Geometria
Prova scritta, II appello, sessione invernale
Corso di laurea in fisica — A.A 2017/2018
Canali A – C, L – Pa e Pb – Z

Durata: 2 ora e 30 minuti

Simone Diverio   Alessandro D'Andrea   Paolo Piccinni
Antonietta Venezia

6 febbraio 2018

Esercizio 1. Sia $V = M_{n,n}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine n a coefficienti reali. Dimostrare o confutare, se necessario mediante un controesempio, le seguenti affermazioni.

(i) Il sottoinsieme $U \subset V$ definito da $U = \{A \in V \mid \det A = 0\}$ è un sottospazio vettoriale.

(ii) Il sottoinsieme $L \subset V$ definito da $L = \{A \in V \mid \operatorname{tr} A = 2018\}$ è un sottospazio affine, se $\operatorname{tr} A$ è la *traccia* di A, cioè la somma degli elementi sulla diagonale principale.

(iii) L'applicazione

$$\begin{aligned} T\colon V &\to \mathbb{R} \\ A &\mapsto \operatorname{tr} A \end{aligned}$$

è lineare, suriettiva, e il suo nucleo ha dimensione $n^2 - 1$.

Esercizio 2. Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{C}^4$:

$$U = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2i \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2i \\ -1 \\ -2 \\ -i \end{pmatrix} \right\}, \quad V : \begin{cases} z_1 - iz_2 + z_4 = 0 \\ z_3 + iz_4 = 0. \end{cases}$$

(i) Esibire una base per entrambi i sottospazi.

(ii) Determinare un insieme *minimale* di equazioni cartesiane per $U \cap V$.

(iii) Determinare la dimensione di $U + V$.

Esercizio 3. Si consideri la matrice $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ data da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e l'operatore lineare ad essa associato

$$L_A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3.$$

(i) Determinare autovalori e autospazi di A e stabilire se A è diagonalizzabile.

(ii) Scrivere le matrici $A^2 = A \cdot A$ e $A^3 = A \cdot A \cdot A$, determinarne autovalori e autospazi e stabilire se A^2 e A^3 sono diagonalizzabili.

(iii) Stabilire (motivando la risposta) che relazione sussiste tra autovalori e autospazi di A e autovalori e autospazi di $A^n = A \cdot A \ldots A$ (n volte), per ogni $n \geq 2$.

Esercizio 4. I vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono autovettori dell'applicazione lineare $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ di autovalori, rispettivamente, $1, 2, 3$.

Scrivere la matrice associata a T, utilizzando sia in partenza che in arrivo la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 5. Si consideri, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, il sistema lineare:

$$\begin{cases} -x & +y & +z & = & 3-k \\ -x & +(k+1)y & -z & = & k+1 \\ & y & -2z & = & 0. \end{cases}$$

(i) Determinare per quali valori di k il sistema è compatibile, studiando il rango della matrice dei coefficienti e della matrice completa.

(ii) Per i valori di k per cui il sistema risulta compatibile, determinare esplicitamente le soluzioni.

(iii) Per ciascuno dei valori di k, se esistono, per cui l'insieme delle soluzioni rappresenta una retta affine, determinare se tale retta è parallela alla retta r di equazioni parametriche

$$r: \begin{cases} x = -6t + 4 \\ y = -4t + 1 \\ z = -2t - 1. \end{cases}$$

Soluzioni

Esercizio 1. (i) Per $n > 1$, U non è un sottospazio vettoriale, come si mostra facilmente osservando che, già nel caso $n = 2$, le matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hanno determinante 0 e appartengono ad U, mentre la loro somma, che è l'identità, ha determinante 1 e giace quindi al di fuori di U.

Non è difficile presentare controesempi analoghi per ogni $n > 1$. Nel caso $n = 1$, invece, l'unica matrice di determinante 0 è quella nulla, e U è il sottospazio vettoriale banale.

(ii) Siano $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in V$. Allora se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la matrice $\alpha A + \beta B$ ha per elementi $(\alpha a_{ij} + \beta b_{ij})$ dunque

$$\operatorname{tr}(\alpha A + \beta B) = \sum_{i=1}^{n} \alpha a_{ii} + \beta b_{ii} = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \beta \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \alpha \operatorname{tr} A + \beta \operatorname{tr}.$$

In altre parole, l'applicazione "traccia" di cui al punto (iii) è un'applicazione lineare, ed L è allora un sottospazio affine. Infatti L è la preimmagine di 2018 per l'applicazione lineare T del punto successivo. Altro modo di vederlo è che L si può scrivere nella forma

$$L = A_0 + W,$$

dove A_0 è una qualunque matrice in V la cui traccia sia 2018 (ad esempio la matrice che ha tutti elementi nulli tranne uno sulla diagonale principale, esattamente uguale a 2018), essendo $W = \ker T$ il sottospazio vettoriale delle matrici a traccia nulla.

(iii) Che l'applicazione T sia lineare lo abbiamo già osservato precedentemente. Per verificare la suriettività, basta osservare che per ogni $t \in \mathbb{R}$, la matrice che ha t come elemento di riga uno e colonna uno, e zero altrove ha traccia esattamente uguale t. Per il teorema della dimensione (anche detto teorema del rango, o teorema di nullità più rango) allora

$$\underbrace{\dim \operatorname{Im}(T)}_{=1} + \dim \ker T = \underbrace{\dim V}_{=n^2},$$

cioè $\dim \ker T = n^2 - 1$.

Esercizio 2. Per (i), si vede subito che il terzo vettore generatore di U è ottenuto come il primo più il secondo, il tutto moltiplicato per i. Del resto i primi due vettori generatori sono chiaramente indipendenti, dunque una base $\mathcal{B}_U$ per U è data da

$$\mathcal{B}_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2i \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Una base $\mathcal{B}_V$ per V si può ottenere risolvendo il sistema lineare omogeneo che descrive V, il quale è già ridotto a scala, con pivot corrispondenti alle variabili z_1 e z_3. Usando come parametri liberi z_2 e z_4, otteniamo dunque

$$\mathcal{B}_V = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Per (ii), notiamo innanzitutto che il secondo vettore della base $\mathcal{B}_U$ soddisfa le equazioni che definiscono V, mentre il primo no. Dunque $U \cap V$ è generato $(1, i, 2i, -2)^t$, ed ha dunque dimensione uno. Un insieme minimale di equazioni cartesiane per $U \cap V$ deve dunque essere costituito da 3 equazioni, vivendo il problema in $\mathbb{C}^4$. Due equazioni le abbiamo già: sono quelle che definiscono V. Se aggiungiamo ad esempio $2z_2 - z_3 = 0$, che è chiaramente soddisfatta da $(1, i, 2i, -2)^t$, otteniamo

$$\begin{cases} z_1 - iz_2 + z_4 = 0 \\ 2z_2 - z_3 = 0 \\ z_3 + iz_4 = 0, \end{cases}$$

che è ancora ridotto a scala e dunque le tre equazioni sono indipendenti, e descrivono necessariamente $U \cap V$ (perché?).

Per (iii), la formula di Grassmann fornisce immediatamente

$$\dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

Esercizio 3. Per (i), risulta

$$\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)^3 - (1 - \lambda) = (1 - \lambda)\lambda(\lambda - 2),$$

da cui i tre autovalori distinti $\lambda = 0, 1, 2$ con autospazi rispettivamente

$$V_0 = \{(t_0, 0, -t_0)\}, \quad V_1 = \{(0, t_1, 0)\}, \quad V_2 = \{(t_2, 0, t_2)\},$$

ottenibili dai sistemi lineari omogenei rispettivamente

$$V_0 : \begin{cases} x_1 \quad\quad +x_3 = 0 \\ \quad\quad x_2 \quad\quad = 0 \\ x_1 \quad\quad +x_3 = 0 \end{cases},$$

$$V_1 : \begin{cases} x_1 \quad\quad +x_3 = x_1 \\ \quad\quad x_2 \quad\quad = x_2 \\ x_1 \quad\quad +x_3 = x_3 \end{cases},$$

$$V_0 : \begin{cases} x_1 \quad\quad +x_3 = 2x_1 \\ \quad\quad x_2 \quad\quad = 2x_2 \\ x_1 \quad\quad +x_3 = 2x_3 \end{cases}.$$

Per (ii) e (iii), si vede facilmente che

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

e non è complicato dimostrare per induzione che

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

se mai si volessero calcolare autovalori e autospazi di A^n direttamente dalla matrice.

Tuttavia, da $Av = \lambda v$ segue $A^2 v = A(Av) = A(\lambda v) = \lambda A(v) = \lambda^2 v$, risulta che V_0, V_1, V_2 sono autospazi di A^2, e similmente di A^n per ogni $n \geq 2$. Gli autovalori di A^n sono dunque $0^n = 0, 1^n = 1$ e 2^n. In particolare tutte le A^n hanno tre autovalori distinti e sono quindi sono diagonalizzabili.

Esercizio 4. L'enunciato dell'esercizio ci informa che

$$T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad T\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}, \qquad T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}.$$

Ma allora

$$T\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix},$$

da cui

$$T\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} = T\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + T\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix},$$

e

$$T\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} = T\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - T\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix}.$$

Pertanto

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3/2\\-1/2\\-1\end{pmatrix}, \qquad T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/2\\3/2\\-1\end{pmatrix}, \qquad T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix},$$

e la matrice cercata è

$$\begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5. Per (i), la matrice dei coefficienti e la matrice completa del sistema sono rispettivamente:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & k+1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad A' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 3-k \\ -1 & k+1 & -1 & k+1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché il determinante di A è $\det A = 2k - 2$, per $k \neq 1$ risulta $\det A \neq 0$ e dunque: $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A' = 3$; per $k = 1$, per entrambe le matrici, la terza riga si ottiene sottraendo alla seconda riga la prima, mentre le prime due righe sono chiaramente linearmente indipendenti e pertanto in questo caso si ha $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A' = 2$. Il sistema è quindi compatibile per ogni valore del parametro k.

Per il punto (ii), se $k \neq 1$ il sistema ammette una sola soluzione data da $(x, y, z) = (k, 2, 1)$ (può essere calcolata anche usando il teorema di Cramer). Invece per $k = 1$, il sistema ammette infinite soluzioni dipendenti da un parametro. In tal caso il sistema è equivalente al sistema formato da due sue equazioni linearmente indipendenti, ad esempio:

$$\begin{cases} -x + y + z = 2 \\ y - 2z = 0. \end{cases}$$

Questo può essere risolto ponendo $z = s$ come parametro e ottenendo dunque le infinite soluzioni $(x, y, z) = (3s + 2, 2s, s) = (2, 0, 0) + s(3, 2, 1)$.

Infine, per il punto (iii), il sistema descrive una retta affine per la sola scelta $k = 1$. Poiché $(-6, -4, -2) = -2\cdot(3, 2, 1)$, le due rette sono in tal caso entrambe parallele al vettore $(3, 2, 1)$ e sono quindi parallele tra loro.