[1]

# TEOREMA DI BERNOULLI

## 1) IPOT. DI FLUIDO PERFETTO ($\mu = 0$)

• Equazione di Eulero & Eq. Stevino

$$\rho(\vec{g} - \vec{A}) = \text{grad}\, p \qquad \vec{g} = -g\, \text{grad}(z)$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{grad}(z) + \text{grad}\left(\frac{p}{\gamma}\right) = -\frac{1}{g}\frac{DV}{Dt}}$$

## 2) IPOT. FLUIDO INCOMPRIMIBILE ($\rho = \text{cost}$)

$$\boxed{\text{grad}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) = -\frac{1}{g}\frac{DV}{Dt}}$$

## 3) PROIETTANDO EQ. SU TERNA INTRINSECA.

a) $\dfrac{\partial}{\partial s}\left(z + \dfrac{p}{\gamma}\right) = -\dfrac{1}{g}\dfrac{DV}{Dt} \rightsquigarrow$ ACCEL. TANG

a) $\frac{\partial}{\partial n}\left(z+\frac{p}{\gamma}\right) = -\frac{1}{g}\frac{V^2}{r}$ → ACC. CENTRIPETA

★ ... → $(z+p/\gamma)$ = cost. (TRAIETT. RETTIL.)

b) $\frac{\partial}{\partial b}\left(z+\frac{p}{\gamma}\right) = 0$ → COST. PER OGNI STORNO

4) IPOT. DI TRAIETT. RETTILINEA

3) $\frac{\partial}{\partial s}\left(z+\frac{p}{\gamma}\right) = -\frac{1}{g}\frac{dV}{dt}$

- Derivata sostanziale: $\boxed{\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{V^2}{2}\right)}$

5) IPOT. MOTO PERMANENTE: $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(z+\frac{p}{\gamma}+\frac{V^2}{2g}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(z+\frac{p}{\gamma}+\frac{V^2}{2g}\right) = cost = H}$$

**• PROFILI DI MOTO GRADUALMENTE VARIATO**

1. • Attraverso: $\begin{cases} H = z + \frac{p}{\gamma} + \alpha\frac{V^2}{2g} \\ E = z + \frac{p}{\gamma} + \alpha\frac{V^2}{2g} \end{cases} \Rightarrow$

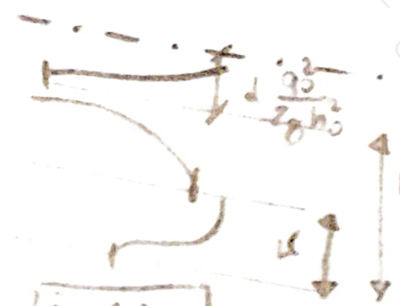
$\boxed{H = E + z_{rif}}$ $\quad z = 0$

2. $\begin{cases} i = -\frac{dz_{rif}}{ds} = tg\theta \\ H = E + z_{rif} \quad (+) \\ \frac{dH}{ds} = -J \end{cases}$ $\quad \begin{cases} E = h + \alpha\frac{V^2}{2g} \\ \frac{dQ}{ds} = 0 \text{ (Q. cost.)} \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dh}{ds} = \frac{i-J}{1-Fr^2}}$$

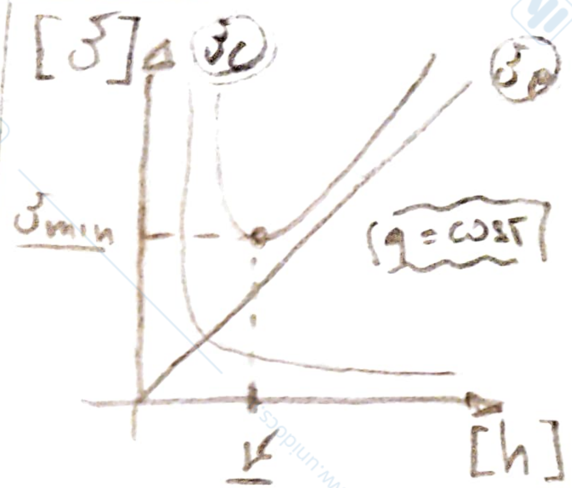
EQUAZIONE DEI PROFILI DI MOTO GRAD. VARIATO.

• CORR. LENTA

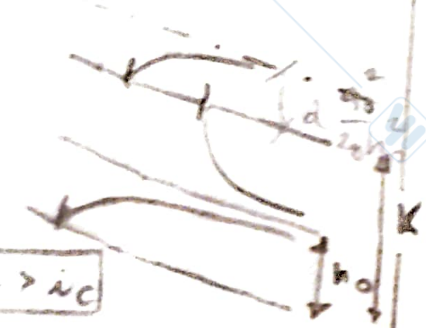



$i < i_c$

($\Delta 1$, $\Delta 2$, $\Delta 3$)

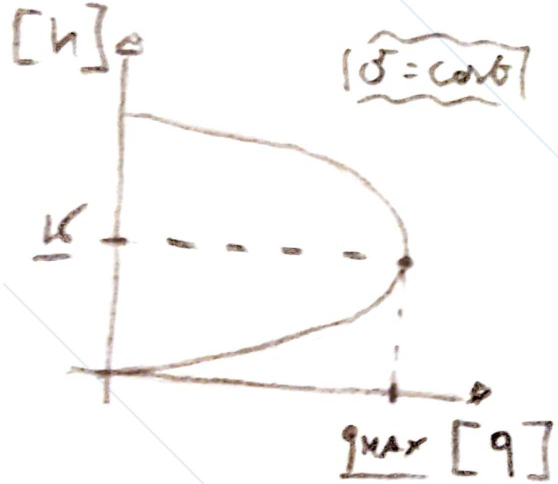



• CORR. VELOCE




$i > i_c$

($F_1$, $F_2$, $F_3$)




Agos

## TEOREMA DEGLI IMPULSI

• La variazione della quantità di moto ($mv$) deve eguagliare il relativo impulso delle forze agenti

$$\left[\underbrace{(A\,ds)\rho}_{dm} \cdot \underbrace{V_0}_{dQ_M} = \underbrace{(\Delta p A)}_{F} dt\right] \to \text{RICAVO}$$

• FENOMENO COLPO D'ARIETE PER LOTTO VALVOLA SULLA CONDOTTA:

$\boxed{\Delta p = \rho c V_0}$ con $c = \dfrac{ds}{dt} \to$ CELERITÀ

$\downarrow$ con $t = \dfrac{L}{c} \to$ TEMPO SPOSTAM. ONDA

SOVRAPRESS. DOVUTO SCHIACCIAM.

- INCOMPRIMIBILITA' & CELERITA' FLUIDI

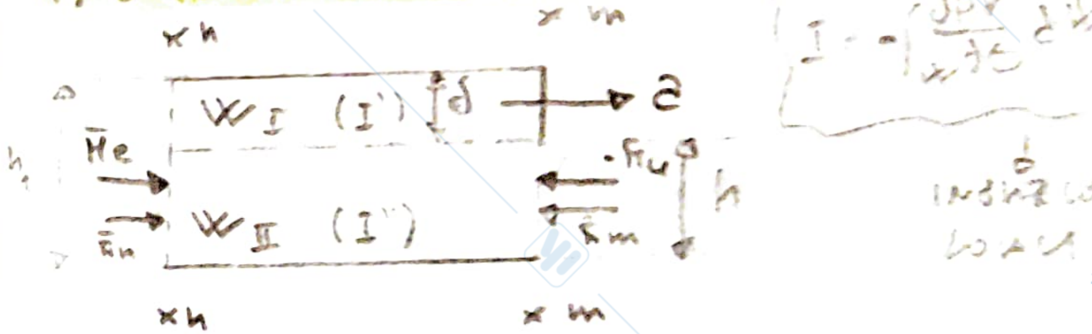
① $\frac{dW}{W} = -\frac{dP}{\varepsilon}$

- Tramite conservazione $Q_M$:

② $c = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}}$

MOTO VARIO NEI CANALI

1) EQUAZIONE GLOBALE DELLA DIN.




$\bar{\Pi}_n + \bar{\Pi}_m + \bar{M}_e - \bar{M}_u + (I' + I'') = 0$

2) CONTRIBUTI INERZIE LOCALI

- Variazione della $Q_M$:
  - $\rho ds \, \delta B \cdot V_d$ → Dopo onda
  - $\rho ds \, h B \cdot V$ → Prima onda

• Sostituiamo I ror a eq. globale din.

3) EQUAZIONE DI CONTINUITÀ

$Q_1 = Q + \Delta Q \rightsquigarrow \Delta Q = a(h_1 - h)B$

$\Rightarrow c = a - V = \frac{V_1 h_1 - Vh}{h_1 - h} - V$ CEL. ASSOLUTA

$\Rightarrow \boxed{V - V_1 = \frac{h - h_1}{h_1} c}$ $\boxed{a = V + c}$

• Sost. nella eq. globale dinamica

4) EQUAZIONE LAGRANGE

$\boxed{c = \pm\sqrt{gh}}$ $\rightsquigarrow$ Per piccole onde ($\delta \ll d$)

a) $V = 0$

b) $V = c$ (CRITICO)


c) $V < c$


d) $V > c$

$$\boxed{Fr = \frac{V}{|c|}} \begin{cases} > 1 \\ = 1 \\ < 1 \end{cases}$$

## • AZIONE TRASCINAMENTO DELLE CORRENTI

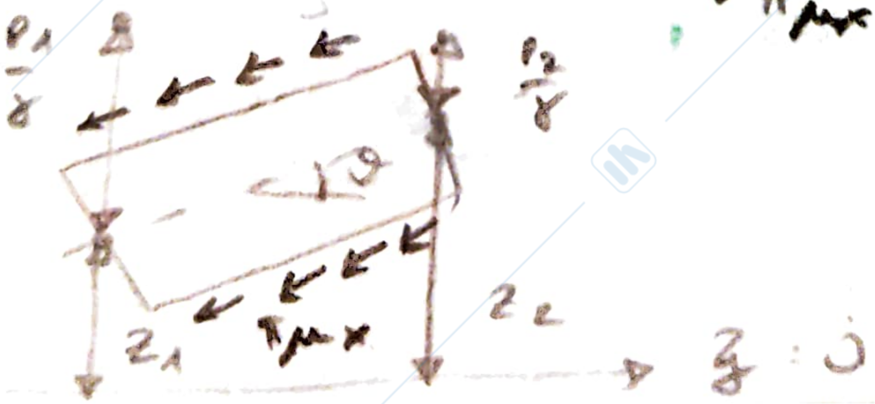
- $\delta_H$ dissipata da forze attrito

- FORZE SUPERFICIALI
  - → FORZA SUP. LAT. CONDOTTO
  - → FORZA TRASCINAM. CON FLUIDO

⇒ TENSIONI TANGENZIALI NATURA VISCOSA

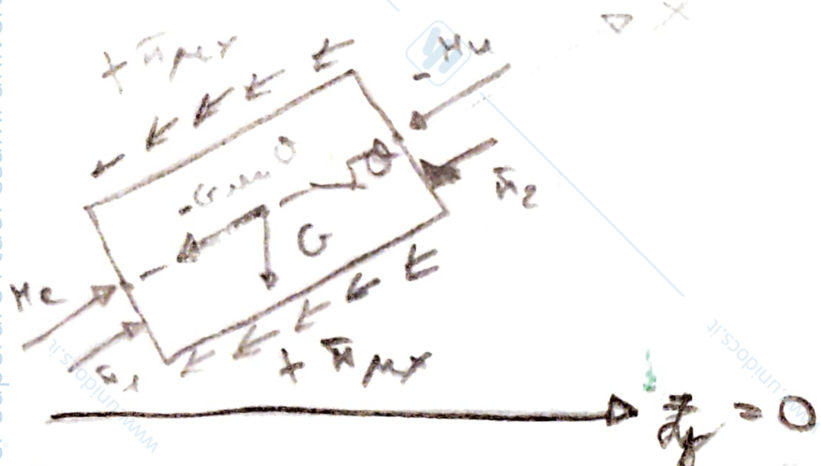
## • DIMOSTRAZIONE

① CONSIDERO TRATTO DI CONDOTTA




• $\tau_{\mu x}$ = FORZA SUP. LAT. CONDOTTO che rall. corrente

2) APPLICO EQUAZIONI GLOBALI DINAMICA




Lungo asse x:

$$\bar\Pi + \bar\Pi_\mu + \bar G + \bar M_e - \bar M_u + \bar I = \bar 0$$

$$\Rightarrow \bar\Pi_x + \bar\Pi_{\mu x} + \bar G_x + \bar M_{ex} - \bar M_{ux} = \bar 0$$

3) FORZA TRASCINAMENTO CORRENTE T.

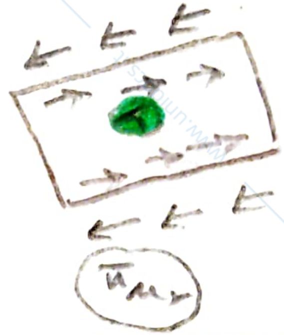
$$\bar\Pi_x + \bar\Pi_{\mu x} + \bar G_x = \bar 0$$

$$\rightarrow \left[\bar T = -\bar\Pi_{\mu x}\right] = \bar\Pi_x + \bar G_x \Rightarrow$$ VETTORE TRASCINAM.

segue il verso della corrente (azione opposta a forze resist. conduttore)

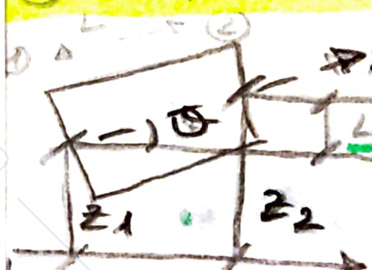


• VETTORE TRASCINAMENTO:




$$\boxed{\bar\Pi_1 + \bar\Pi_2 + \bar G = \bar T}$$

4) COMPONENTE VETTORE T: Esprimiamo moduli




$L \sin\theta = (z_2 - z_1)$

$$T = |\bar\Pi_1| - |\bar\Pi_2| - |G_x| \Rightarrow A(p_1 - p_2) - \gamma L A \sin\theta$$

$L \sin\theta = (z_2 - z_1)$

$$T = \gamma A\left[\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma}\right)\right]$$

**⑩ VARIAZ. CARICO = VARIAZ. PIEZOM. nel caso di {V = cost, A = cost}**

① $\left[\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V^2}{2g}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V^2}{2g}\right)\right] = \boxed{\Delta H}$ =

② $\left[\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma}\right)\right] = \boxed{JL}$

⟶ CONDIZIONI DI MOTO UNIFORME

$[JL]$ → $H_1 - H_2$ ⇒ VARIAZ. CARICO

→ $\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma}\right)$ ⇒ VARIAZ. LIN. PIEZ.

⑤ FORZA TRASCINAM. ⑧ TENSIONE VISCOSA PARETE

- FORZA TRASCINAM. : $T = \gamma A JL$ $[N]$
- TENSIONE VISCOSA PARETE :

$\boxed{\tau_0} = \frac{T}{LP} = \boxed{\gamma R_i J}$ $[N/m^2]$

→ $P$ : PERIMETRO BAGNATO = $\pi D$

②

**• TENSIONE SUPERFICIALE** :

$\sigma = \left[\frac{N}{m}\right]$ → AGISCE SU LINEA SEPARAZ. FLUIDO - FLUIDO

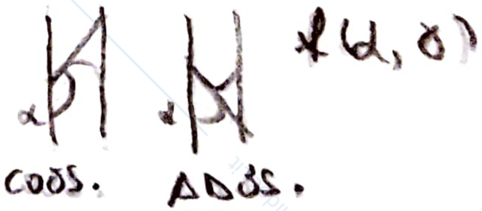
④ LEGGE LAPLACE :

$\left[\Delta p = \sigma\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)\right]$

FORMANO CURVATURA


FORZE ADESIONE / COESIONE

RISALITA CAPILLARE




FLUIDO-ARIA-SOLIDO

[3]

Agos

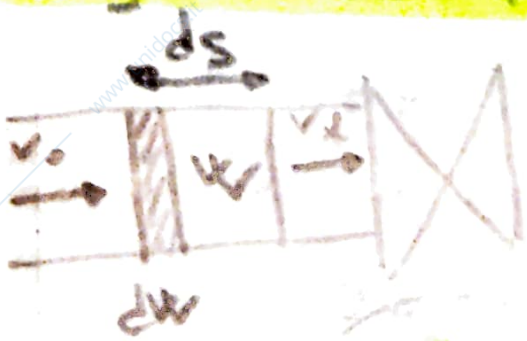
## INCOMPRIMIBILITÀ DI UN FLUIDO & CELERITÀ

• Ricavare celerità c utilizzando:

① TH. IMPULSI : $\left[\Delta p = \rho c V_0\right]$ con $V_f = 0$

② FONT. INCOMPR. : $\left[\dfrac{dW}{W} = -\dfrac{dp}{\varepsilon}\right]$

[1] Volumetto fluido che subisce $\Delta W$




② $\dfrac{dW}{W} = -\dfrac{dp}{\varepsilon} \Rightarrow$

$W$ $\quad$ $dP$

$$\left[dW = -\frac{W\,dp}{\varepsilon} = -\frac{(A\,ds)(\rho c(V_0 - V_f))}{\varepsilon}\right] \quad 1^\circ$$

**[2] DIFFERENZA PORTATA MASSICA ENTRANTE e USCENTE**

① ENTRA:

$\xrightarrow{v_0}$ $\qquad$ $\xrightarrow{v_\ell}$ $\to dm_W$ (2)

$Q_e = v_0 A$ $\qquad$ $d W$ $\qquad$ $Q_u = v_\ell A$

$Q_{me} = \rho v_0 A$ $\qquad$ $Q_{mu} = \rho v_\ell A$

$\Rightarrow (Q_{me} - Q_{mu})\, dt = dm_W$

$\Rightarrow \rho (Q_e - Q_u)\, dt = \rho\, dW$

$\Rightarrow \left[ (v_0 A - v_\ell A)\, dt = dW \right]$ 2°

Abbiamo due modi per esprimere $dW$

$dW \to dW = (v_0 A - v_\ell A)\, dt$

$dW \to dW = -\dfrac{[(A ds)(\rho c (v_0 - v_\ell))]}{\varepsilon}$

**[3] Mettiamo insieme modi di esprimere $dW$**

$- dW = (v_0 A - v_\ell A) dt = - \dfrac{(A ds)(\rho c [v_0 - v_\ell])}{\varepsilon}$

$\Rightarrow A (v_0 - v_\ell) dt = \dfrac{(A ds)(\rho c [v_0 - v_\ell])}{\varepsilon}$

$\Rightarrow c \cdot \dfrac{ds}{dt} = c^2 = \dfrac{\varepsilon}{\rho}$

$\Rightarrow \boxed{c = \pm \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\rho}}} \rightsquigarrow$ ONDA ASCENDENTE & DISCENDENTE

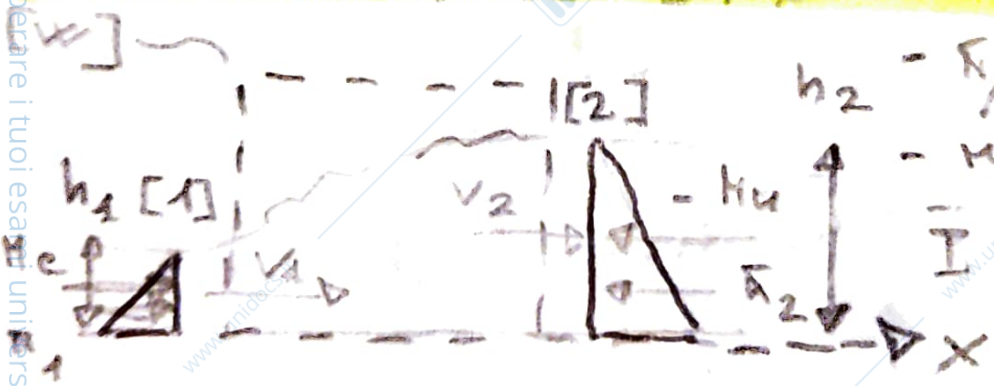
[4]

## ■ IL RISALTO IDRAULICO

- Fenomeno fortemente areato e dissipativo: corr. VELOCE ⟼ corr. LENTA
- Studio h e $\Delta E$

## • DIMOSTRAZIONE h CONIUGATE

### ① EQ. GLOBALE DINAMICA




- $\tau_\mu$ TRASCURABILE
- MOTO PERMANENTE

$$\bar{I} = -\int_W \frac{\partial \rho V}{\partial t}\, dW = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{\Pi} + \bar{G} + \bar{I} + \bar{M}_e - \bar{M}_u = 0} \rightsquigarrow \boxed{\bar{\Pi} + \bar{M}_e - \bar{M}_u = 0}$$

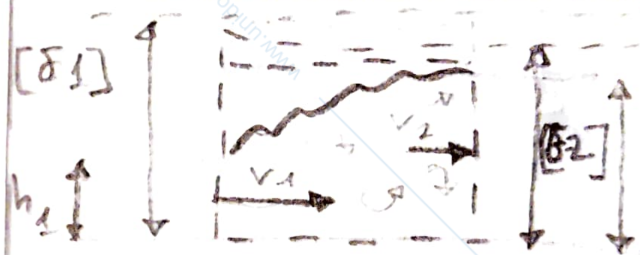
### ② ANALISI EQ. GLOBALE DINAMICA

$\bar{\Pi}$: → $\Pi_1$ [SEZ 1]; → $\Pi_2$ [SEZ 2] ; $\bar{M}$: → $M_e$ [SEZ 1]; → $M_u$ [SEZ 2]

Agos

• DIMOSTRAZIONE $\Delta\varepsilon$ BURROCRATICO

① STUDIO $\varepsilon$ FONDO DEL CANALE




$\bullet\ \varepsilon = h + \frac{q^2}{2gh^2}$

$$[\Delta\varepsilon] = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = h_1 - h_2 + \frac{q^2}{2g}\left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta\varepsilon = h_1 - h_2 + \frac{k^3}{2}\left(\frac{h_2^2 - h_1^2}{h_1^2 h_2^2}\right)$$

② RICAVO $k^3$ DA EQ. h CONIUGATE

$$h_1 + h_2 = \frac{2k^3}{h_1 h_2} \longrightarrow k^3 = \frac{(h_1+h_2)h_1 h_2}{2}$$

③ ESPLICITIAMO MODULI

$$\begin{cases} |\Pi_1| = \gamma \frac{h_1}{2}(Bh_1) \\ |\Pi_2| = \gamma \frac{h_2}{2}(Bh_2) \end{cases} ; \quad \begin{cases} |M_e| = \rho Q V_1 = \rho \frac{Q^2}{Bh_1} \\ |-M_u| = \rho Q V_2 = \rho \frac{Q^2}{Bh_2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Pi_1 + M_e = \Pi_2 + M_u}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{1}{2}\gamma h_1^2 B + \rho \frac{Q^2}{Bh_1} = \frac{1}{2}h_2^2 B + \rho \frac{Q^2}{Bh_2}}$$

④ PASSAGGI ALGEBRICI

$$\frac{h_2^2 - h_1^2}{2} = \frac{Q^2}{gB^2}\left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right) \rightarrow \frac{q^2}{g} = k^3$$

$$\rightarrow \frac{h_2^2 - h_1^2}{2} = k^3\left(\frac{h_2 - h_1}{h_1 h_2}\right)$$

$$\rightarrow \boxed{h_1 + h_2 = \frac{2k^3}{h_1 h_2}} \rightarrow$$ EQUAZIONE ALTEZZE CONIUGATE

## 3 SOST. $K^3$ A EQ. [$\Delta\delta$]

$$\boxed{\Delta\delta = \frac{(h_2 - h_1)^3}{4 h_1 h_2}} \longrightarrow \text{EQUAZIONE DI DISSIP. ENERGIA}$$

$$\Delta\delta = \left[ m = \frac{J}{N} \right]$$