

CORRENTI IN PRESSIONE

1 – IL MOTO UNIFORME

Lo studio del moto uniforme di una corrente in pressione richiede una analisi di dettaglio del moto fluido ed, in particolare, del complesso fenomeno della turbolenza; in linea generale, anche ai fini applicativi, il problema essenziale consiste nell'individuare la relazione esistente fra la cadente J della corrente e tutte le altre grandezze da cui essa può dipendere. Una semplice analisi qualitativa porta a riconoscere che queste grandezze possono suddividersi in tre categorie:

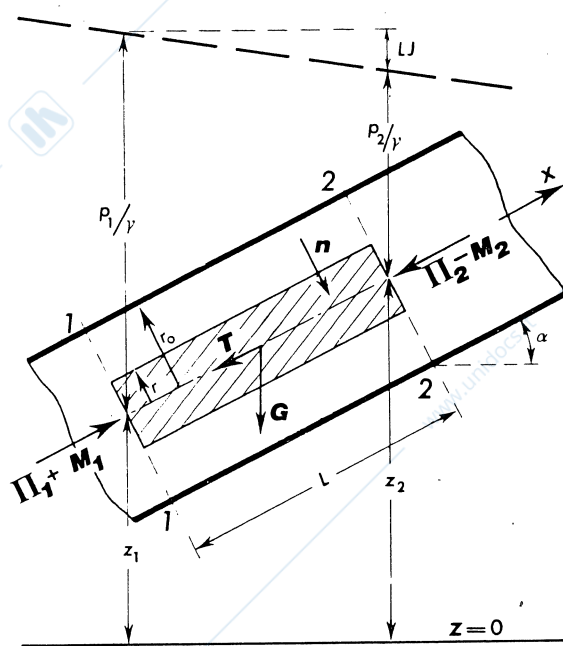
- **grandezze relative al condotto** in cui la corrente si muove ed, in particolare, area e forma della sezione trasversale, scabrezza della parete interna;
- **grandezze cinematiche**, quali la portata della corrente o la sua velocità media;
- **grandezze fisiche del fluido** dalle quali il movimento dipende, ossia essenzialmente viscosità e densità, cui si deve aggiungere la comprimibilità se si tratta di un gas e il moto dà luogo a considerevoli variazioni della pressione.

La condizione di moto uniforme presuppone che la condotta sia cilindrica, mentre resta imprecisata la forma della sezione trasversale, anche se di solito si fa riferimento a condotte a sezione circolare, sia perché di gran lunga più comuni nelle applicazioni tecniche, sia per le evidenti semplificazioni nello studio derivanti dalla simmetria assiale. D'altra parte, la forma della sezione trasversale ha una chiara influenza sui caratteri del moto in regime laminare, mentre la sua influenza è del tutto trascurabile nel moto turbolento; nella sezione circolare basta una sola dimensione lineare, il raggio idraulico, a definire geometricamente la forma della sezione trasversale.

Il moto uniforme è, per definizione, quello in cui il **vettore velocità si mantiene costante lungo ogni traiettoria**, dove, nel caso di moto turbolento si fa riferimento alle traiettorie del moto medio o di

trasporto, e alle velocità medie temporali, senza considerare le componenti di agitazione; la costanza delle velocità lungo ogni traiettoria implica la costanza della distribuzione delle velocità stesse nelle successive sezioni trasversali e, quindi, la costanza della distribuzione degli sforzi tangenziali e della pressione; quest'ultima, in particolare, dal momento che le traiettorie sono rettilinee, si fa l'ipotesi di distribuzione idrostatica nelle singole sezioni. Infine, lungo tutte le traiettorie della corrente si ha lo stesso valore della cadente J , per cui si adotta una unica linea piezometrica per l'intera corrente.

Per dimostrare che gli sforzi tangenziali in un condotto cilindrico circolare variano linearmente lungo il raggio, con valore nullo sull'asse e massimo alla parete, si consideri un tale tipo di condotto in **moto laminare** o **viscoso** e si applichi l'equazione globale dell'equilibrio dinamico al volume liquido racchiuso in un cilindretto di raggio r coassiale alla corrente e lungo L .



Siano $G = \gamma \times \pi r^2 L$ il peso del cilindretto liquido, $\vec{\Pi}_1$ e $\vec{\Pi}_2$ le spinte idrostatiche che agiscono su di esso attraverso le sezioni 1 e 2 di ingresso e di uscita della corrente, applicate nei relativi centri di spinta e $\vec{\Pi}_0$ la spinta agente sulla superficie laterale del cilindretto, della quale è mostrata la sola componente T nella direzione del moto, agente evidentemente lungo l'asse per ragioni di simmetria.

Siano, infine, \vec{M}_1 e \vec{M}_2 le quantità di moto della portata entrante ed

uscite, uguali fra di loro per l'ammessa uniformità del movimento, e, quindi, la cui differenza è nulla; se α l'angolo che l'asse del condotto forma con l'orizzontale, l'equazione globale dell'equilibrio, proiettata nella direzione del moto, vale:

$$\Pi_1 + M_1 - \Pi_2 - M_2 - T - G \sin \alpha = 0 \quad (83)$$

dove sono presenti i moduli dei vettori; nell'ipotesi di distribuzione idrostatica della pressione, si ha che:

$$\Pi_1 = p_1 \times \pi r^2 \quad \Pi_2 = p_2 \times \pi r^2 \quad (84a)$$

Inoltre, se z_1 e z_2 sono le quote dei baricentri delle sezioni di ingresso e di uscita sopra il piano di riferimento di quota nulla, risulta:

$$G \sin \alpha = (\gamma \times \pi r^2 L) \times (z_2 - z_1) / L \quad (84b)$$

da cui si ricava T come:

$$T = \pi r^2 \times (p_1 - p_2) - \gamma \pi r^2 \times (z_2 - z_1) = \gamma \pi r^2 L J \quad (85a)$$

dove T è la resistenza al moto che il cilindretto liquido incontra per effetto dell'azione frenante esercitata dal liquido che lo circonda e che è animato da minore velocità; essa si esercita sul cilindretto attraverso la sua superficie laterale sulla quale risulta, per ovvie ragioni di simmetria, uniformemente distribuita; se si divide T per l'area della superficie laterale si ottiene lo sforzo tangenziale τ :

$$\tau = (\gamma \pi r^2 L J) / 2 \pi r L = \gamma J r / 2 \quad (85b)$$

che cresce con il raggio del cilindretto; se τ_0 è lo sforzo tangenziale alla parete ed r_0 il raggio del condotto, si può anche scrivere:

$$\tau = \tau_0 r / r_0 \quad (85c)$$

da cui risulta, appunto, che τ varia linearmente lungo il raggio.

2 – MOTO LAMINARE

Nel moto **laminare**, dal momento che le componenti di agitazione della velocità sono nulle, le traiettorie effettive delle singole particelle fluide coincidono con le traiettorie del moto medio: in particolare, per il moto uniforme sono rette parallele alle generatrici del condotto.

Se nell'equazione globale si separano le componenti normali delle spinte agenti sulla superficie di contorno da quelle tangenziali, si ha:

$$\vec{G} + \vec{\Pi}_i - \mu \int_A \frac{\partial \vec{v}}{\partial n} dA + \vec{M}_1 - \vec{M}_2 + \vec{I} = 0 \quad (86a)$$

dove l'integrale rappresenta, appunto, tali componenti tangenziali; se applichiamo la (86) al solito cilindro liquido, si può subito osservare che, sulle due facce d'ingresso e d'uscita, tali componenti sono nulle, in quanto in ogni punto di esse, per l'uniformità del moto, $\partial \vec{v} / \partial n = 0$; inoltre, la componente normale della spinta che agisce sulla superficie laterale del cilindro è diretta normalmente all'asse ed ha, quindi, proiezione nulla sull'asse. Pertanto, se A_0 è la superficie laterale, la T che è diretta in senso opposto al moto ed alla velocità \vec{v} , vale:

$$T = \mu \int_{A_0} \frac{\partial u}{\partial n} dA \quad (87a)$$

Se u è il modulo della velocità, uguale alla componente secondo l'asse, assunto come asse x , per effetto della simmetria, sia u che le $\partial u / \partial n$ hanno valore costante su tutta la A_0 ; inoltre, tenuto presente che la derivata è calcolata secondo la normale interna e che, quindi, è $\partial u / \partial n = -\partial u / \partial r$, poiché u è funzione solo di r , si può scrivere:

$$T = -\mu \int_{A_0} \frac{\partial u}{\partial r} dA = -\mu \frac{du}{dr} A_0 = -\mu \frac{du}{dr} 2 \pi r L \quad (87b)$$

da cui, evidentemente, si ritrova la legge di Newton:

$$\tau = -\mu \frac{du}{dr} \quad (5)$$

Se eguagliamo la (87b) alla (85a), si ha:

$$T = -2 \pi r L \mu \left(\frac{du}{dr} \right) = \gamma \pi r^2 L J \quad (87c)$$

ossia semplificando:

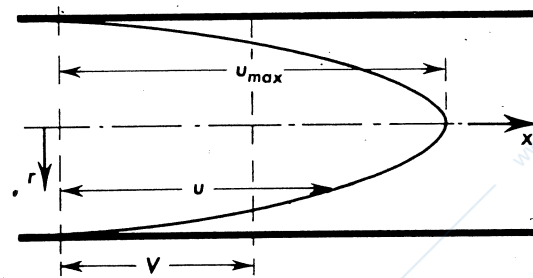
$$\frac{du}{dr} = - \left(\frac{\gamma}{2 \mu} \right) \times r J \quad (87d)$$

che definisce la distribuzione della velocità nella sezione trasversale della corrente. Nell'ipotesi di fluido perfetto, sarebbe stato sia $\mu=0$, per ipotesi, che $J=0$, per il teorema di Bernoulli e l'uniformità del moto, per cui la (87d) si ridurrebbe a una banale identità, incapace di individuare la distribuzione della velocità in quanto qualunque distribuzione di velocità risulterebbe compatibile con le ipotesi.

E' un problema indeterminato, simile allo studio dell'equilibrio dei solidi iperstaticamente vincolati, se considerati rigidi, dove qualunque sistema equilibrato di reazioni vincolari è accettabile. Ciò mette in evidenza la astrattezza della ipotesi del fluido perfetto e la sua inadeguatezza a studiare il moto in relazione alle sue cause.

L'integrale della (87d) è:

$$u = - \left(\frac{\gamma J}{4 \mu} \right) \times r^2 + \text{cost} \quad (88a)$$



Per determinare il valore della costante si può ricordare che osservazioni sperimentali hanno mostrato che, al contatto con la parete solida del condotto, la velocità sia nulla, ossia:

$$u = 0 \quad \text{per } r = r_0 = D/2 \quad (89)$$

da cui, si ottiene:

$$u = \frac{\gamma J}{4 \mu} \left(\frac{D^2}{4} - r^2 \right) \quad (88b)$$

ossia una distribuzione parabolica delle velocità con massimo pari a:

$$u_{\max} = \frac{\gamma J}{16 \mu} D^2 \quad (88c)$$

sull'asse del condotto e valore nullo alla parete; se si integra la (88b) all'intera sezione trasversale della corrente si ottiene portata:

$$Q = \int_0^{D/2} u \, 2 \pi r \, dr = \frac{\pi \gamma J}{2 \mu} \int_0^{D/2} \left(\frac{D^2}{4} - r^2 \right) r \, dr = \frac{\pi}{128} \frac{\gamma J}{\mu} D^4 \quad (90)$$

detta **formula di Hagen-Poiseuille**, di notevole importanza concettuale, in quanto la perfetta coincidenza dei risultati sperimentali di Poiseuille con quelli ottenuti per via puramente analitica partendo dall'equazione globale rappresenta una valida conferma non solo dell'ipotesi di velocità nulla al contorno, ma soprattutto dell'ipotesi basilare della legge di Newton (5) degli sforzi viscosi, sulla quale è stata costruita tutta la dinamica dei fluidi viscosi.

Se si divide la portata per l'area della sezione trasversale della corrente si ricava la **velocità media**:

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{1}{32} \frac{\gamma J}{\mu} D^2 = \frac{1}{2} u_{\max} \quad (91a)$$

che, se al posto di D , si usa il raggio idraulico $R=D/4$, diventa:

$$V = \frac{1}{2} \frac{\gamma J}{\mu} R^2 \quad (91b)$$

In linea generale, l'integrazione delle equazioni del moto viscoso, effettuata per diversi tipi di sezione trasversale, conduce ad una espressione della velocità media del tipo:

$$V = \alpha \frac{\gamma J}{\mu} R^2 \quad (91c)$$

dove α è un coefficiente variabile da caso a caso; pertanto, nel moto laminare, il raggio idraulico non è sufficiente a individuare completamente la geometria della sezione, ma occorre introdurre anche un coefficiente caratteristico di forma della sezione trasversale.