rightarrow 1 soluzione
- indeterminati \rightarrow ∞ soluzioni
- incompatibili o impossibili \rightarrow \emptyset soluzioni

Una matrice $n \times m$ è una tabella di $m \cdot n$ numeri reali, ordinati secondo n righe e m colonne.

Definiamo la **matrice completa** per rappresentare un sistema:

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Si definisce così la **matrice dei coefficienti** del sistema:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Una matrice a scalini ha le seguenti caratteristiche:

- le righe sottostanti a una riga nulla sono tutte nulle.
- gli elementi sotto il primo elemento non nullo e sotto gli zero che lo precedono sono tutti nulli.

Il primo elemento non nullo di una riga è detto **pivot**.

Se l'ultimo pivot si trova nell'ultima colonna di una matrice completa il sistema sarà **incompatibile**.

Se il numero di pivot è uguale al numero delle incognite allora il sistema ammetterà una sola soluzione e sarà **determinato**.

Se il numero di pivot r è minore del numero delle incognite n allora il sistema sarà **indeterminato** e avrà ∞^{n-r} soluzioni.

L'algoritmo di Gauss permette di ridurre a scalini la matrice associata a un sistema semplificandolo a uno equivalente, ovvero un sistema che ha la stessa soluzione. Le operazioni dell'algoritmo di Gauss sono:

- scambiare due righe.
- moltiplicare un'equazione per uno scalare non nullo.
- sommare a un'equazione il multiplo di un'altra.

L'elemento di posto (i, j) di una matrice è l'elemento a_{ij} che compare sulla riga i -esima e sulla colonna j -esima della matrice.

Due matrici si dicono **quadrato** se hanno lo stesso numero di righe e di colonne.

La matrice **trasposta** A^T è ottenuta scambiando le righe con le colonne della matrice iniziale A . $(A^T)^T = A$

La **somma** di due matrici consiste nel sommare gli elementi corrispondenti delle due matrici. La somma ha le seguenti proprietà:

- proprietà **commutativa**. $A+B = B+A$
- proprietà **associativa**. $(A+B)+C = A+(B+C)$
- **esistenza dello 0**. $A+O = A$
- **esistenza dell'opposto**. $A+(-A) = O$

Il **prodotto** di una matrice per uno scalare è definito come il prodotto di ogni elemento della matrice per lo scalare k ($k \in \mathbb{R}$). Per questo prodotto valgono le seguenti proprietà:

1. $h(kA) = (hk)A$ per ogni $A \in \text{Mat}(p \times q)$ e $h, k \in \mathbb{R}$.
2. $(h+k)A = hA + kA$ per ogni $A \in \text{Mat}(p \times q)$ e $h, k \in \mathbb{R}$.
3. $h(A+B) = hA + hB$ per ogni $A, B \in \text{Mat}(p \times q)$ e $h \in \mathbb{R}$.

Le **combinazioni lineari** di due matrici è definita come $K A + h B$ con $K, h \in \mathbb{R}$.

Una matrice si dice **simmetrica** se $A^T = A$ ovvero se $a_{ij} = a_{ji}$.

Una matrice **triangolare** può essere:

- triangolare superiore se tutti gli elementi sotto la diagonale principale sono uguali a \emptyset .

- triangolare inferiore se tutti gli elementi sopra la diagonale principale sono uguali a \emptyset .

Una matrice si dice **diagonale** se è sia triangolare superiore che inferiore, ovvero solo gli elementi sulla diagonale sono diversi da \emptyset .

Il **prodotto righe per colonne** dà come risultato una matrice. Per essere moltiplicabili due matrici devono essere del tipo $A_{m \times n}$ e $B_{n \times p}$. L'elemento a_{ij} è il prodotto dell' i -esima riga della prima matrice per la j -esima colonna della seconda matrice. Questo prodotto non è commutativo. Esso ha le seguenti proprietà:

1. Proprietà associativa: $(AB)C = A(BC)$.

2. Proprietà distributive rispetto alla somma: $A(B+C) = AB+AC$; $(A+B)C = AC+BC$.

3. Date due matrici A e B e un numero reale h si ha sempre:

$$h(AB) = (hA)B = A(hB).$$

La matrice **identità** è l'elemento neutro del prodotto righe per colonne ed è così definito:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Una matrice è invertibile se esiste una matrice A^{-1} tale che $A \cdot A^{-1} = I$. Una matrice è invertibile solo se ha $\det \neq \emptyset$.

Data una matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ si definisce il $\det A = ad - bc$. Il $\det A = \det A^T$.

La formula di **Binet** afferma che $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

Una matrice è invertibile se e solo se ha $\det A \neq 0$. La matrice **invertita** sarà uguale a $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Il teorema di **Cramer** dice che se il $\det A \neq 0$, dove A è la matrice dei coefficienti, allora il sistema è compatibile.

La **matrice aggiunta** di un elemento a_{ij} di una matrice A , A_{ij} è data dalla matrice A privata dell' i -esima riga e della j -esima colonna.

Il **determinante** di una matrice $n \times n$ (per calcolare il determinante la matrice deve essere quadrata) è dato da:

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} a_{1j} \det A_{1j}.$$

Il teorema di **Laplace** afferma che il determinante può essere sviluppato rispetto a una qualsiasi riga o colonna della matrice.

Il \det di una matrice triangolare è il prodotto degli elementi posti sulla diagonale.

Se una matrice ha una riga o una colonna nulla il suo determinante sarà uguale a \emptyset .

Il **complemento algebrico** è definito così: $\bar{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$.

Data una matrice con determinante $\neq \emptyset$, essa è invertibile e la matrice inversa è: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \bar{A}^T$, dove \bar{A}^T è la matrice trasposta dei complementi algebrici.

Se A e B sono invertibili allora AB è invertibile $(AB)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$.

Il metodo di **Cramer** dice che la soluzione di un sistema è data da $x_i = \frac{\det A(i)}{\det A}$, dove $A(i)$ è la matrice A la cui i -esima colonna è stata sostituita dalla colonna dei termini noti.

Le operazioni dell'algoritmo di Gauss fanno variare il determinante nel seguente modo:

- Se si scambiano due righe il determinante cambia di segno.

- Se A' si ottiene moltiplicando una riga per K allora $\det A' = K \det A$.

- Se sommo a una riga un multiplo di un'altra il determinante non varia.

Se riduco la matrice A a scala ottenendo A' so che se $\det A' = 0$ allora $\det A = 0$.

Un **minore** di A è una sottomatrice quadrata di A ottenuta togliendo determinate righe e colonne di A .

Una matrice A ha **rango p** se:

- esiste un minore di ordine p con $\det \neq \emptyset$.

- il minore di ordine $p+1$ ha $\det = \emptyset$.

Si ha sempre che $r(KA) = rKA^T$.

Sia H un minore di A , un **orlato** di H si ottiene associando a H una riga o una colonna di A .

Il teorema degli orlati dice che se tutti i minori orlati di M hanno determinante nullo allora il rango di A è esattamente l'ordine di M .

Il rango di una matrice a scalini è uguale al numero dei suoi pivot. Le operazioni elementari dell'algoritmo di Gauss non variano il rango.

Il teorema di Rouché-Capelli dice che un sistema S di m equazioni e n incognite è compatibile se e solo se $\text{rk } A$ (matrice dei coefficienti) = $\text{rk } A'$ (matrice completa).

Se S è compatibile e poniamo $\text{rk } A = \text{rk } A' = r$, allora:

- Il sistema è **determinato** se $r = n$.

- Il sistema è **indeterminato** e ammette ∞^{n-r} soluzioni se e solo se $r < n$.

Un sistema lineare si dice omogeneo se la colonna dei termini noti è uguale a \emptyset . Un sistema omogeneo è sempre compatibile poiché S può ammettere una soluzione, quella nulla, o infinite soluzioni. Se un sistema ammette più di una soluzione allora ne ammette infinite.

Il sistema lineare omogeneo associato a $A \cdot x = b$ è $A \cdot x = \underline{0}$.

Sia $Ax = b$ un sistema risolubile con una soluzione c_1 e il sistema lineare omogeneo associato con soluzione c_0 . Il sistema ha soluzioni $c_1 + c_0$.

Dati K vettori v_i e K scalari si definisce **combinazione lineare** di v con coefficienti a_i come $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k$.

Due vettori si dicono **linearmente indipendenti** se la combinazione lineare $a_1 v_1 + \dots + a_k v_k = 0$ è uguale a \emptyset se e solo se tutti i coefficienti a_i sono uguali a \emptyset .

I vettori v_1, v_2, \dots, v_k sono linearmente indipendenti se $\text{rk } A = k$ o $\det A \neq 0$, dove A è la matrice che ha per colonne i vettori.

Siano v_1, \dots, v_k dei vettori di \mathbb{R}^n . Se $k > n$ allora questi vettori risulteranno sempre dipendenti.

Dato un insieme V di vettori in cui sono definite le seguenti operazioni:

- somma \rightarrow dati due vettori $u, v \in V$ sia definita $u + v \in V$.

- prodotto per uno scalare \rightarrow dato un vettore $v \in V$ e uno scalare k sia definito il vettore $v \cdot k$.

Si definisce **spazio vettoriale** con le seguenti proprietà:

- 1) $(u + v) + w = u + (v + w)$ per ogni $u, v, w \in V$.
- 2) $u + v = v + u$ per ogni $u, v \in V$.
- 3) Esiste un vettore $O \in V$, detto **vettore nullo**, tale che $v + O = v$ per ogni $v \in V$.
- 4) Per ogni vettore $v \in V$ esiste un'unico vettore $-v$, detto **opposto** di v , tale che $v + (-v) = -v + v = O$.
- 5) Si ha $1v = v$ per ogni $v \in V$.
- 6) $h(kv) = (hk)v$ per ogni $h, k \in \mathbb{R}$ e per ogni $v \in V$.
- 7) $(h + k)v = hv + kv$ per ogni $h, k \in \mathbb{R}$ e per ogni $v \in V$.
- 8) $h(u + v) = hu + hv$ per ogni $h \in \mathbb{R}$ e per ogni $u, v \in V$.

In uno spazio vettoriale valgono le seguenti proprietà:

- a) Per ogni $v \in V$ si ha $0v = O$.
- b) Per ogni $h \in \mathbb{R}$ si ha $hO = O$.
- c) Per ogni $v \in V$ si ha $(-1)v = -v$.

Un vettore per essere linearmente indipendente deve essere $\neq O$.

Due vettori sono linearmente dipendenti se sono uno multiplo dell'altro.

Sia A un insieme linearmente indipendente allora un sottoinsieme di A è sempre linearmente indipendente.

Dato un insieme di vettori $v_1, \dots, v_k \in V$, essi sono un **generatore** di V se ogni vettore di V può essere espresso come combinazione lineare di v_1, \dots, v_k .

Aggiungendo vettori a un insieme di generatori otteniamo ancora un insieme di generatori.

Un insieme di vettori si dice **base** se è un insieme di generatori linearmente indipendenti.

Un sottoinsieme di V si dice **sottospazio** di V se ha le seguenti proprietà:

- a) Il vettore nullo appartiene a E .
 - b) Se $u, v \in E$ allora $u + v \in E$.
 - c) Se $u \in E$ e $k \in \mathbb{R}$ allora $ku \in E$.
- } è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare.

Un sottospazio è sempre uno spazio vettoriale.

Sia $V \neq O$ uno spazio vettoriale finitamente generato, esso ammetterà sempre una base.

Lo spazio vettoriale $V = \{\emptyset\}$ è detto **spazio banale**.

Uno spazio vettoriale non banale ha infiniti vettori.

Il **Lemma di Steinitz** dice che in uno spazio vettoriale V di dimensioni n , un insieme indipendente ha al più n vettori.

Tutte le basi di uno spazio vettoriale V hanno lo stesso numero di vettori.

Definiamo **dimensione** di V il numero di vettori di una sua base. Le dimensioni di una matrice $M_{n \times m}$ è $m \cdot n$.

La dimensione di \mathbb{R}^n è n . I vettori v_1, \dots, v_n di \mathbb{R}^n formano una base se la matrice che ha per colonne tali vettori ha $\det \neq 0$.

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n . Per esso valgono le seguenti proprietà:

- Non esistono più di n vettori linearmente indipendenti.
- Dati comunque k vettori, con $k < n$, essi non possono generare V .
- n vettori linearmente indipendenti sono anche generatori (quindi formano una base).
- n vettori generatori sono anche linearmente indipendenti (quindi formano una base).

Lo spazio dei polinomi $\mathbb{R}[x]$ non è finitamente generato.

Sia V uno spazio vettoriale di dimensioni n e E un suo sottospazio, $\dim E \leq n$. Se $\dim E = n$ allora $V = E$.

I vettori colonna v_1, \dots, v_k di A sono linearmente indipendenti se e solo se $\text{rk} A = k$.

Ogni sottospazio di \mathbb{R}^n è soluzione di un sistema omogeneo.

L'intersezione di due sottospazi E e F di V è anch'esso un sottospazio di V . La dimensione di $E \cap F$ è sempre minore di $\dim E$ e $\dim F$.

L'unione di due sottospazi non è in generale un sottospazio.

La somma di due sottospazi di V è anch'essa un sottospazio di V .

Se E è generato da v_1, \dots, v_n e F è generato da w_1, \dots, w_m allora $E + F$ è generato da $v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m$, quindi dall'unione dei generatori.

Siano E e F due sottospazi di V , la formula di Grassman afferma che:

$$\dim(E + F) + \dim(E \cap F) = \dim E + \dim F.$$

Data una base V , v_1, \dots, v_n , ogni vettore può essere espresso come combinazione lineare di V . $v = a_1 v_1, \dots, a_n v_n$.

Il vettore delle coordinate di v rispetto alla base V è $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

Siano A e B due insiemi, si definisce applicazione da A in B una legge che associa a ogni elemento di A un elemento di B . $f: A \rightarrow B$.

L'immagine di f è un sottoinsieme di B che contiene tutti gli elementi di B che sono associati a un elemento di A .

L'applicazione si dice suriettiva se $\text{Im} f = B$, ovvero se tutti gli elementi di B sono immagine di almeno un elemento di A .

L'applicazione si dice iniettiva se trasforma elementi diversi di A in elementi diversi di B , ovvero $a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$.

Un'applicazione si dice biiettiva se è sia iniettiva che suriettiva.

Sia $f: V \rightarrow V'$ un'applicazione. Essa si dice applicazione lineare se rispetta le seguenti proprietà:

$$\begin{cases} f(u+v) = f(u) + f(v) & \text{per ogni } u, v \in V, \\ f(au) = af(u) & \text{per ogni } a \in \mathbb{R}, u \in V. \end{cases}$$

Sia $f: V \rightarrow V'$ un'applicazione lineare. Valgono le seguenti proprietà:

- $f(0) = 0$
- $f(-v) = -f(v)$

Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare e sia A la matrice $m \times n$ che descrive l'applicazione lineare:

$$f(v) = A \cdot v$$

La matrice associata di f rispetto alle basi B, B' si trova con la seguente regola:

- La i -esima colonna di A è data dalle coordinate del vettore $f(v_i)$ rispetto alla base B' .

Sia f un'applicazione lineare $f: V \rightarrow V'$, si definisce nucleo di f un sottoinsieme di V dei vettori che hanno come immagine il vettore nullo.

Il nucleo si denota come $\text{Ker} f$. $\text{Ker} f = \{v \in V : f(v) = 0\}$.

Il $\text{Ker} f$ è un sottospazio di V .

La funzione è iniettiva se $\text{Ker} f = \{0\}$.

$\text{Im} f$ è un sottospazio di V' .

Se $\text{Im} f = V'$ allora la funzione è suriettiva.

Sia $f: V^n \rightarrow V^m$ un'applicazione lineare, allora:

- f è suriettiva se e solo se $\dim \text{Im} f = m$

Se i vettori v_1, \dots, v_n generano V allora i vettori $f(v_1), \dots, f(v_n)$ generano $\text{Im} f$, ovvero $\text{Im} f$ è generata dai trasformati dei vettori di una base.

In un'applicazione lineare con matrice associata A si ha che $\text{rk}(A) = \dim \text{Im} f$.

Nel caso in cui l'applicazione lineare ha la matrice associata A calcolata rispetto alla base canonica allora l' $\text{Im} f$ è generata dai vettori colonna di A .

Il teorema della dimensione dice che sia $f: V^n \rightarrow V^m$ un'applicazione lineare allora $\dim \text{Ker} f + \dim \text{Im} f = n$.

Sia $f: V^n \rightarrow V^m$ lineare:

- Se f è iniettiva, allora $n \leq m$.
- Se f è suriettiva, allora $n \geq m$.
- Se f è biiettiva, allora $n = m$.

Un'applicazione lineare biettiva si dice **isomorfismo**. In esse f trasforma basi di V in basi di V' .

Ogni spazio vettoriale di $\dim=n$ è isomorfo a \mathbb{R}^n .

Sia V^n uno spazio vettoriale con base B . Allora i vettori $v_1, \dots, v_n \in V$ sono linearmente indipendenti se la matrice che ha per colonne $f(v_1), \dots, f(v_n)$ ha rango $=K$.

Un **endomorfismo** è un'applicazione lineare $f: V \rightarrow V$. Un endomorfismo di V è spesso chiamato **operatore** di V .

L'**endomorfismo identità** associa a un elemento di V l'elemento stesso. $f(v) = v$.

Sia V uno spazio vettoriale e B e B' due basi di V . Ogni elemento della base B' si esprime come combinazione lineare dei vettori di B . La matrice ottenuta incolonnando le coordinate è detta **matrice del cambiamento di base** da B a B' . $B' = M \cdot B$

La matrice del cambiamento di base è invertibile. La matrice del cambiamento di base da B' a B è l'inversa di M , quindi M^{-1} .

Due matrici quadrate A e A' sono **simili** se esiste una matrice M invertibile tale che $A' = M^{-1} A M$.

Se due matrici sono simili allora esse rappresentano lo stesso endomorfismo.

Un endomorfismo si dice **diagonalizzabile** se può essere rappresentato da una matrice associata diagonale.

Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale V :

- un vettore $v \neq 0$ si dice **autovettore** associato all'autovalore $\lambda \in \mathbb{R}$ se $f(v) = \lambda v$.

- uno scalare λ si dice **autovalore** di f se esiste un vettore $v \neq 0$ tale che $f(v) = \lambda v$.

0 è autovalore di f se e solo se $\text{Ker} f \neq \{0\}$. Ogni vettore del nucleo è un autovettore con autovalore 0 .

Un endomorfismo f di uno spazio vettoriale V è **diagonalizzabile** se e solo se V ammette una base formata da autovettori di f .

Si definisce **autospatio** associato a λ il sottospazio $E(\lambda) = v \cdot \lambda$. La sua dimensione è detta **moltiplicità geometrica** di λ , $\dim(E(\lambda)) = M_G \lambda$. Inoltre si ha sempre $M_G \lambda \geq 1$ e $E(0) = \text{Ker} f$.

Sia f un endomorfismo di V^n e sia A una matrice associata. Allora $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore di f se e solo se $\det(A - \lambda I) = 0$

$\det(A - \lambda I)$ è detto **polinomio caratteristico**. Gli autovalori sono le radici del polinomio caratteristico.

Se λ è un autovalore di f allora $M_G \lambda = \dim(E(\lambda)) = n - \text{rk}(A - \lambda I)$.

Un endomorfismo di uno spazio vettoriale V^n ammette al massimo n autovalori distinti.

Tutte le matrici associate a uno stesso endomorfismo hanno lo stesso polinomio caratteristico.

La somma di tutte le molteplicità geometriche è $\leq n$.

Un endomorfismo è **diagonalizzabile** se la somma delle molteplicità geometriche è uguale a n o se esiste una base formata da autovalori.

La **moltiplicità algebrica** è la molteplicità di λ come radice di $p_A(x)$.

Se λ è un autovalore si ha sempre $M_A \lambda \geq M_G \lambda \geq 1$. Un endomorfismo è diagonalizzabile se $M_A \lambda = M_G \lambda$.

L'autovalore si dice **semplice** se $M_A \lambda = 1$ e **multiplo** se $M_A \lambda > 1$, quindi bisogna verificare le uguaglianze delle molteplicità solo per autovalori multipli.

Sia A una matrice che rappresenta l'endomorfismo f , se $B(v_1, \dots, v_n)$ è una base di autovettori di f e M la matrice che ha per colonne v_1, \dots, v_n allora $M^{-1} A M = D$ dove D è la matrice diagonale che come elementi $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Una matrice simmetrica è diagonalizzabile.

Dati i vettori $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ di \mathbb{R}^n , si definisce il **prodotto scalare** di u e v $\langle u, v \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$.

Due vettori u e v si dicono **ortogonali** se il loro prodotto scalare è uguale a 0 . Il vettore nullo è ortogonale a tutti i vettori.

Le proprietà del prodotto scalare sono:

- 1) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$. \rightarrow commutativo
 - 2) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$.
 - 3) $\langle k u, v \rangle = k \langle u, v \rangle$.
 - 4) $\langle u, u \rangle \geq 0$.
 - 5) $\langle u, u \rangle = 0$ se e solo se $u = 0$.
- } bilinearità
} positivo

La **norma** di un vettore u e \mathbb{R}^n è definita come $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ ovvero $\|u\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. La norma di un vettore non nullo è sempre positiva.

La **disuguaglianza di Schwarz** afferma che $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$. Inoltre vale l'uguaglianza se e solo se i vettori sono dipendenti.

L'**angolo** tra due vettori u e v è definito come $\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}$.

Siano v_1, \dots, v_n vettori di \mathbb{R}^n ortogonali a due a due, allora i vettori sono indipendenti tra loro e $K \leq n$.

n vettori ortogonali due a due formano una base di \mathbb{R}^n chiamata **base ortogonale**, quindi il numero massimo di vettori ortogonali due a due è n .

Diremo che una base v_1, \dots, v_n è **ortonormale** se:

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j, \\ 1 & \text{se } i = j. \end{cases}$$

La base canonica di \mathbb{R}^n è ortonormale.

Sia $B(v_1, \dots, v_k)$ una base ortonormale, le coordinate di un vettore v rispetto a v sono $\begin{pmatrix} \langle v, v_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle v, v_k \rangle \end{pmatrix}$ e sono dette **coefficienti di Fourier**.

Dato un vettore v e uno scalare $a \in \mathbb{R}$ si ha $\|av\| = |a| \cdot \|v\|$.

Se v_1, \dots, v_k è una base ortogonale del sottospazio E , i **vettori normalizzati** sono del tipo $v_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}$ e formano una base ortonormale di E .

L'algoritmo di **Gram-Schmidt** permette di ottenere una base ortogonale di un sottospazio. Sia E un sottospazio e (v_1, \dots, v_k) una sua base, si introducano i vettori:

$$\begin{cases} w_1 = v_1 \\ w_2 = v_2 - a_{21}w_1 \\ w_3 = v_3 - a_{31}w_1 - a_{32}w_2 \\ \dots \\ w_k = v_k - a_{k1}w_1 - a_{k2}w_2 - \dots - a_{k,k-1}w_{k-1} \end{cases} \quad \text{dove si è posto} \quad a_{ij} = \frac{\langle v_i, w_j \rangle}{\langle w_j, w_j \rangle} \quad \text{allora } (w_1, \dots, w_k) \text{ è una base ortogonale.}$$

Una matrice M si dice **ortogonale** se si verifica $M \cdot M^T = I$, quindi una matrice ortogonale è invertibile e si ha $M^{-1} = M^T$. Quindi $\det M = \pm 1$.

La matrice di passaggio tra due basi ortonormali di \mathbb{R}^n è ortogonale.

Una matrice $n \times n$ è ortogonale se e solo se le sue colonne formano una base ortonormale di \mathbb{R}^n .

Se i vettori (v_1, \dots, v_k) sono indipendenti allora $E = \{v \in \mathbb{R}^n : \langle v, v_1 \rangle = \dots = \langle v, v_k \rangle = 0\}$ è un sottospazio di \mathbb{R}^n con dimensione $n-k$.

Sia (v_1, \dots, v_k) una base di E . Allora $v \in E^\perp$ se e solo se $\langle v, v_i \rangle = 0$ per ogni $i=1, \dots, k$. E^\perp si chiama **complemento ortogonale**.

Le proprietà che riguardano E^\perp sono:

- $E \cap E^\perp = \{0\}$
- $\dim E^\perp = n - \dim E$.

Un endomorfismo si dice **simmetrico** se la sua matrice rispetto alla base canonica è simmetrica. In una matrice simmetrica si ha che per ogni coppia di vettori $u, v \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\langle f(u), v \rangle = \langle u, f(v) \rangle$.

Gli auto-spazi di un endomorfismo simmetrico sono ortogonali fra loro, ovvero se λ_1 e λ_2 sono autovalori distinti di f , e se $v \in E(\lambda_1)$ e $w \in E(\lambda_2)$ allora $\langle v, w \rangle = 0$.

Il **teorema spettrale** dice che sia f un endomorfismo simmetrico di \mathbb{R}^n , f è diagonalizzabile. Esiste una base ortonormale di \mathbb{R}^n costituita da autovettori di f .

Un **vettore del piano** è una coppia ordinata di punti (A, B) . Il punto A è detto **punto di applicazione** e B è detto **vertice** del vettore. Un vettore è definito da modulo, direzione e verso. Il modulo del vettore si indica con $\|AB\|$ ed è la distanza fra i due punti.

I vettori con stesso modulo, direzione e verso si dicono **equipollenti**.

Fissato un punto O detto origine e consideriamo l'insieme di vettori applicati in O , denotato da V_0^2 . Se si introducono le operazioni di somma e prodotto per uno scalare esso può essere definito come uno spazio vettoriale.

Si definisca la **somma** di due vettori: $OA + OB = OC$ come il segmento che unisce il punto comune ai due vettori con il 4° vertice del parallelogramma, quindi si calcola con la **regola del parallelogramma**.

Un vettore v è linearmente indipendente se e solo se $v \neq \emptyset$. Due vettori di V_0^2 sono indipendenti se e solo se non sono paralleli.

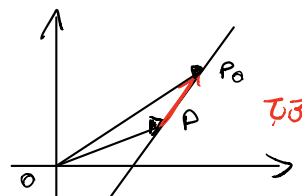
La dimensione di V_0^2 è 2. Le basi di V_0^2 sono tutte le coppie di vettori non paralleli.

Un **sistema di riferimento affine** è caratterizzato dall'origine O e due basi (e_1, e_2) . Ogni vettore può essere scritto come combinazione lineare dei vettori della base.

Se la base scelta è ortonormale il sistema di riferimento è detto **cartesiano**.

Se il vettore \vec{OP} ha coordinate (x, y) e il vettore \vec{OP}' ha coordinate (x', y') allora:

- Il vettore $k\vec{OP}$ ha coordinate $k(x, y) = (kx, ky)$.
- Il vettore $\vec{OP} + \vec{OP}'$ ha coordinate $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$.



Le coordinate del vettore \vec{AB} sono date dalla differenza fra le coordinate del vertice e del punto di applicazione. Se $A = (x, y)$ e $B = (x', y')$ allora le coordinate del vettore \vec{AB} sono $(x' - x, y' - y)$.

Dato una retta r del piano, un vettore non nullo \vec{u} , un vettore si dice **direttore** di r se \vec{u} è parallelo a r . Le coordinate di un qualunque vettore direttore di r sono dette **parametri direttori** di r .

Una retta ha infiniti parametri direttori, tutti proporzionali tra loro.

Dato una retta r del piano, sia $P_0 \in r$ e \vec{u} un vettore direttore di r . Il punto $P \in r$ se e solo se $\exists t \in \mathbb{R}$ t.c. $\vec{OP} = \vec{OP}_0 + t\vec{u}$.

Sia r una retta, $P_0 = (x_0, y_0)$ un suo punto e \vec{u} un suo vettore direttore di coordinate (l, m) , allora si possono scrivere le **equazioni parametriche** della retta r $\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}$.

Siano $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ due punti appartenenti alla retta r , i parametri direttori della retta r saranno $l = x_2 - x_1$ e $m = y_2 - y_1$ e le equazioni parametriche della retta saranno $x = x_1 + (x_2 - x_1)t$ e $y = y_1 + (y_2 - y_1)t$.

Tre punti sono **allineati** se e solo se $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0$ \Rightarrow $\begin{vmatrix} l & m \\ p & m' \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ **proporzionali**

Ogni retta del piano è descritta da un'equazione cartesiana del tipo $ax+by+c=0$. Per verificare che un punto (x,y) appartiene al piano deve essere verificata tale equazione. L'equazione cartesiana di una retta passante per due punti: $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ è definita come:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0$$

Forme particolari rette:

- $c=0 \Rightarrow$ retta passante per l'origine.

- $a=0 \Rightarrow$ retta // all'asse x .

- $b=0 \Rightarrow$ retta // all'asse y .

Siano $r: ax+by+c=0$ e $r': a'x+b'y+c'=0$ due rette, esse saranno parallele se e solo se $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$

Il **fascio di rette** parallele a r è la totalità delle rette parallele a r esistenti nel piano. Le equazioni delle rette parallele saranno del tipo $ax+by+K=0$ con K libero di variare in \mathbb{R} , quindi si avranno ∞^2 rette parallele a quella data.

Dato un punto $P_0(x_0, y_0)$, il **fascio di rette** passanti per P_0 sono tutte le rette passanti per P_0 e avrà equazione $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$ con a e b non entrambi nulli.

Il **prodotto scalare** è definito come $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta$ dove θ è l'angolo compreso tra \vec{u} e \vec{v} . Se uno dei due vettori è nullo il prodotto scalare è ϕ .

Due vettori sono ortogonali se e solo se il loro prodotto scalare è uguale a ϕ . Inoltre si ha $\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$

Il prodotto scalare ha le seguenti proprietà:

Il prodotto scalare di due vettori del piano eguaglia il prodotto scalare delle rispettive coordinate.

Dati $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ si definisce la distanza tra due punti come $d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

L'angolo compreso tra due vettori è definito come $\cos \theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$.

Le rette $r: ax+by+c=0$ e $r': a'x+b'y+c'=0$ sono **perpendicolari** se $aa'+bb'=0$.

La **distanza punto retta** di P da r è la distanza minima del punto dalla retta. Questa distanza è definita come:

$$d(P_0, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Il **punto medio** di un segmento è definito come:

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

Due punti si dicono **allineati** se appartengono alla stessa retta. Per due punti passa una retta. Due punti sono sempre allineati.

Due punti sono **complanari** se appartengono allo stesso piano. Per tre punti non allineati passa un piano. Tre punti sono sempre complanari.

Due vettori in \mathbb{R}^3 sono dipendenti se e solo se sono allineati.

Se due vettori \vec{v} e \vec{w} non sono allineati, allora esiste un unico piano che contiene sia \vec{v} che \vec{w} .

Tre vettori di \mathbb{V}^3 sono linearmente dipendenti se e solo se sono complanari.

Una terna di vettori di \mathbb{V}^3 è una base se e solo se i vettori che la compongono non sono complanari.

Dati due vettori $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$ le coordinate del vettore \overline{AB} sono $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Le equazioni parametriche della retta sono del tipo:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

Due rette sono parallele se e solo se hanno parametri direttori proporzionali.

I parametri direttori della retta per $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$ sono proporzionali alla terna:

$$\begin{cases} l = x_2 - x_1 \\ m = y_2 - y_1 \\ n = z_2 - z_1 \end{cases}$$

I punti $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$ sono **allineati** se e solo se:

$$\text{rk} \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{pmatrix} \leq 1 \quad \text{rk} \begin{pmatrix} e & m & n \\ e' & m' & n' \end{pmatrix} = 1$$

Due rette nello spazio possono essere distinte, incidenti o parallele. Due rette sono **complanari** se contenute nello stesso piano e **sgomber** se sono contenute in piani diversi.

Due rette sono parallele nello spazio se solo se sono coincidenti o se appartengono allo stesso piano e non hanno punti in comune, quindi due rette sono complanari solo se sono incidenti o parallele.

Quattro punti sono complanari se e solo se i 3 vettori applicati nello stesso punto $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_1P_3}$ e $\overline{P_1P_4}$ sono complanari, ovvero dipendenti:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad \det \begin{pmatrix} e & m & n \\ e' & m' & n' \\ e'' & m'' & n'' \end{pmatrix} = 0$$

L'equazione cartesiana del piano π è del tipo $ax+by+cz+d=0$. L'equazione cartesiana del piano passante per 3 punti non allineati è:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Se $d=0$ il piano passa per l'origine.

Due piani sono paralleli se e solo se sono coincidenti o se non hanno punti in comune.

Dati i piani $\pi: ax+by+cz+d=0$ e $\pi': a'x+b'y+c'z+d'=0$ e la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$, allora:

- i piani π e π' sono // se e solo se $rKA=1$
- i piani π, π' si incontrano in una retta se e solo se $rKA=2$.

Quindi una retta può essere rappresentata come l'intersezione di due piani non paralleli:

$$r: \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

I parametri direttori di una retta sono proporzionali alla terna dei minori di ordine due presi con segno alterno della matrice dei coefficienti $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$:

$$l = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}, \quad m = - \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}, \quad n = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}.$$

Data una retta r e un piano π ci sono 3 possibilità:

- r e π si incontrano in un punto: diremo allora che sono incidenti.
 - r e π non hanno intersezione.
 - r è interamente contenuta in π .
- } $r // \pi$

Nell'equazione del piano $\pi: ax+by+cz+d=0$ la terna (a, b, c) è detta terna dei parametri di giacitura del piano.

Un piano di parametri di giacitura (a, b, c) e una retta di parametri direttori (l, m, n) sono paralleli se e solo se $al+bm+cn=0$.

Data una retta di equazioni cartesiane $r: \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$ il fascio di piani contenente r è $\pi: h(ax+by+cz+d) + k(a'x+b'y+c'z+d') = 0$.

Data una retta r e un punto P non appartenente a r , esiste uno e un solo piano contenente r e P .

L'insieme di tutti i piani passanti per P_0 è detto stella di piani e ha equazione $a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$.

Ci sono ∞^2 piani passanti per P_0 (b e c parametri liberi).

Se le rette r e r' non sono parallele, allora esiste un unico piano parallelo a entrambe le rette e passante per P_0 . Se r e r' hanno parametri direttori (l, m, n) e (l', m', n') e il punto P_0 ha coordinate (x_0, y_0, z_0) , allora il piano // a r e r' ha equazione:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = 0.$$

Siano $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$ due punti, la loro distanza è definita come $d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Dati due vettori v e w , l'area del parallelogramma A definito dai due vettori è data dalle formule:

$$A = \sqrt{\begin{vmatrix} \langle v, v \rangle & \langle v, w \rangle \\ \langle v, w \rangle & \langle w, w \rangle \end{vmatrix}}, \quad A^2 = \|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2.$$

Il prodotto vettoriale di $v(a, b, c)$ e $w(a', b', c')$ è definito come $v \wedge w = (\alpha, \beta, \gamma)$:

$$\alpha = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}, \quad \beta = - \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}, \quad \gamma = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \quad \text{essi sono i minori della matrice } \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \text{ presi con segni alterni.}$$

Dati due vettori v e w , si ha:

- a) v, w sono allineati (paralleli) se e solo se $v \wedge w = \vec{0}$.
- b) $v \wedge w$ è un vettore ortogonale sia a v che a w .
- c) Il modulo del prodotto vettoriale $v \wedge w$ uguaglia l'area del parallelogramma definito da v e w .

Due rette con parametri direttori (l, m, n) e (l', m', n') sono ortogonali se $ll' + mm' + nn' = 0$. Due rette ortogonali possono essere sghembe.

Dato un punto P_0 e due rette non parallele, esiste un'unica retta passante per P_0 e perpendicolare alle rette date.

Dato un piano $\pi: ax+by+cz+d=0$, il vettore \vec{n} di coordinate (a, b, c) applicato in un punto qualunque di π è \perp a π . I parametri di giacitura di un piano rappresentano le coordinate di un vettore normale al piano.

Una retta r di parametri direttori (l, m, n) è ortogonale a un piano π di parametri di giacitura (a, b, c) se e solo se:

$$\text{rk} \begin{pmatrix} a & b & c \\ l & m & n \end{pmatrix} = 1, \quad \text{ovvero i parametri direttori sono proporzionali ai parametri di giacitura.}$$

Il piano $\pi: ax+by+cz+d=0$ e il piano $\pi': a'x+b'y+c'z+d'=0$ sono ortogonali se e solo se $aa'+bb'+cc'=0$

Per trovare la distanza del punto P_0 dal piano π occorre:

1. trovare la retta r passante per P_0 e ortogonale al piano π ;
2. calcolare il punto d'intersezione $H = r \cap \pi$ (proiezione ortogonale);
3. calcolare la distanza di P_0 da H .

} solo per esercizi

Dato il piano $\pi: ax+by+cz+d=0$ e il punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, la distanza del punto dal piano è definita come:

$$d(P_0, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

La distanza di un punto da una retta si ottiene come intersezione di r con il piano passante per P_0 e \perp a r . In questo modo si trova la proiezione ortogonale di P_0 sulla retta r , ovvero il punto H . Calcolando $d(P_0, H)$ si trova la distanza punto retta.

Per calcolare la distanza tra due rette distinguiamo due casi:

- Rette complanari:
 - incidenti $\Rightarrow d(r, r') = 0$
 - parallele non coincidenti \Rightarrow calcolo la distanza tra un punto qualsiasi di r e r' .
- Rette sghembe.

La distanza di due rette r, r' è minimizzata da due punti $H \in r$ e $H' \in r'$ tali che la retta passante per H e H' sia ortogonale sia a r che a r' .

Date due rette sghembe r, r' , esiste un'unica retta s perpendicolare e incidente sia a r che a r' , detta retta di minima distanza.

Un riferimento cartesiano R è individuato da un'origine O e una base ortonormale (e_1, e_2) di V^2 . Le coordinate del punto $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} P$ sono date da $P = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$. Sia R' un secondo sistema di riferimento con origine O' e base (e_1', e_2') . Il passaggio da R a R' si ottiene componendo la trasformazione ortogonale che porta dalla base (e_1, e_2) alla base (e_1', e_2') descritta da una matrice ortogonale M .

Sia P un punto e $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ le coordinate rispetto a R e $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ rispetto a R' e che $O' \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ rispetto a R e M sia la matrice di passaggio, allora:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M^t \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \quad \text{quindi le coordinate sono} \quad \begin{cases} x = m_{11}x' + m_{12}y' + x_0 \\ y = m_{21}x' + m_{22}y' + y_0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{dove } T \text{ è} \quad T = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & x_0 \\ m_{21} & m_{22} & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Date due rette con parametri direttori (l, m, n) e (l', m', n') , l'angolo tra due rette φ è definito come $\cos \varphi = \frac{ll' + mm' + nn'}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} \cdot \sqrt{l'^2 + m'^2 + n'^2}}$.

Dato una retta con parametri direttori (l, m, n) e i coefficienti direttori del piano (a, b, c) , l'angolo tra retta e piano φ è definito come $\sin \varphi = \frac{|al + bm + cn|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$.

Dati due piani (a, b, c) e (a', b', c') , l'angolo tra due piani φ è definito come $\cos \varphi = \frac{|aa' + bb' + cc'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}$.

Una **conica** è un'equazione di secondo grado in x, y del tipo

$$C: a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Esiste una matrice simmetrica detta **matrice della conica** del tipo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

L'equazione può essere scritta in forma matriciale:

$$(x, y, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

La matrice $A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ è detta **parte principale** ($\neq 0$).

Forme speciali facilmente riconoscibili:

- Ellisse reale $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1,$

- Ellisse immaginaria $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = -1,$

- Ellisse degenere $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 0,$

- Iperbole $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1.$

- Iperbole degenere $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0,$

- Parabola $Y^2 = 2pX,$

- Coppia di rette parallele $Y^2 = h^2,$

- Coppie di rette coincidenti $Y^2 = 0.$

- Coppia di rette parallele immaginarie $Y^2 = -k^2,$

Sia C una conica di equazione. Esiste sempre un riferimento $(O'; X', Y')$ nel quale l'equazione assume una forma nota.

Classificare una conica:

$$I_1 = \text{tr}Q, \quad I_2 = \det Q, \quad I_3 = \det A,$$

$$\text{Coniche generali: } I_3 \neq 0 \begin{cases} I_2 > 0: \begin{cases} I_3 I_1 > 0 & \text{ellisse immaginaria} \\ I_3 I_1 < 0 & \text{ellisse reale} \end{cases} \\ I_2 < 0 & \text{iperbole} \\ I_2 = 0 & \text{parabola} \end{cases}$$

$$\text{Coniche degeneri: } I_3 = 0 \begin{cases} I_2 > 0 & \text{ellisse degenera} \\ I_2 < 0 & \text{iperbole degenera} \\ I_2 = 0 & \text{parabola degenera} \end{cases}$$



Classificazione:

Trova gli autovalori λ_1 e λ_2 di A_2 .

B è la matrice che rappresenta la conica

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & b_1 \\ 0 & \lambda_2 & b_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \quad \text{di equazione} \quad \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2b_1 x' + 2b_2 y' + b_3 = 0.$$

- una conica degenera se λ_1 e $\lambda_2 \neq 0$ e $c = -\frac{b_1^2}{\lambda_1} - \frac{b_2^2}{\lambda_2} + b_3 = 0$ oppure se $\lambda_i = b_i = 0$ per un certo $i \in \{1, 2\}$.
- un'ellisse se λ_1 e $\lambda_2 \neq 0$ sono concordi e $c \neq 0$. Inoltre ho un'ellisse reale se c è discorde con essi, mentre ho un'ellisse con soli punti immaginari se c è concorde con gli autovalori.
- un'iperbole se λ_1 e $\lambda_2 \neq 0$ sono discordi e $c \neq 0$.
- una parabola se $\lambda_1 = 0$ e $b_1 \neq 0$ oppure $\lambda_2 = 0$ e $b_2 \neq 0$.
- una conica degenera $\Leftrightarrow \det(A) = 0$
- un'ellisse se $\det(A) \neq 0$ e $\det(A_1) > 0$. L'ellisse è reale se $Tr(A_1) \det(A) < 0$, non ha punti reali se $Tr(A_1) \det(A) > 0$
- un'iperbole se $\det(A) \neq 0$ e $\det(A_1) < 0$.
- una parabola se $\det(A) \neq 0$ e $\det(A_1) = 0$.