



# Statica

Non è necessario considerare il tempo

## Pressione

$$\vec{u} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = 0 \Rightarrow \tau_{ij} = 0$$

Se della matrice degli sforzi non sono nulli solo i valori sulla diagonale, allora gli autovalori sono tutti uguali → valori uguali sulla diagonale qualsiasi sia la giacitura

$$\begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}$$

Stato degli sforzi isotropo

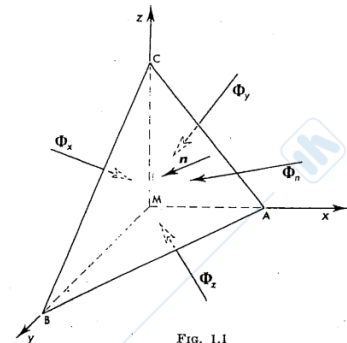
L'informazione si riduce ad uno scalare e il vettore è sempre normale alla superficie  $p \cdot \hat{n}$

### Dimostrazione alternativa unico valore p

Richiamando il tetraedro di Cauchy

$$\vec{\Phi}_n = \vec{\Phi}_x \cos \hat{n}_x + \vec{\Phi}_y \cos \hat{n}_y + \vec{\Phi}_z \cos \hat{n}_z$$

Siamo in statica → tensioni tangenziali nulle → le forze sono orientate normalmente alla superficie su cui agiscono



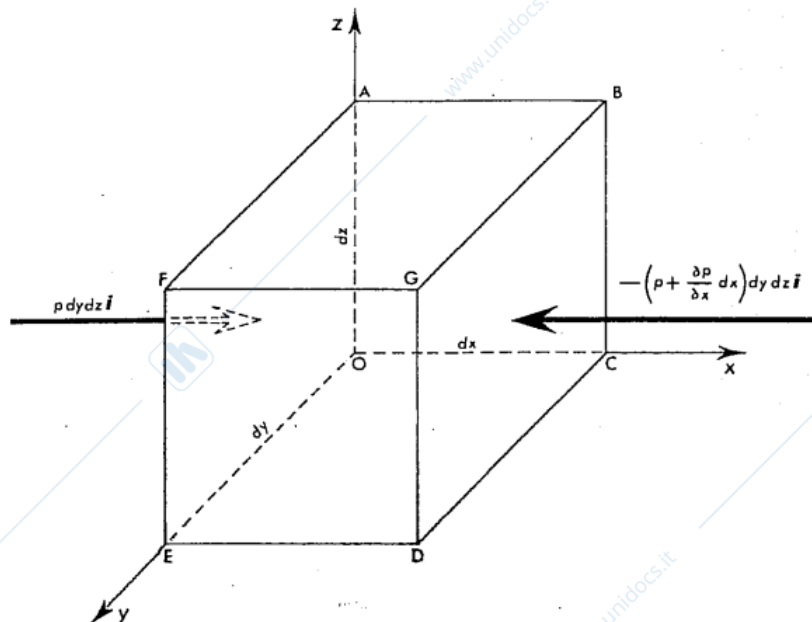
Faccio l'equilibrio alla traslazione lungo i tre assi

$$\begin{aligned}\sigma_n \cos \hat{n}_x &= \sigma_x \cos \hat{n}_x; \quad \sigma_n \cos \hat{n}_y = \sigma_y \cos \hat{n}_y; \quad \sigma_n \cos \hat{n}_z = \sigma_z \cos \hat{n}_z \\ \Rightarrow \sigma_n &= \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = p\end{aligned}$$

## Equazione indefinita della statica dei fluidi

Obiettivo: definire  $p=p(x,y,z)$

Consideriamo un prisma infinitesimo (le altre forme differiscono per infinitesimi di ordine superiore)



**Forze di volume**

$$\vec{F} \rho dx dy dz$$

**Forze di superficie**

$$\begin{aligned}
 p \, dydz - \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dydz &= -\frac{\partial p}{\partial x} dx dydz && \text{lungo } x \\
 p \, dx dz - \left( p + \frac{\partial p}{\partial y} dy \right) dx dz &= -\frac{\partial p}{\partial y} dx dy dz && \text{lungo } y \\
 p \, dy dz - \left( p + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) dx dy &= -\frac{\partial p}{\partial z} dx dy dz && \text{lungo } z
 \end{aligned}$$

Per il primo principio (statica) faccio l'equilibrio

$$\begin{aligned}
 \vec{F} \rho \, dV - \frac{\partial p}{\partial x} \hat{i} dV - \frac{\partial p}{\partial y} \hat{j} dV - \frac{\partial p}{\partial z} \hat{k} dV &= 0 \\
 \Rightarrow \vec{F} \rho - \frac{\partial p}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial p}{\partial y} \hat{j} - \frac{\partial p}{\partial z} \hat{k} &= 0 \\
 \Rightarrow \vec{F} \rho &= \text{grad } p
 \end{aligned}$$

Questa equazione vale in ogni punto della massa

NOTA: se non ci fosse una forza di massa  $P = \text{cost}$

*esempio: scendendo nel mare aumenta la pressione perché aumenta il peso della colonna di acqua sovrastante*

### Osservazione 1

Nel caso in cui il fluido sia incomprimibile  $\rho = \text{cost}$

$$F = \text{grad} \left( \frac{p}{\rho} \right)$$

Il termine tra parentesi è un potenziale  $\rightarrow$  vantaggio: possiamo ragionare con gli scalari (potenziale) invece dei vettori

### Osservazione 2

Se  $\vec{F}$  ammette potenziale  $U$

$$\rho \, \text{grad } U = \text{grad } p$$

**le superfici equipotenziali sono anche isobare**

## Equazione globale

Voglio considerare l'intero volume del fluido

$$\int_V \rho \vec{F} dV = \int_V \text{grad } p dV \Rightarrow \vec{P} = - \int_{\Omega} p (\cos \hat{n}_x \hat{i} + \cos \hat{n}_y \hat{j} + \cos \hat{n}_z \hat{k}) d\Omega$$

Il termine a sinistra corrisponde alla forza peso, mentre a destra abbiamo usato la relazione tra integrale di volume e di superficie

$$P = - \int_{\Omega} p(\hat{n}) d\Omega = -\vec{F}_C$$

dove  $\vec{F}_C$  sta a indicare la risultante delle forze al contorno

$$\vec{P} + \vec{F}_C = \mathbf{0}$$

## Carico piezometrico

1 HP: fluido incompressibile  $\rho = \text{cost}$

2 HP: la forza di massa è gravitazionale (SR con z verso alto)  $\vec{F} = -g \text{ grad}(z)$

Dall'equazione indefinita ottengo

$$\rho \vec{F} = -\rho g \text{ grad}(z) = \text{grad } p \Rightarrow \gamma \text{ grad}(z) + \text{grad } p = 0 \Rightarrow \text{grad} \left( z + \frac{p}{\gamma} \right) = 0$$

L'argomento della parentesi è quindi un **invariante** (costante in tutta la massa) e viene chiamato **carico piezometrico**

$$z + \frac{p}{\gamma} = \text{cost} = h$$

ed è composto da **altezza geodetica** e **altezza piezometrica**

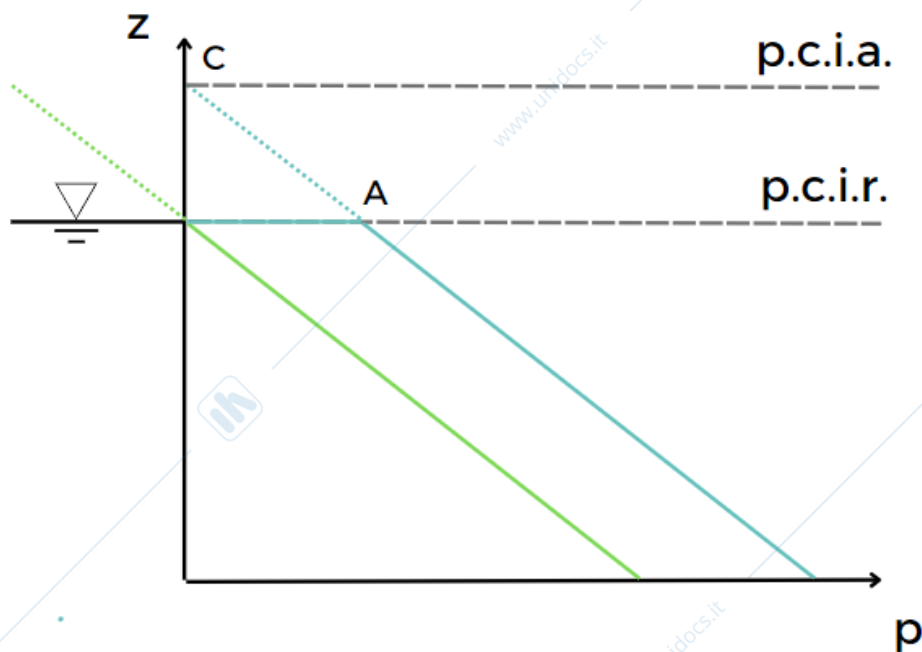
Da questo posso dedurre che, in questo caso, c'è una **relazione lineare tra la pressione e la profondità**

$$p_B = p_A + \gamma(z_A - z_B)$$

Lungo la verticale, l'andamento di pressione è lineare con pendenza  $\gamma$

## Piano dei carichi idrostatici assoluti e relativi

Sulla superficie libera  $p = p_{atm}$



Quota in cui la pressione (assoluta) si annulla → piano carichi idrostatici assoluti

Quota superficie libera dell'acqua → piano dei carichi idrostatici relativi

La differenza tra i due è data dall'altezza piezometrica a pressione atmosferica

$$h_A = h_C \Rightarrow z_A + \frac{p_A}{\gamma} = z_C + \frac{p_C}{\gamma} \Rightarrow z_C - z_A = \frac{p_A}{\gamma}$$

Dipendendo da  $\gamma$  questa è caratteristica per ogni fluido

Acqua  $\approx 10,33$  m

Mercurio  $\approx 76$  cm

## Pressione relativa

In questo corso useremo non la pressione assoluta ma quella relativa (in verde nel grafico)

$$p_r = p - p_{atm}$$

E la massima depressione raggiungibile è

$$p = -\frac{p_{atm}}{\gamma}$$

*esempio: in una cannuccia l'acqua sale per depressione dei polmoni*

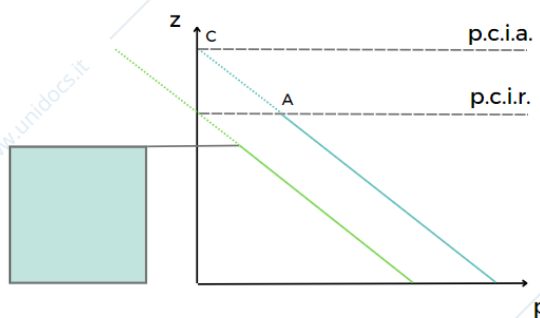


Quesito idraulico: l'acqua per depressione può salire al massimo per 10,33m. Come fanno gli alberi a portare l'acqua alle foglie più in alto di quella quota?

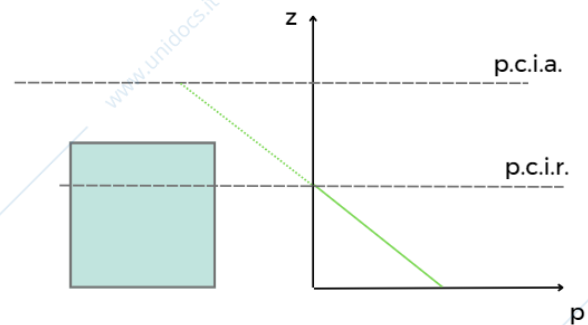
Uno dei problemi sono le bolle di aria che si formano per troppa depressione e che possono occludere i vasi, ad esempio in caso di siccità importanti alcuni alberi (soprattutto le conifere rischiano l'implosione delle cellule)

## Contenitore chiuso con superficie libera non visibile

In pressione



In depressione



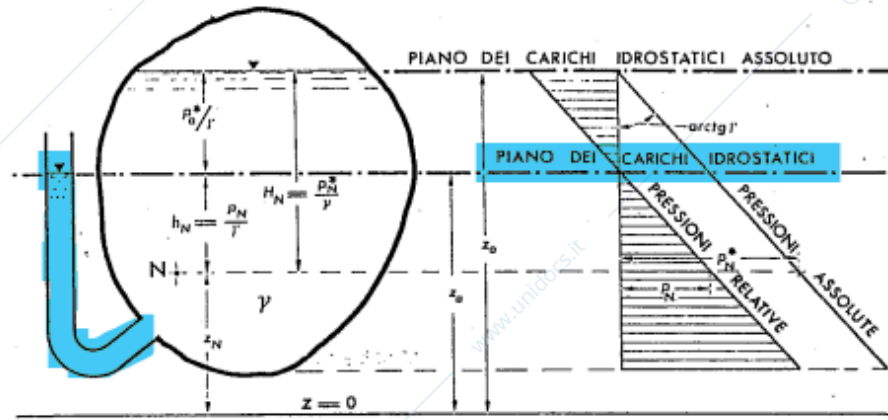
Cosa dobbiamo richiedere? La posizione del piano dei carichi idrostatici relativi

*esempio: con il braccio alzato in alto, sopra il livello del cuore, si forma una leggera depressione → i vasi fanno resistenza e viene trasmesso l'input al cervello di abbassare il braccio*

# Piezometro e manometri

Sono strumenti che servono a conoscere la pressione

## Piezometro



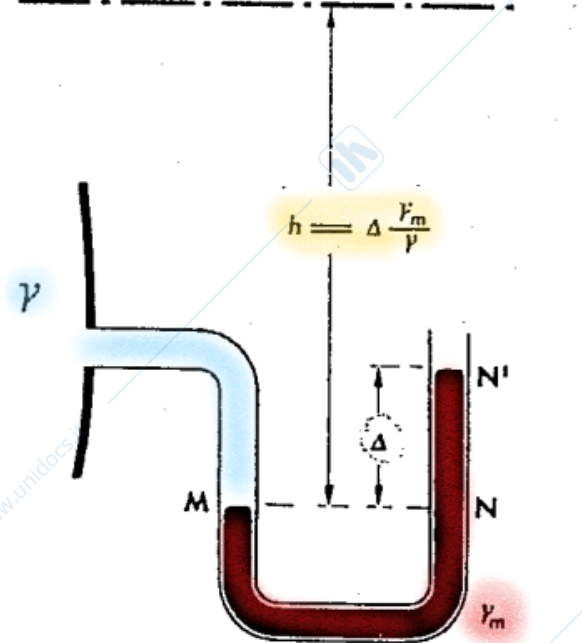
Un semplice tubicino collegato al nostro fluido, in base alla pressione del fluido l'acqua risale di un certo livello, in corrispondenza del quale passa il p.c.i.r.  $p = p_{atm}$

Non sempre è possibile:

- se c'è molta pressione il tubicino dev'essere molto grande
- rischi legati al tipo di fluido
- evaporazione

## Manometro

**PIANO DEI CARICHI IDROSTATICI**



Nel tubo è presente un **fluido manometrico** (solitamente mercurio), dal suo punto di vista

$$p_{M,m} = p_{N,m} = \gamma_m \Delta$$

Ma poiché siamo in statica allora c'è equilibrio

$$p_{M,m} = p_{M,f}$$

La pressione è anche  $p_{M,f} = \gamma h$

Quindi h è pari a

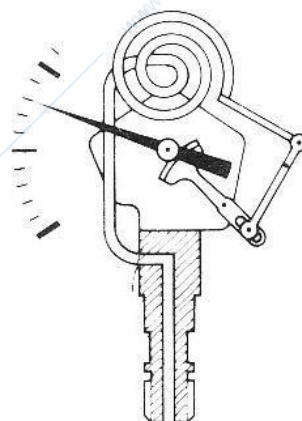
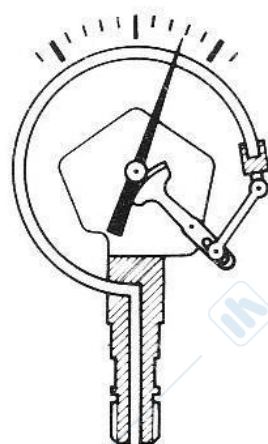
$$h = \frac{p_{M,f}}{\gamma} = \frac{\gamma_m \Delta}{\gamma}$$

Il tutto è tecnicamente fattibile perché

$$\gamma_m \gg \gamma$$

Se fosse in depressione N' sotto M

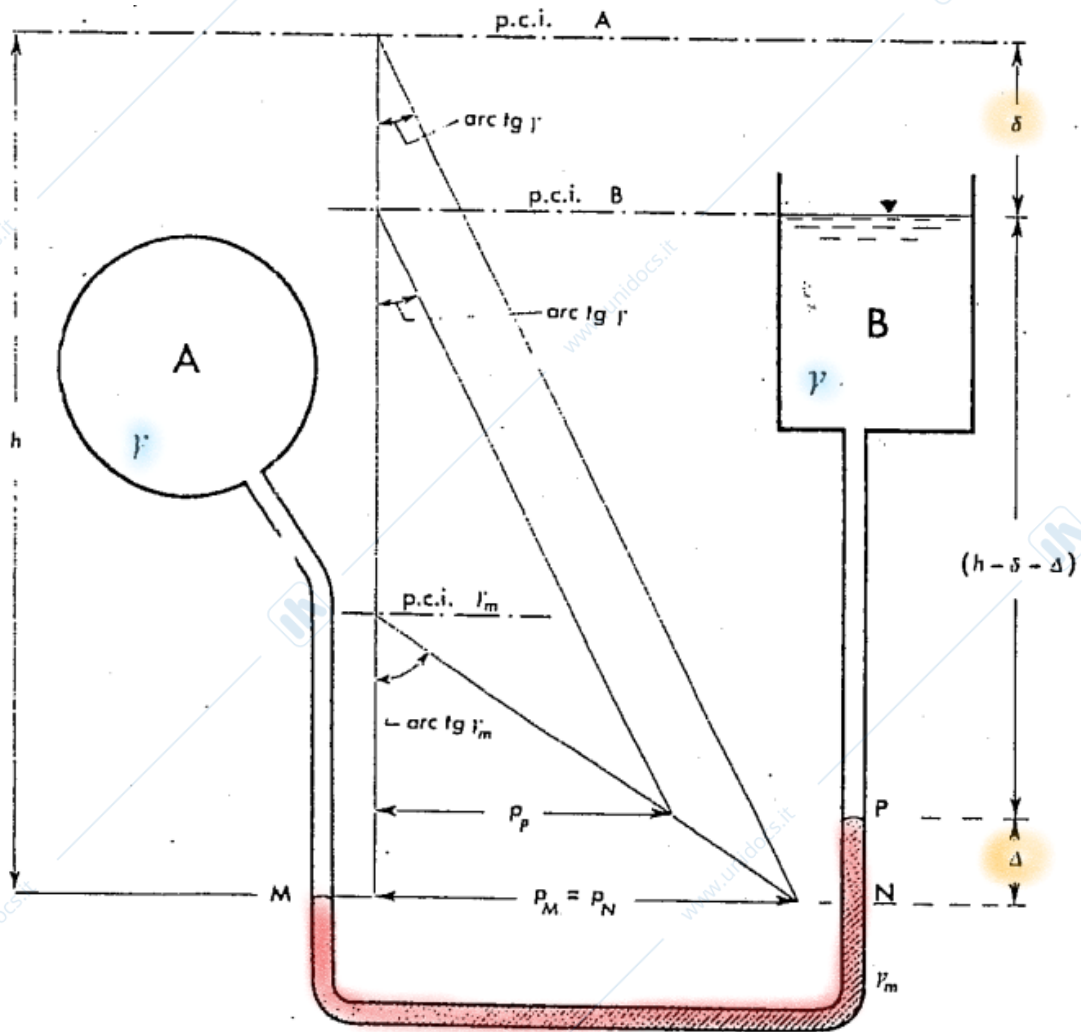
**Manometro metallico**



Nella scatola di misurazione c'è una spirale metallica che si "srotola" per effetto della pressione del fluido, i più precisi hanno delle membrane metalliche

L'idea è quella di legare pressione (sforzo) e deformazione

## Manometro differenziale



L'obiettivo è quello di tenere sotto controllo le variazioni di  $\delta$

$$\text{In M } \gamma a = p_M = p_N \quad \text{con } a = \delta + h + \Delta$$

$$\text{In P } \gamma h = p_P$$

$$\text{In N } p_P + \gamma_m \Delta$$

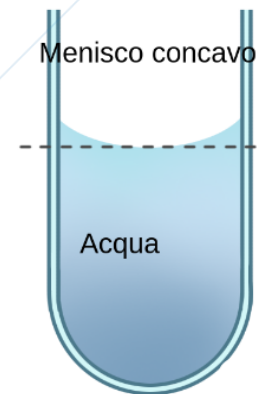
$$\text{Unendo il tutto } p_N = \gamma(\delta + h + \Delta) = \gamma h + \gamma_m \Delta$$

Trovo quindi

$$\delta = \frac{\gamma - \gamma_m}{\gamma} \Delta$$

NOTA: in questo caso  $\Delta < \delta$ , se volessi amplificare questa differenza devo "capovolgere" lo strumento con un fluido manometrico più leggero

NOTA: la precisione di questi strumenti è influenzata dall'effetto della tensione superficiale sui capillari, vedo quindi un livello leggermente diverso del reale p.c.i.r.



Rilevante nel campo della micro e nano fluidica

NOTA BENE: le pressioni non sono collegate ai volumi ma alla posizione del p.c.i.r.

*esempio: indipendentemente dai volumi di acqua dietro una diga la spinta della parete è proporzionale all'altezza dei carichi*

## Spinta sulle superfici

### Superfici piane

Vogliamo conoscere la risultante della spinta del fluido sulla superficie piana  $\vec{S}$

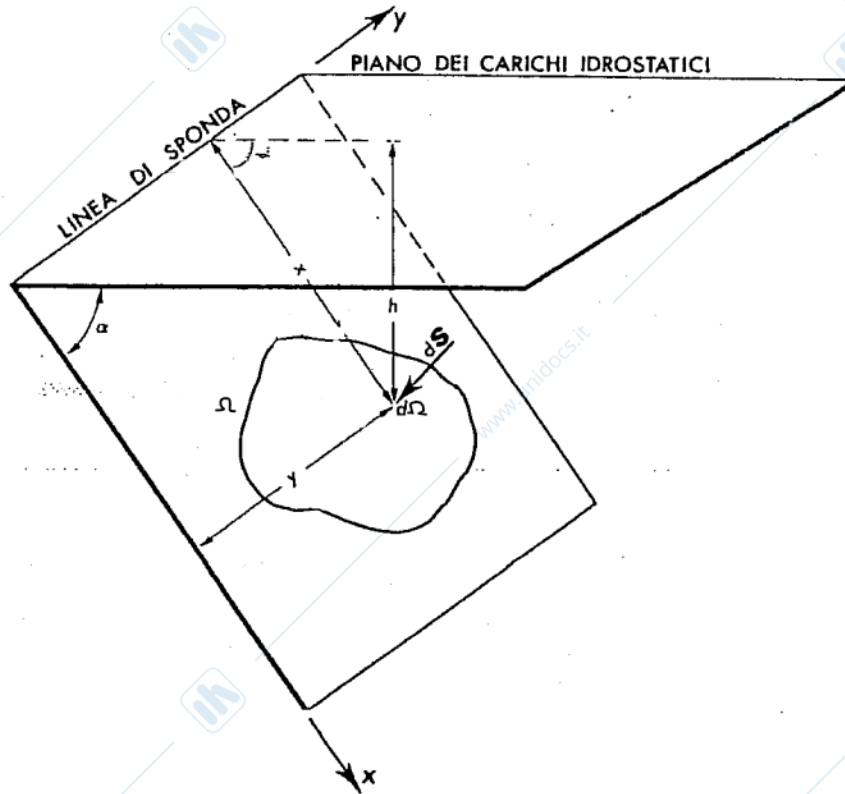


$\vec{S}$  è un vettore applicato

La somma di due vettori applicati può essere fatta trasladando i vettori SOLO lungo la propria retta d'azione

La direzione di  $\vec{S}$  è sempre perpendicolare alla superficie (verso: entrante nella superficie)

Consideriamo un fluido tagliato da una superficie inclinata di  $\alpha$  rispetto al piano dei carichi idrostatici. L'intersezione tra i due piani si chiama linea di sponda (asse  $y$ ). L'asse  $x$  invece è la linea di massima pendenza del piano.



$$h = x \operatorname{sen} \alpha \text{ affondamento}$$

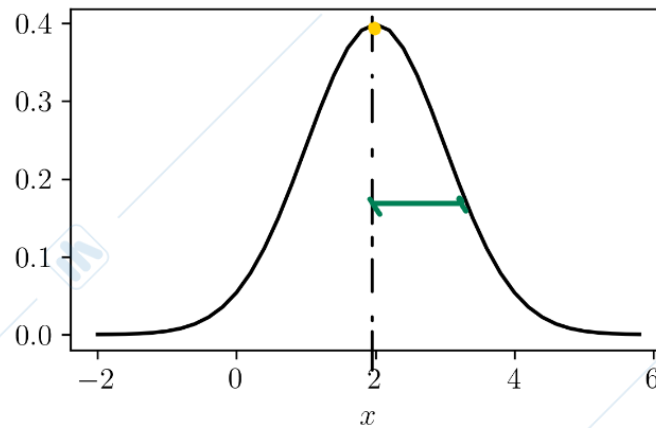
$$p = h\gamma \text{ sforzo normale}$$

$$pd\Omega = dS = x \operatorname{sen} \alpha \gamma d\Omega \text{ spinta infinitesima sull'area infinitesima}$$

$$S = \int_{\Omega} dS = \int_{\Omega} x \operatorname{sen} \alpha \gamma d\Omega = \operatorname{sen} \alpha \gamma \int_{\Omega} x d\Omega = \operatorname{sen} \alpha \gamma M_{I_s}$$

### Momento statico sulla superficie rispetto alla linea di sponda

Nota matematica: Cosa a che fare con il momento della statistica?



**Momento del primo ordine o Media:** Info sul valore centrale della Gaussiana

**Momento del secondo ordine o Varianza:** Info su quanto è larga la “campana”

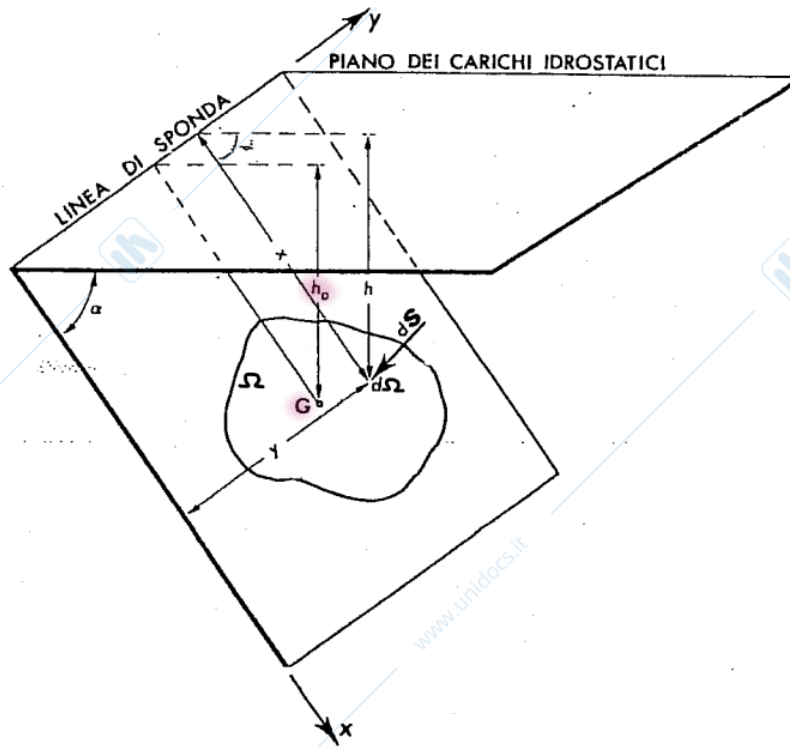
Il tutto si riconduce a fornire delle info per rappresentare geometricamente la statistica

Dal momento statico sulla superficie possiamo ricavare la coordinata del baricentro

$$M_r = \int_{\Omega} x d\Omega = x_G \Omega$$

Tornando all'espressione della spinta troviamo

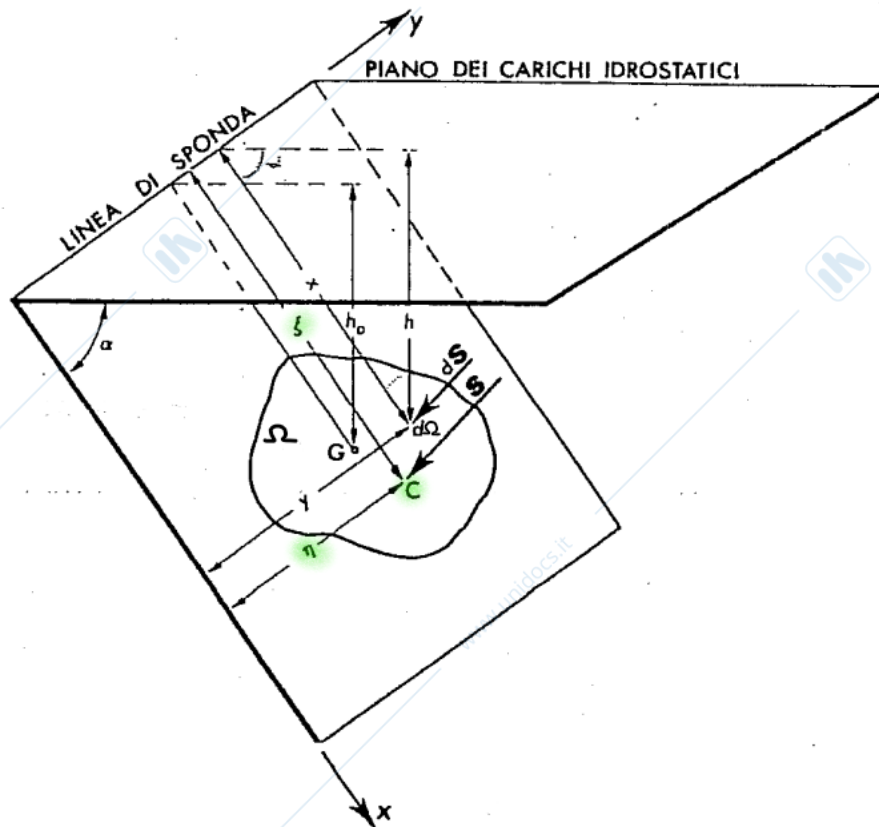
$$S = \text{sen}\alpha \gamma M_{l_s} = \text{sen}\alpha \gamma x_G \Omega = h_G \gamma \Omega = p_G \Omega$$



Ovvero la spinta è pari alla pressione che c'è nel baricentro della superficie

**NOTA: se tengo fisso  $x_G$  la spinta non cambia**

*esempio: Se in tre vasi diversi la superficie libera è posta allo stesso livello e questi hanno uguale base, anche se il volume di acqua è diverso la spinta sulla base è uguale*



Il punto di applicazione della spinta è chiamato centro di spinta C di coordinate  $(\xi, \eta)$

Per trovare le coordinate facciamo un equilibrio alla rotazione attorno agli assi.

$dS = \gamma \operatorname{sen} \alpha x d\Omega$  spinta infinitesima

$dM = x dS = \gamma \operatorname{sen} \alpha x^2 d\Omega$  momento infinitesimo

$$\int_{\Omega} dM = \int_{\Omega} \gamma \operatorname{sen} \alpha x^2 d\Omega = \gamma \operatorname{sen} \alpha \int_{\Omega} x^2 d\Omega = \gamma \operatorname{sen} \alpha I_{I_s} = \eta S$$

**Momento di inerzia della superficie rispetto alla linea di sponda**

NOTA: è importante dire il momento di cosa rispetto a che cosa

Da qui ricavo

$$\gamma \operatorname{sen} \alpha I_{I_s} = \eta S \Rightarrow \gamma \operatorname{sen} \alpha I_{I_s} = \eta \operatorname{sen} \alpha \gamma M_{I_s} \Rightarrow \eta = \frac{I_{I_s}}{M_{I_s}}$$

C non coincide con il baricentro, ma si "aggiunge un pezzetto" oltre al baricentro

$I_r = I_{G,r} + x_G^2 \Omega$  Teorema di Huygens-Steiner o Teorema Trasporto

$$\eta = \frac{I_{l_s}}{M_{l_s}} = \frac{I_{G, // l_s} + x_G^2 \Omega}{x_G \Omega} = \frac{I_{G, // l_s}}{M_{l_s}} + x_G$$

Se non ho superfici strane, senza simmetrie, posso fare il momento rispetto all'asse x

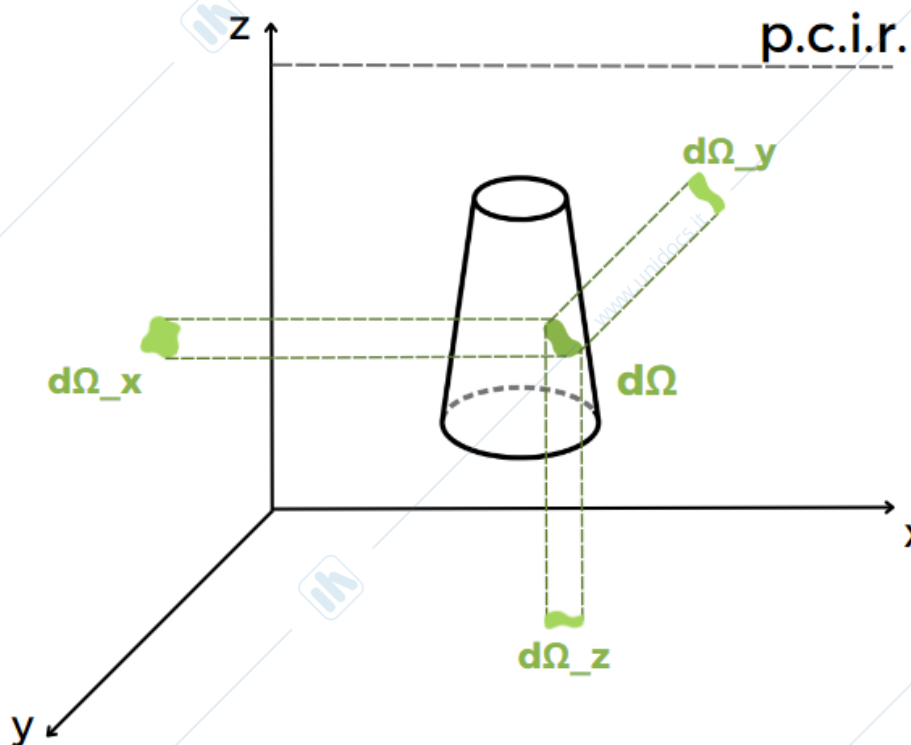
Per la coordinata  $\xi$  si calcola il momento rispetto all'asse x

$$dM = y dS = \gamma \sin \alpha$$

$$\xi = \frac{I_{l_s, x}}{M_{l_s}}$$

## Superfici gobbe o curve

### Metodo canonico



Proiezione della superficie sui tre piani degli assi e per ognuna si calcola la spinta

$$d\Omega_x = d\Omega \cos \hat{n}_x \text{ dove agisce } d\vec{S}_x = dS \cos \hat{n}_x = pd\Omega_x \text{ integro } S_x = \int_{\Omega_x} pd\Omega_x = p_{G,x}\Omega_x$$

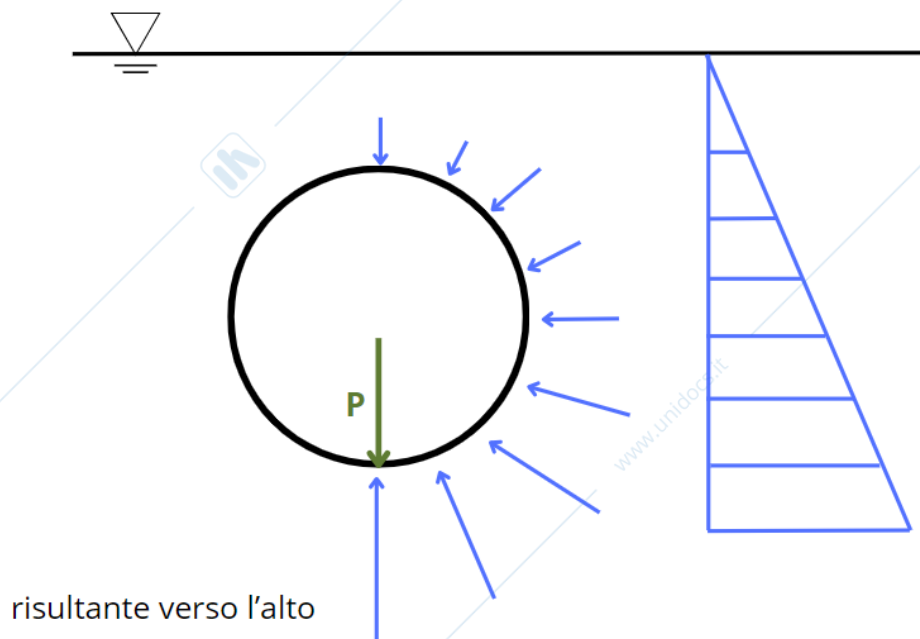
$$d\Omega_y = d\Omega \cos \hat{n}_y \text{ dove agisce } d\vec{S}_y = dS \cos \hat{n}_y = pd\Omega_y \text{ integro } S_y = \int_{\Omega_y} pd\Omega_y = p_{G,y}\Omega_y$$

$$d\Omega_z = d\Omega \cos \hat{n}_z \text{ dove agisce } d\vec{S}_z = dS \cos \hat{n}_z = pd\Omega_z \text{ integro } S_z = \int_{\Omega_z} pd\Omega_z = p_{G,z}\Omega_z$$

Mi sono ricondotta a 3 spinte su superfici piane che se sommate (! sono vettori applicati) danno la spinta complessiva

### Metodo con principio di Archimede

$$\rho \vec{F} = \text{grad } p \Rightarrow \vec{P} + \vec{F}_c = 0$$



Ipotizziamo che all'interno ci sia lo stesso liquido con il medesimo p.c.i.r.

Le forze agenti sulla superficie sono pari al peso del volume di liquido all'interno della superficie

$$\vec{P} = -\vec{F}_C$$

Esempio applicativo: paratoia

L'obiettivo è quello di calcolare la spinta dell'acqua sulla paratoia.

Per farlo chiudo con una superficie piana un volume di fluido. Tramite la formula di Archimede posso trovare la spinta "problema tipicamente in approssimazione piana"

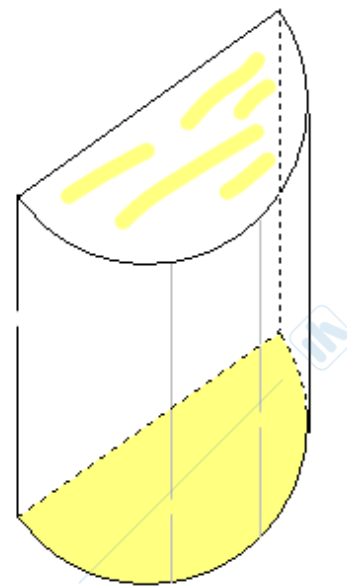
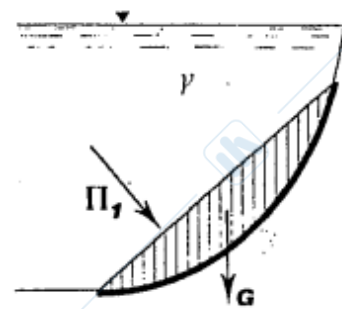
Ottingo una superficie di questo genere.

Le due basi si elidono

La superficie curva è la nostra incognita

Grazie al teorema di Archimede possiamo dire

$$\vec{F}_C = \vec{S}_{piana} + \vec{S}_{curva}$$



## Stabilità della soluzione - galleggiamento

Posso arrivare alle soluzioni per via analitica o numerica

Se ho più soluzioni devo capire quale è più probabile che si realizzi → stabile

La bottiglia che galleggia in acqua dritta esiste come soluzione ma non si verifica quasi mai, perché non è una soluzione stabile

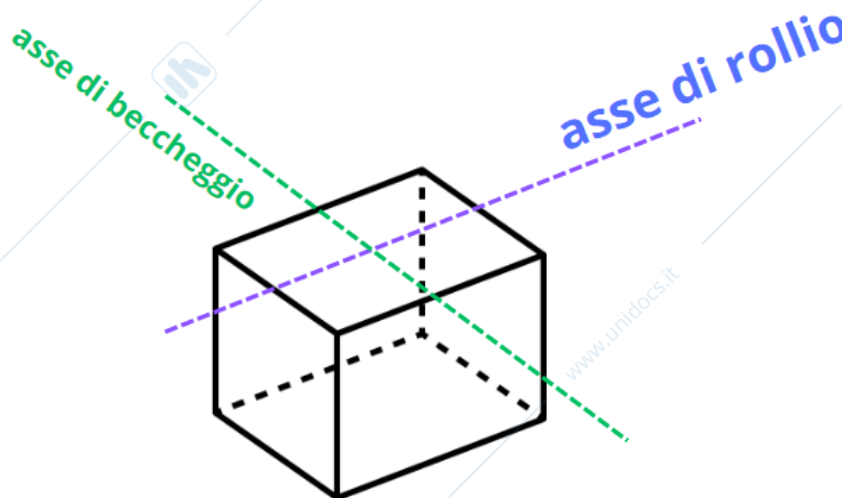
le soluzioni stabili, che si verificano più probabilmente sono i *path*

i fluidi sono il campo dell'instabilità



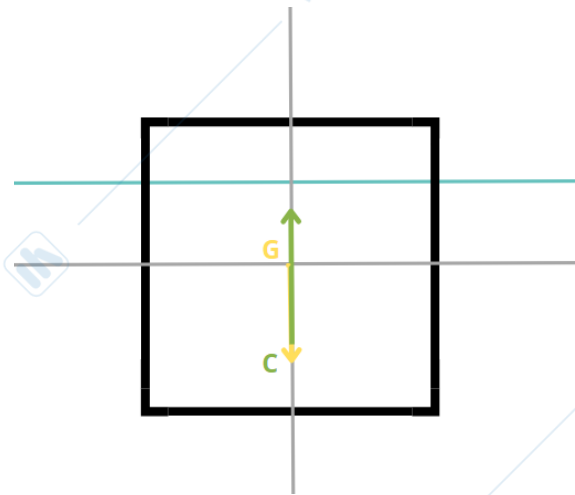
esempio: pioggia sui vetri, perché vengono prese delle strade piuttosto che altre?

Molto importante in campo navale



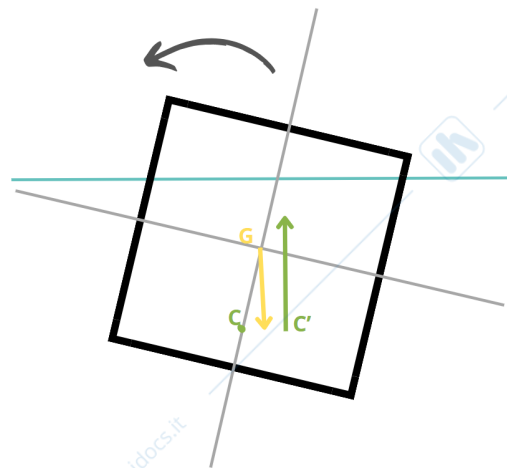
Ad esempio approssimiamo una nave ad un parallelepipedo. Possiamo individuare questi due assi principali. Il volume immerso si dice **volume di Carena**.

Analizziamo le oscillazioni lungo l'asse di rollio

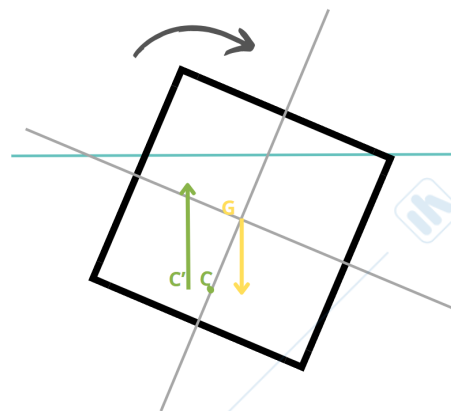


Troviamo il peso dell'oggetto che agisce nel baricentro, e la spinta di Archimede  $\vec{F}_A = V_c \cdot \gamma$  nel punto C

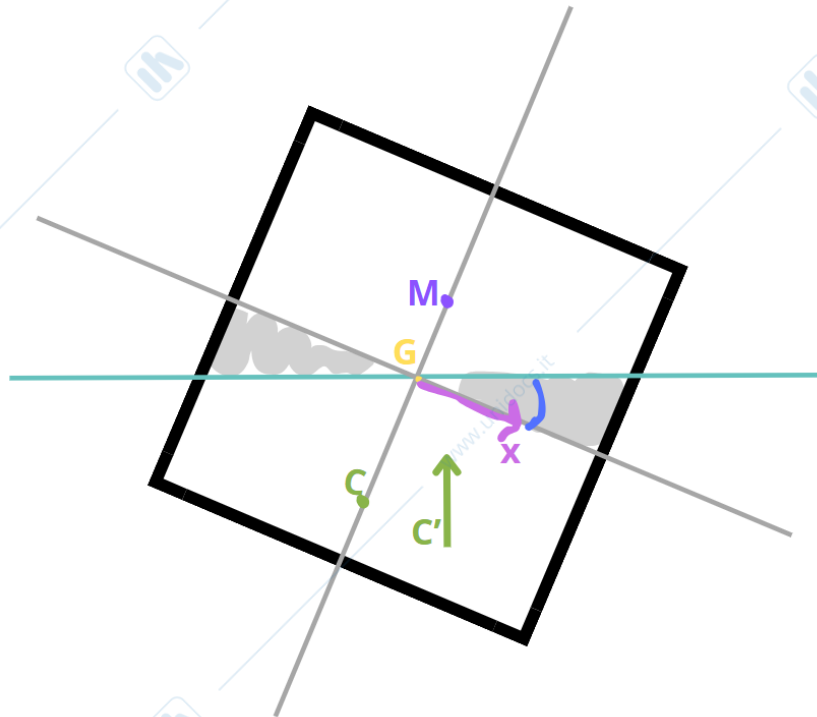
Se un'oscillazione fa ruotare la nave lungo l'asse di rollio cambierà il volume immerso e il punto C, di conseguenza cambierà la spinta di Archimede. Nasce una coppia che fa tornare il posizione di equilibrio la nave.



Oppure la fa rovesciare, in base alla posizione di C' e G



Cosa succede? I due triangoli hanno una variazione della spinta di Archimede, questo genera una coppia e uno spostamento della forza.



Volume dello spicchio  $x d\theta d\Omega \gamma$

Momento rispetto asse di rollio  $(x d\theta d\Omega \cdot \gamma) \cdot x$

Faccio l'integrale su tutta l'area del cuneo per il momento totale

$$M = \int_{\Omega} \gamma x^2 d\theta d\Omega = \gamma d\theta \int_{\Omega} x^2 d\Omega = \gamma d\theta I_r$$

con  $I_r$  momento di inerzia rispetto all'asse di rollio della superficie di galleggiamento

$$M = S_A \cdot \overline{CC'} = \gamma V_C \cdot \overline{CM} d\theta$$

Poniamo uguali le due espressioni

$$\gamma d\theta I_r = \gamma V_C \cdot \overline{CM} d\theta \Rightarrow \overline{CM} = \frac{I_r}{V_C}$$

**M** è la posizione del **metacentro**, per avere la stabilità CM dev'essere il più grande possibile. Ovvero il metacentro deve essere sopra il il baricentro.

Come posso lavorare su M? Se il volume di carena è vincolato posso lavorare sul momento di inerzia, ponendo le masse lontano dall'asse di rollio.

Tanto più CM è grande, tanto più la forza di richiamo è forte → Attenzione, il richiamo non deve essere troppo rapido per migliorare la navigazione dei passeggeri.

Distanza ottimale  $\overline{GM} \approx 60 - 80cm$

HP da mantenere: baricentro fisso! Ad esempio le navi che trasportano fluidi sono tutte piene e si vuole ridurre al minimo la presenza di liquidi non necessari (incendio con estintori a polvere)

Le petroliere "vuote" imbarcano acqua per stabilizzare la nave ed è una fonte di inquinamento organico perché sposta acque cariche di organismi e microorganismi in diverse parti del mondo

NOTA: il mal di mare deriva dal fatto che le onde non disperdono energia fuori dalla zona di propagazione ma c'è una progressiva selezione di lunghezze d'onda → interazione non lineare