



**CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE  
IDROLOGIA  
A.A. 2010 – 2011**

# **ESERCITAZIONI DI IDROLOGIA**

DOCENTE: Prof. \_\_\_\_\_

ESERCITATORE: Ing. \_\_\_\_\_

STUDENTI

---

---

---

## Esercitazione 1

### ANALISI DI SERIE DI DATI

#### SEZIONE 1

Si consideri la serie storica delle portate massime annue misurate sulla Dora Baltea a Tavagnasco. Si effettuino le seguenti analisi:

#### 1) Diagramma cronologico della serie

Il diagramma cronologico di una serie di dati viene costruito diagrammando le portate massime in funzione degli anni in cui sono state misurate. Nel caso in cui in un anno preciso non siano state rilevate, nel grafico si verificherà una discontinuità nella linearità dello stesso.

Dal diagramma sottostante si può notare come gli anni in cui non è avvenuto il rilevamento siano stati quelli tra il 1921 e il 1928, e il 2001. La portata massima in 83 anni si è verificata nel 2000 con un valore di  $3000 \text{ m}^3/\text{s}$ , mentre il valore minimo è stato rilevato nel 1989 con  $232 \text{ m}^3/\text{s}$ .

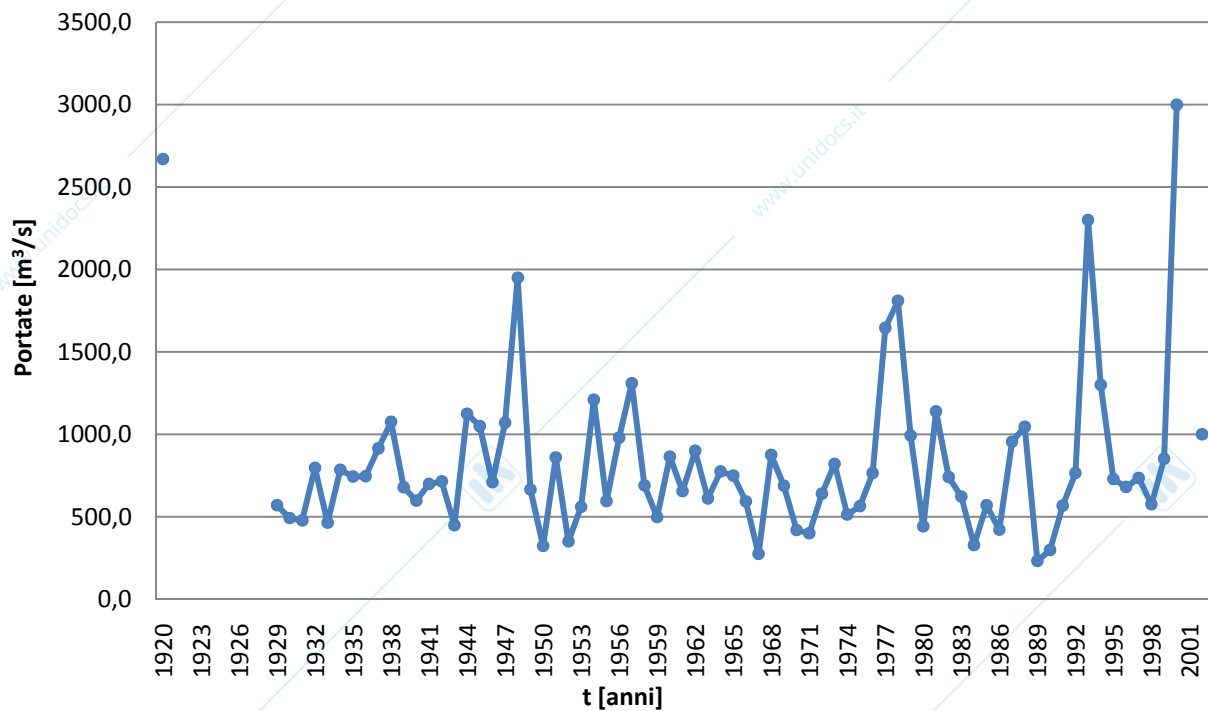


Figura 1.1 Diagramma cronologico delle serie

## 2) Diagramma delle frequenze relative di classe

Per rappresentare il diagramma delle frequenze relative cumulate, è necessario suddividere il campione in un numero di classi  $k$  di ampiezza pari a:

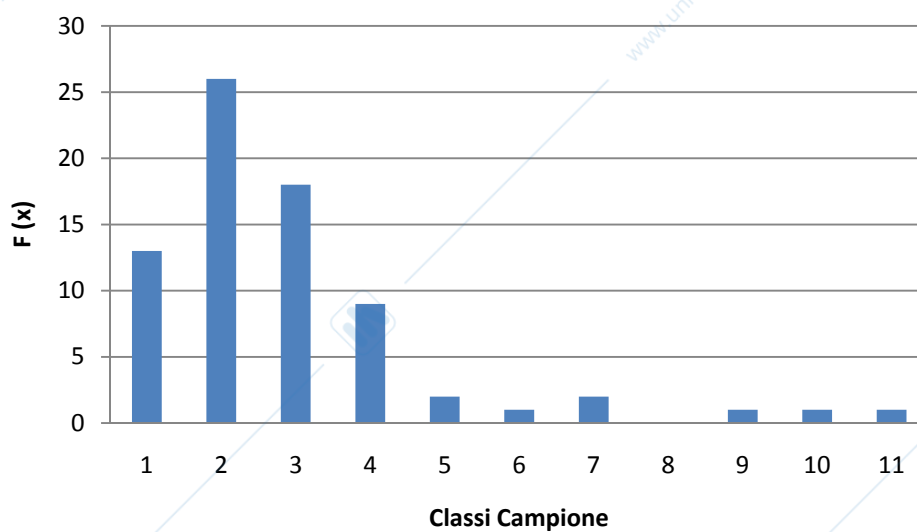
$$\Delta Q_J = \frac{Q_{(n)} - Q_{(1)}}{k} \quad \text{con } k = 2 \cdot n^{0.4}$$

Si ottengono quindi 11 classi di ampiezza pari a 251:

**Tabella 1.1** Classi in cui è stato suddiviso il campione

Classe	intervalli classe		elementi nella classe
1	232,0	483,6	13
2	483,6	735,3	26
3	735,3	986,9	18
4	986,9	1238,5	9
5	1238,5	1490,2	2
6	1490,2	1741,8	1
7	1741,8	1993,5	2
8	1993,5	2245,1	0
9	2245,1	2496,7	1
10	2496,7	2748,4	1
11	2748,4	3000,0	1
			74

Una volta definito il numero di elementi per ogni classe, si può costruire il diagramma:



**Figura 1.2** Diagramma delle frequenze relative di classe

### 3) Diagramma delle frequenze cumulate

Il diagramma delle frequenze cumulate si costruisce come il diagramma delle frequenze di classe, con la differenza che sull'asse delle ordinate saranno presenti i valori di:

$$F_j = \sum_{i=1}^j f_i \quad \text{con } f_i \text{ valori della } i\text{-esima classe.}$$

Il valore di  $F_j$  corrispondente alla classe massima sarà sempre uguale a 1.

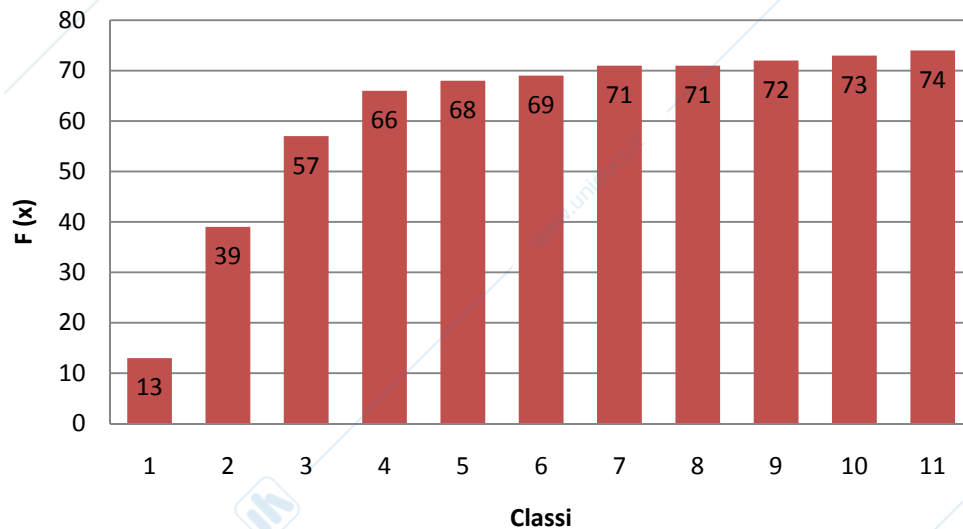


Figura 1.3 Diagramma delle frequenze cumulate

### 4) Calcolo dei valori centrali e dei momenti campionari

Media: rappresenta il valore intorno al quale si addensano i dati.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 834,7432$$

Mediana: rappresenta il valore avente posizione centrale nella serie ordinata.

$$\check{x} = x_{j=\frac{n}{2}} = 722$$

Scarto quadratico medio:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = 496,46$$

**Asimmetria:** rappresenta il grado di asimmetria del grafico che rappresenta la funzione di densità di probabilità di una distribuzione. Un indice di asimmetria molto diffuso è costituito dal rapporto tra il momento del terzo ordine e il cubo dello scarto quadratico medio della distribuzione.

$$\beta = \frac{m_3}{s^3} = 2,321$$

**Appiattimento:** descrive l'acutezza o la piattezza della distribuzione.

$$k = \frac{m_4}{s^4} = 9,2824$$

## SEZIONE 2

Si diagrammino le funzioni di densità di probabilità per le seguenti distribuzioni:

- a) Sovrapporre le curve relative ad una distribuzione normale con media 2 e deviazione standard 1, e ad una distribuzione normale con media 2 e deviazione standard 2:

La distribuzione normale viene anche detta distribuzione di Gauss, e la sua densità di probabilità è definita dalla relazione:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma(x)} e^{-\frac{1}{2} \left[ \frac{x - \mu(x)}{\sigma(x)} \right]^2}$$

Dove  $\mu(x)$  e  $\sigma(x)$  sono, rispettivamente, la media e lo scarto quadratico medio della distribuzione. La funzione di densità di probabilità è rappresentata da una curva simmetrica rispetto alla media, dato che nella formula la differenza  $x - \mu(x)$  compare al quadrato. Quindi la mediana coincide con la media. Inoltre la funzione  $p(x)$  presenta un massimo per  $x = \mu(x)$ ; la distribuzione normale è quindi unimodale e anche la moda coincide con la media.

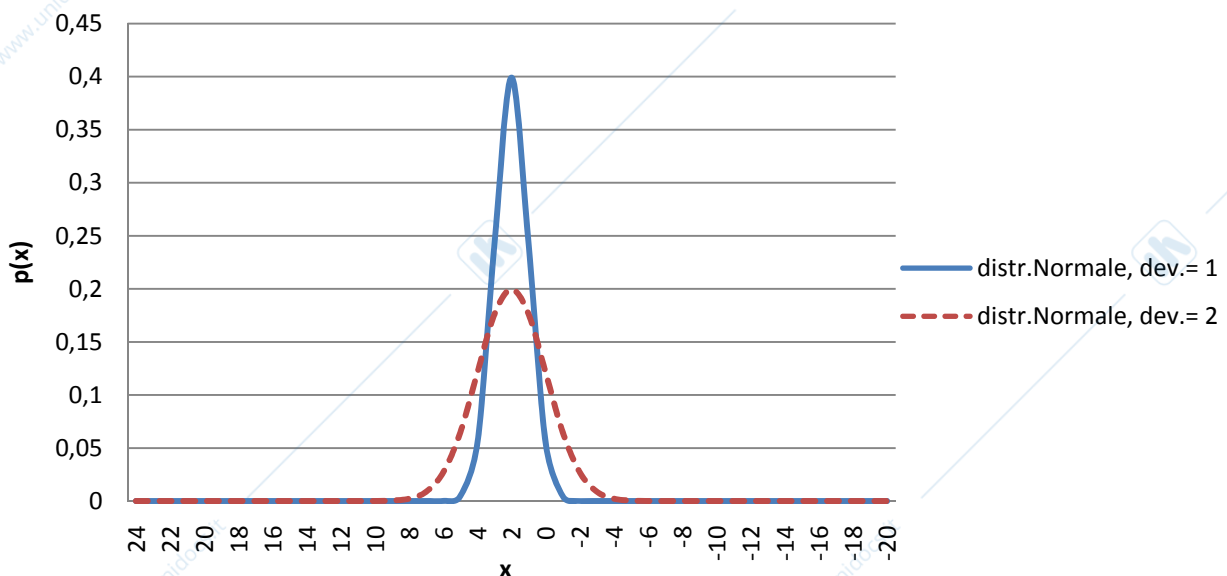


Figura 1.4 Distribuzione normale

- b) Sovrapporre le curve relative ad una distribuzione log-normale con media 2 e deviazione standard 1, e ad una distribuzione log-normale con media 2 e deviazione standard 2:

La distribuzione lognormale è caratterizzata dal fatto che a seguire la legge normale non è la variabile originaria  $x$  ma il suo logaritmo [ $y = \log(x)$ ]. Poiché il logaritmo è una funzione che cresce sempre al crescere dell'argomento, si ricava l'espressione per la densità di probabilità:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma(y)} e^{-\frac{1}{2} \left[ \frac{\log(x) - \mu(y)}{\sigma(y)} \right]^2}$$

La distribuzione delle  $x$  è limitata inferiormente e ha come limite zero. Per questo motivo è illimitata superiormente, non è simmetrica e media, mediana e moda sono diverse tra loro. Queste disuguaglianze sono tanto più marcate quanto più grande è lo scarto quadratico medio. Quindi la distribuzione lognormale è tanto più asimmetrica quanto più è allargata la distribuzione del suo logaritmo.

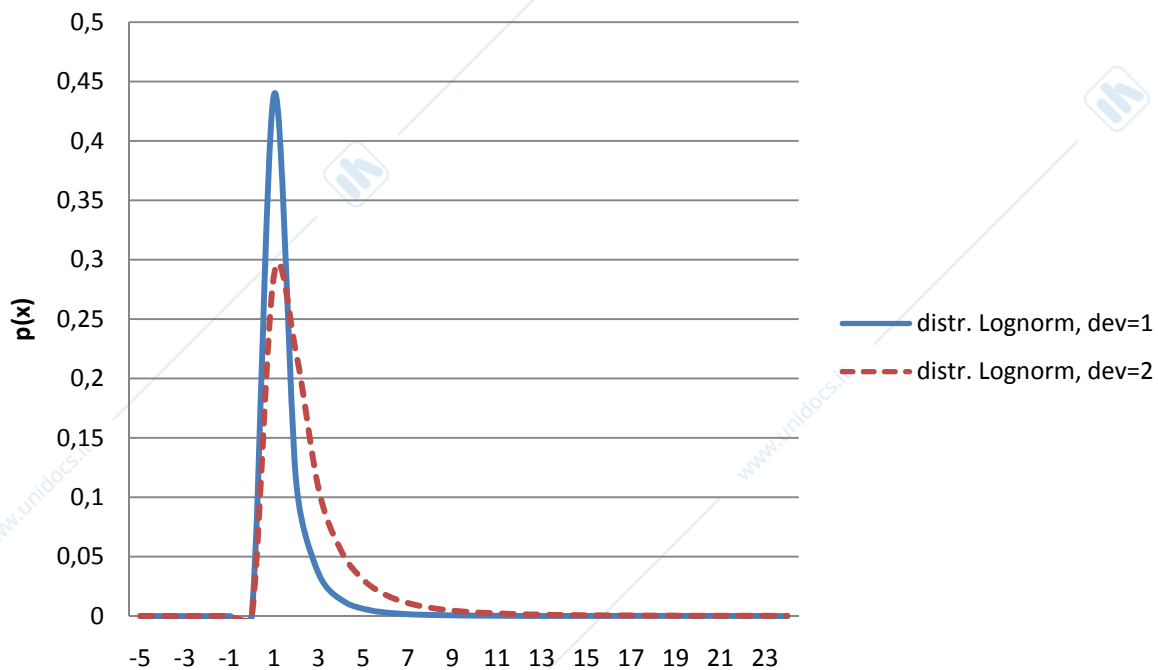


Figura 1.5 Distribuzione Lognormale

- c) Sovrapporre le curve relative ad una distribuzione di Gumbel con media 2 e deviazione standard 1, e ad una distribuzione di Gumbel con media 2 e deviazione standard 2:

La distribuzione di Gumbel si può rappresentare, indipendentemente dalla funzione di probabilità  $P(x)$  della variabile originaria, purché questa sia di tipo esponenziale, e con approssimazione tanto migliore quanto più grande è  $N$  (numero di elementi del campione).

Introducendo una variabile ridotta del tipo  $y = \alpha(x - u)$ , si possono scrivere le espressioni della funzione di probabilità e di densità di probabilità:

$$P(y) = e^{-e^{-y}}$$

$$p(y) = y \cdot e^{-e^{-y}}$$

La media e lo scarto quadratico medio sono forniti dalle relazioni:

$$\mu(x) = \frac{0,5772}{\alpha} + u \quad \sigma(x) = \frac{1,283}{\alpha}$$

Da queste relazioni si ricavano quelle che esprimono i parametri  $\alpha$  e  $u$  in funzione della media  $\mu(x)$  e dello scarto quadratico medio  $\sigma(x)$ :

$$\alpha = \frac{1,283}{\sigma(x)}$$

$$u = \mu(x) - 0,450 \cdot \sigma(x)$$

Il parametro  $\alpha$ , che è inversamente proporzionale allo scarto quadratico medio  $\sigma(x)$ , controlla la forma del grafico che rappresenta la funzione di densità di probabilità; quanto più  $\alpha$  è grande, tanto più addensata è la distribuzione.

Invece il parametro  $u$  controlla la posizione del grafico: aumentare il valore di  $u$  equivale a far scorrere il grafico verso destra senza deformarlo lungo l'asse delle ascisse.

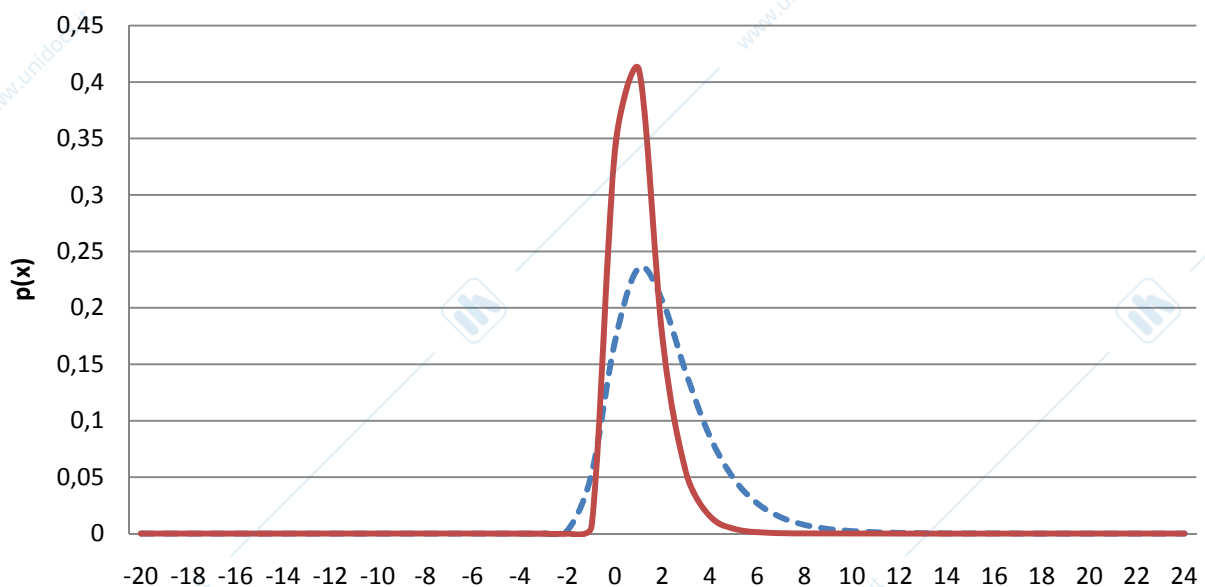


Figura 1.6 Distribuzione di Gumbel

- d) Sovrapporre le curve relative ad una distribuzione normale, una log-normale ed una Gumbel con media 1 e deviazione standard 1:

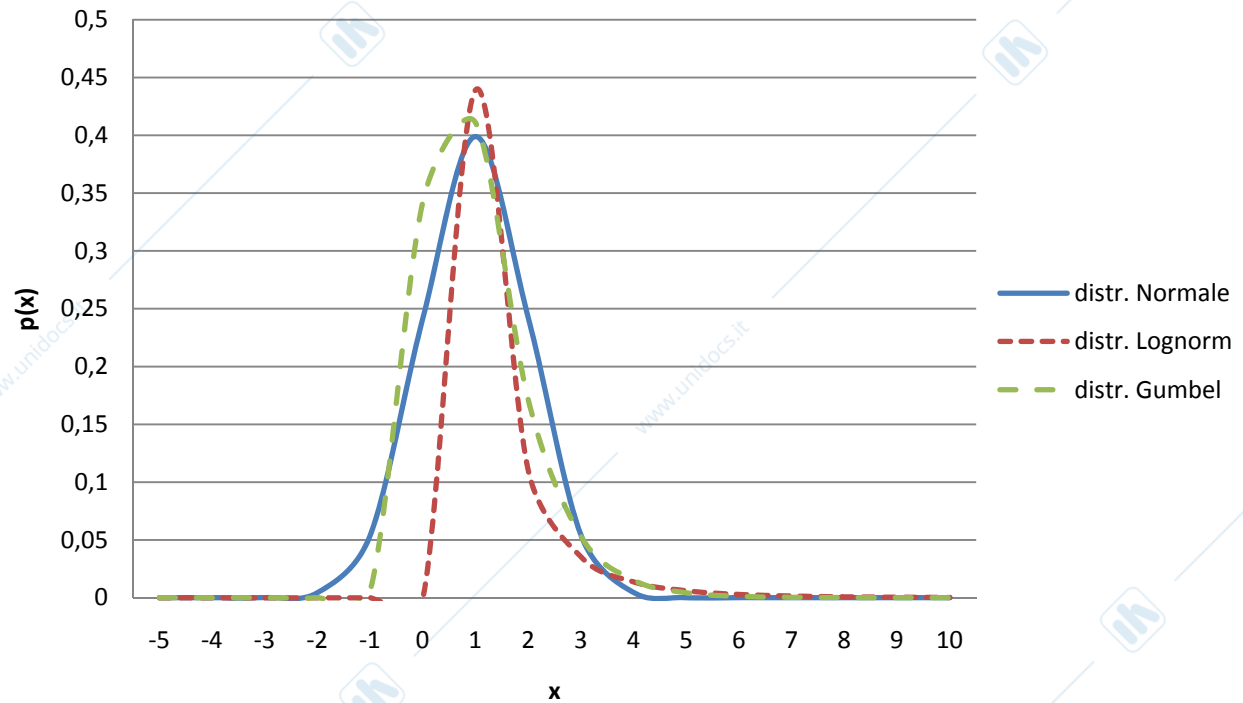


Figura 1.7 Sovrapposizione delle tre distribuzioni e confronto

## Esercitazione 2

### ADATTAMENTO DI UNA SERIE DI MASSIMI ANNUI DELLE PORTATE AL COLMO DI PIENA A DIVERSE DISTRIBUZIONI DI PROBABILITÀ

Scopo della presente esercitazione è quello di determinare il valore della portata di progetto di un fiume a partire da una serie di dati di misura dei massimi annui di portata, attraverso la stima di parametri relativi a diverse distribuzioni di probabilità e le necessarie verifiche di adattamento. I dati di partenza per l'analisi sono presentati in tabella 1.1.

Tabella 1.1 Massimi annui di portata Dora Baltea a Tavagnasco.

Anno	Portata max [m <sup>3</sup> /s]	Anno	Portata max [m <sup>3</sup> /s]	Anno	Portata max [m <sup>3</sup> /s]
1920	2670,0	1950	323,0	1980	442,0
1921	-	1951	860,0	1981	1139,0
1922	-	1952	350,0	1982	741,0
1923	-	1953	560,0	1983	622,0
1924	-	1954	1210,0	1984	328,0
1925	-	1955	595,0	1985	570,0
1926	-	1956	980,0	1986	421,0
1927	-	1957	1310,0	1987	955,0
1928	-	1958	690,0	1988	1046,0
1929	570,0	1959	498,0	1989	232,0
1930	492,0	1960	865,0	1990	298,0
1931	478,0	1961	655,0	1991	657,0
1932	797,0	1962	900,0	1992	765,0
1933	464,0	1963	611,0	1993	2300,0
1934	785,0	1964	775,0	1994	1300,0
1935	744,0	1965	750,0	1995	729,0
1936	746,0	1966	593,0	1996	681,0
1937	915,0	1967	275,0	1997	735,0
1938	1076,0	1968	875,0	1998	576,0
1939	679,0	1969	688,0	1999	852,0
1940	598,0	1970	419,0	2000	3000,0
1941	699,0	1971	400,0	2001	-
1942	715,0	1972	640,0	2002	1000,0
1943	449,0	1973	821,0		
1944	1125,0	1974	514,0		
1945	1050,0	1975	564,0		
1946	710,0	1976	765,0		
1947	1070,0	1977	1646,0		
1948	1950,0	1978	1810,0		
1949	665,0	1979	993,0		

I valori di media e di scarto quadratico medio relativi al campione preso in esame, utili per le successive fasi di rappresentazione in carta probabilistica e di stima dei parametri sono

$$\mu = 834,74 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\sigma = 496,46 \text{ m}^3/\text{s}$$

### 1) Rappresentazione dei dati su carta probabilistica normale, log-normale e di Gumbel

Individuare la legge di distribuzione di probabilità che meglio si adatta ad un dato campione di dati significa individuare, tra le tante leggi teoriche quella il cui andamento si avvicina maggiormente alla frequenza empirica del campione.

Nota la distribuzione empirica e la legge teorica è possibile effettuare un confronto tra le due curve, ancor prima di stimare i parametri della distribuzione, riportandole su uno stesso diagramma. Per rendere più efficace allo scopo questo confronto, invece di utilizzare un diagramma cartesiano normale, vengono utilizzate le cosiddette *carte probabilistiche*. Tali diagrammi sono opportunamente deformati ponendo sull'asse delle ascisse i valori della variabile casuale  $X$  (in questo caso i massimi annui di portata) ordinati in senso crescente mentre sull'asse delle ordinate i valori di probabilità  $P(X \geq x)$  o  $P(X \leq x)$ , il periodo di ritorno o il valore della variabile ridotta  $u$ , definita per la distribuzione normale come:

$$u = \frac{x - \mu(x)}{\sigma(x)} \quad (2.1)$$

a causa della linearità della relazione tra  $x$  ed  $u$  la rappresentazione in carta probabilistica del legame risulta essere una retta.

Se il tipo di distribuzione considerato risulta adatto a rappresentare una certa serie di osservazioni, queste, se rappresentate opportunamente in carta probabilistica, dovranno disporsi approssimativamente intorno ad una retta. Tale operazione è molto utile per escludere eventualmente a priori una data distribuzione prima di effettuarne la stima dei parametri.

Per riportare un punto sulla carta probabilistica, è necessario conoscere di esso il valore  $x$  e la probabilità  $P(X \geq x)$  o  $P(X \leq x)$ . Se i parametri della distribuzione non sono stati ancora determinati, non è possibile calcolare la probabilità attraverso le formule consuete. Nelle carte probabilistiche viene quindi utilizzata un'approssimazione della probabilità di non superamento, detta *plotting position*. L'approssimazione comunemente utilizzata per la definizione della *plotting position* è

$$PP = \frac{m}{N+1} \quad (2.2)$$

dove  $m$  è la posizione del dato nella serie ordinata in senso crescente e  $N$  la numerosità del campione. Dopo aver riportato i valori sulla carta probabilistica, ed avere accertato che si addensano intorno ad una retta, è possibile:

- utilizzare direttamente il diagramma per identificare la retta che meglio regolarizza i valori (ad esempio tramite il metodo dei minimi quadrati);
- procedere in modo analitico alla determinazione dei parametri e quindi riportare la retta risultante sul grafico al fine di valutarne la capacità descrittiva, ed è il metodo che è stato perseguito in questa esercitazione.

La variabile ridotta per la distribuzione normale è stata ricavata mediante la funzione **NORMINV()** di Excel applicata alla *plotting position* mentre per la Gumbel si ha che

$$u = -\ln(-\ln(PP)) \quad (2.3)$$

La carta probabilistica log-normale si ottiene agevolmente diagrammando i logaritmi delle  $x_{(i)}$ . I valori delle *plotting position* e delle  $u$  sono diagrammati nella tabella 2.2.

L'allineamento dei punti verificabile nelle figure 2.1, 2.2 e 2.3 non sembra privilegiare una distribuzione rispetto ad un'altra. Si evidenzia in ogni caso uno scostamento dall'andamento lineare per valori alti di portata: si individuano infatti una componente di base a cui si somma una componente straordinaria dei massimi annuali di portata.

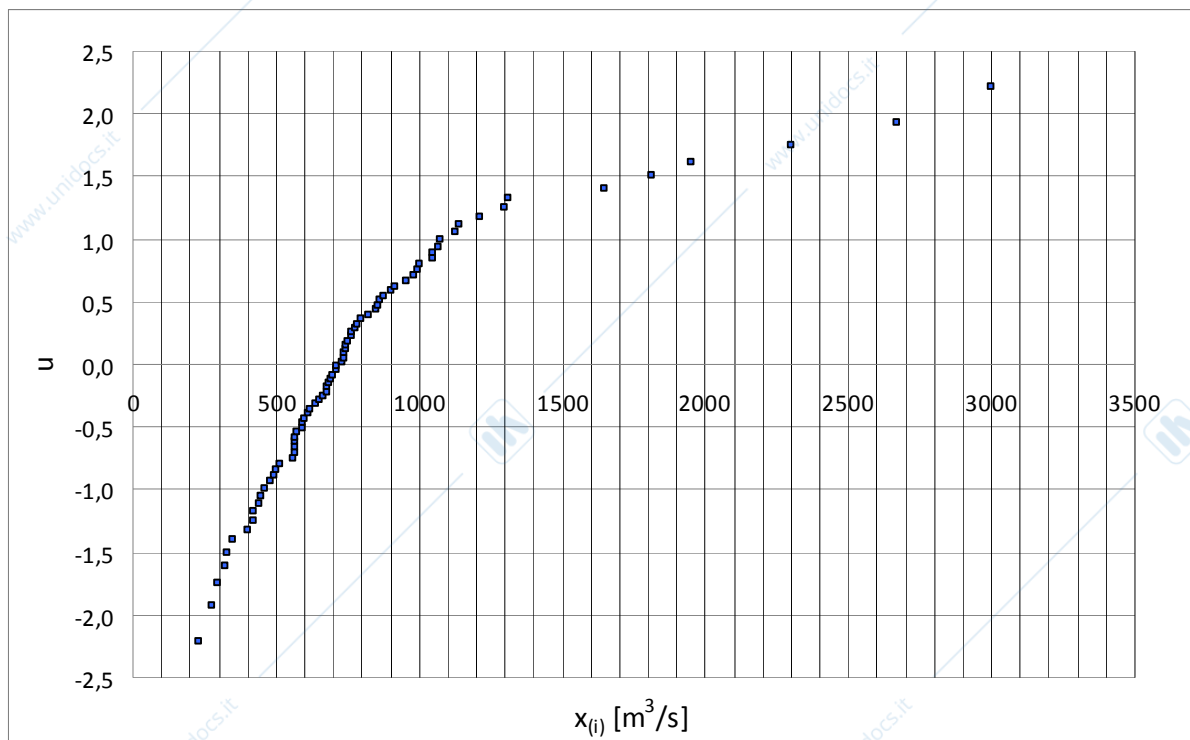


Figura 2.1 Carta probabilistica Normale.

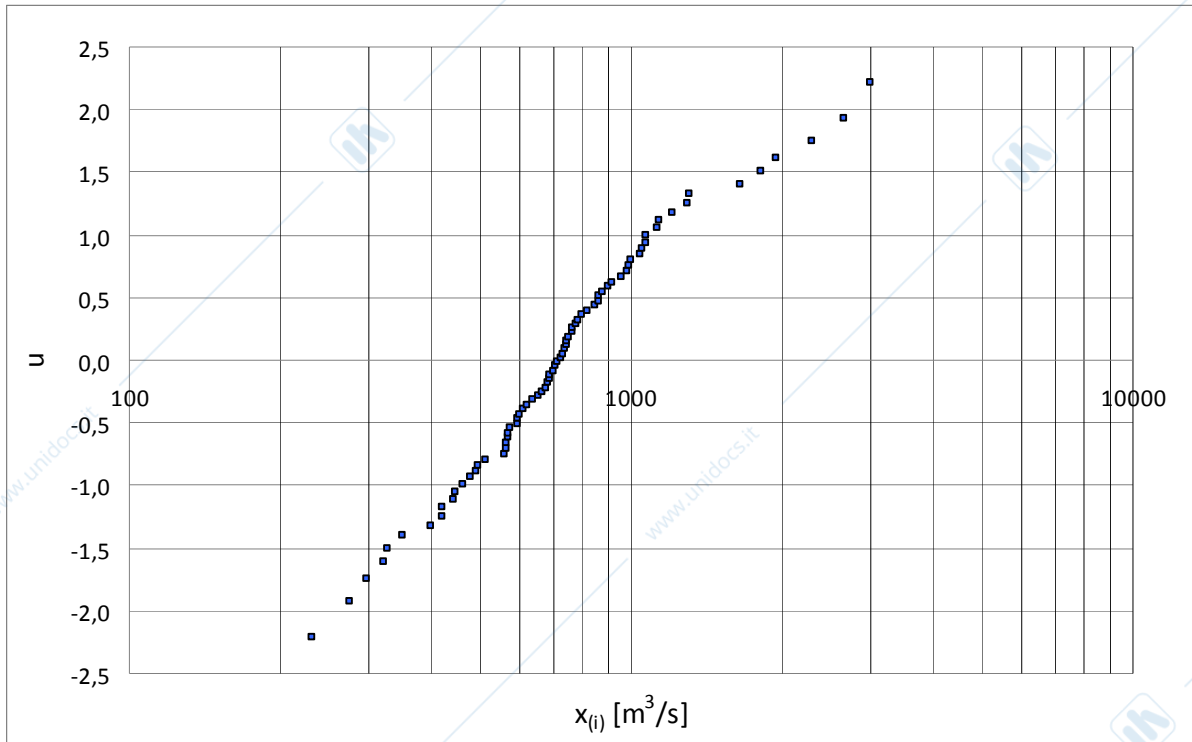


Figura 2.2 Carta probabilistica Log-normale.

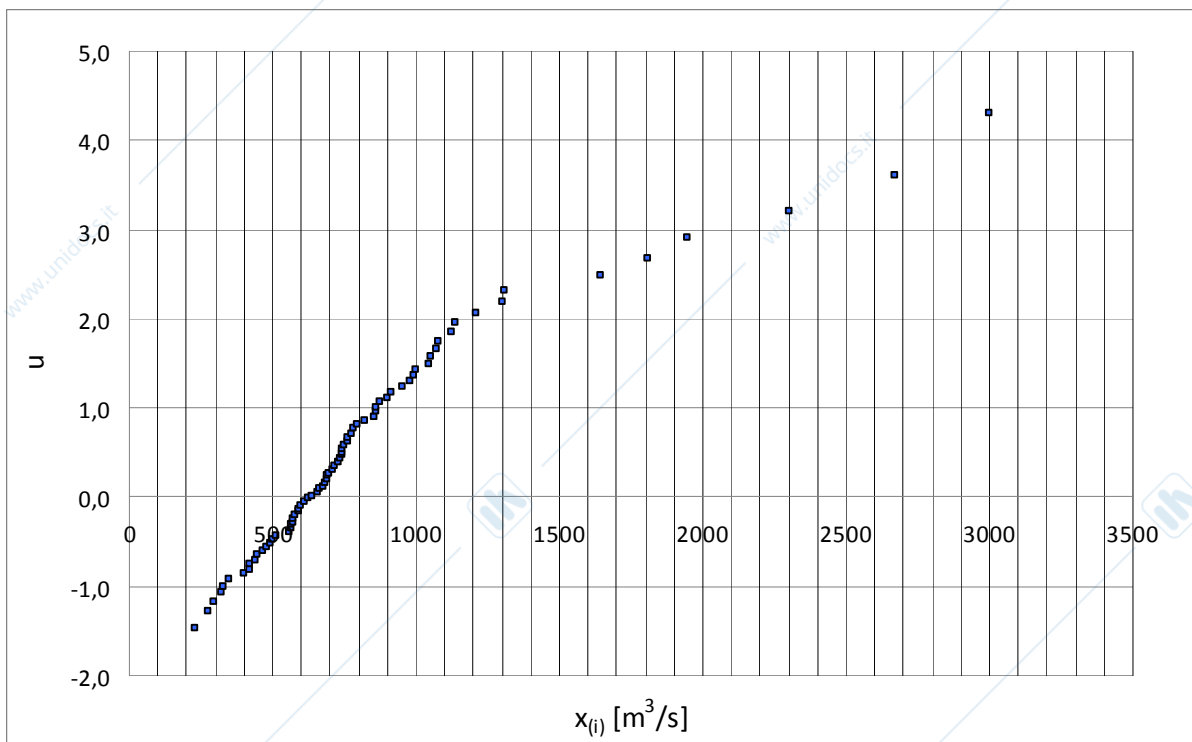


Figura 2.3 Carta probabilistica di Gumbel.

Tabella 2.2 Costruzione carte probabilistiche Normale, Log-normale e di Gumbel.

$x_{(i)}$	m	PP	u (Normale)	u (Gumbel)	$x_{(i)}$	m	PP	u (Normale)	u (Gumbel)
232,0	1	0,01333	-2,21636	-1,46267	750,0	43	0,57333	0,18487	0,58647
275,0	2	0,02667	-1,93221	-1,28767	765,0	44	0,58667	0,21898	0,62867
298,0	3	0,04000	-1,75069	-1,16903	765,0	45	0,60000	0,25335	0,67173
323,0	4	0,05333	-1,61336	-1,07541	775,0	46	0,61333	0,28802	0,71571
328,0	5	0,06667	-1,50109	-0,99623	785,0	47	0,62667	0,32304	0,76070
350,0	6	0,08000	-1,40507	-0,92653	797,0	48	0,64000	0,35846	0,80679
400,0	7	0,09333	-1,32050	-0,86356	821,0	49	0,65333	0,39434	0,85410
419,0	8	0,10667	-1,24445	-0,80560	852,0	50	0,66667	0,43073	0,90272
421,0	9	0,12000	-1,17499	-0,75154	860,0	51	0,68000	0,46770	0,95279
442,0	10	0,13333	-1,11077	-0,70057	865,0	52	0,69333	0,50532	1,00445
449,0	11	0,14667	-1,05084	-0,65211	875,0	53	0,70667	0,54367	1,05787
464,0	12	0,16000	-0,99446	-0,60573	900,0	54	0,72000	0,58284	1,11321
478,0	13	0,17333	-0,94107	-0,56107	915,0	55	0,73333	0,62293	1,17068
492,0	14	0,18667	-0,89025	-0,51786	955,0	56	0,74667	0,66404	1,23053
498,0	15	0,20000	-0,84162	-0,47588	980,0	57	0,76000	0,70630	1,29303
514,0	16	0,21333	-0,79491	-0,43496	993,0	58	0,77333	0,74987	1,35850
560,0	17	0,22667	-0,74987	-0,39493	1000,0	59	0,78667	0,79491	1,42732
564,0	18	0,24000	-0,70630	-0,35566	1046,0	60	0,80000	0,84162	1,49994
567,0	19	0,25333	-0,66404	-0,31703	1050,0	61	0,81333	0,89025	1,57690
570,0	20	0,26667	-0,62293	-0,27896	1070,0	62	0,82667	0,94107	1,65887
570,0	21	0,28000	-0,58284	-0,24135	1076,0	63	0,84000	0,99446	1,74667
576,0	22	0,29333	-0,54367	-0,20412	1125,0	64	0,85333	1,05084	1,84134
593,0	23	0,30667	-0,50532	-0,16720	1139,0	65	0,86667	1,11077	1,94421
595,0	24	0,32000	-0,46770	-0,13053	1210,0	66	0,88000	1,17499	2,05703
598,0	25	0,33333	-0,43073	-0,09405	1300,0	67	0,89333	1,24445	2,18218
611,0	26	0,34667	-0,39434	-0,05769	1310,0	68	0,90667	1,32050	2,32299
622,0	27	0,36000	-0,35846	-0,02142	1646,0	69	0,92000	1,40507	2,48433
640,0	28	0,37333	-0,32304	0,01483	1810,0	70	0,93333	1,50109	2,67375
655,0	29	0,38667	-0,28802	0,05109	1950,0	71	0,94667	1,61336	2,90391
665,0	30	0,40000	-0,25335	0,08742	2300,0	72	0,96000	1,75069	3,19853
679,0	31	0,41333	-0,21898	0,12386	2670,0	73	0,97333	1,93221	3,61086
681,0	32	0,42667	-0,18487	0,16046	3000,0	74	0,98667	2,21636	4,31078
688,0	33	0,44000	-0,15097	0,19726					
690,0	34	0,45333	-0,11724	0,23430					
699,0	35	0,46667	-0,08365	0,27162					
710,0	36	0,48000	-0,05015	0,30929					
715,0	37	0,49333	-0,01671	0,34733					
729,0	38	0,50667	0,01671	0,38581					
735,0	39	0,52000	0,05015	0,42476					
741,0	40	0,53333	0,08365	0,46425					
744,0	41	0,54667	0,11724	0,50432					
746,0	42	0,56000	0,15097	0,54504					

## 2) Stima dei parametri e rappresentazione su carta probabilistica delle distribuzioni a parametri stimati

Una volta verificata l'attendibilità preliminare di una data distribuzione mediante l'osservazione della relativa carta probabilistica è necessario procedere alla stima dei parametri, la quale è stata eseguita sulle distribuzioni a due parametri precedentemente analizzate e sulla GEV sia mediante il metodo dei momenti sia quello degli L-momenti.

### Metodo dei momenti

Il metodo dei momenti consiste nell'attribuire al momento della popolazione rappresentata da una determinata distribuzione il momento relativo al campione estratto dalla stessa popolazione. Di seguito si mostrano le relazioni per le distribuzioni a due parametri

Normale	$\theta_1 = \mu$ $\theta_2 = \sigma$
---------	--------------------------------------

Log-normale	$\theta_1 = \ln \mu - \frac{\theta_2^2}{2}$ $\theta_2 = \sqrt{\ln \left( 1 + \frac{\sigma^2}{\mu^2} \right)}$
-------------	---

Gumbel	$\theta_1 = \mu - 0,5772\theta_2$ $\theta_2 = \frac{\sqrt{6}}{\pi} \sigma$
--------	--

Per quanto riguarda la distribuzione GEV non esiste una soluzione in forma chiusa ma bisogna procedere in maniera iterativa utilizzando le seguenti relazioni

$$\gamma = \text{sign}(\theta_3) \frac{-\Gamma(1+3\theta_3) + 3\Gamma(1+\theta_3)\Gamma(1+2\theta_3) - 2\Gamma^3(1+\theta_3)}{[\Gamma(1+2\theta_3) - \Gamma^2(1+\theta_3)]^{3/2}}$$

$$\theta_2 = \sqrt{\frac{\theta_3^2 \sigma^2}{\Gamma(1+2\theta_3) - \Gamma(1+\theta_3)}}$$

$$\theta_1 = \mu - \frac{\theta_2}{\theta_3} [1 - \Gamma(1+\theta_3)]$$

che implementate in Excel mediante riferimenti circolari e imponendo uno scarto massimo fra i valori di due iterazioni successive forniscono il valori di  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$ .

### Metodo degli L- momenti

Gli L-momenti sono stimatori lineari dei momenti di un campione. In particolare assumono la seguenti espressioni, arrestandosi al momento di terzo ordine

$$L_1 = \mu(x)$$

$$L_2 = 2 \frac{1}{N} B_1 - L_1$$

$$L_3 = 6 \frac{1}{N} B_2 - 6 \frac{1}{N} B_1 + L_1$$

dove  $B_1$  e  $B_2$  sono rispettivamente le quantità

$$B_1 = \sum_{i=1}^N \frac{(i-1)}{(N-1)} x_{(i)}$$

$$B_2 = \sum_{i=1}^N \frac{(i-1)(i-2)}{(N-1)(N-1)} x_{(i)}$$

le  $x_{(i)}$  sono i dati campionari ordinati in senso crescente ed  $i$  è l'indice di progressione nella serie ordinata; nel caso della distribuzione log-normale alle  $x_{(i)}$  vengono sostituiti  $\ln(x_{(i)})$ . A questo punto si eguagliano gli stimatori lineari ai momenti della distribuzione per poter ottenere infine i parametri attraverso le relazioni

Normale

$$\begin{aligned}\theta_1 &= L_1 \\ \theta_2 &= L_2 \sqrt{\pi}\end{aligned}$$

Log-normale

$$\begin{aligned}\theta_1 &= L_1 \\ \theta_2 &= L_2 \sqrt{\pi}\end{aligned}$$

Gumbel

$$\begin{aligned}\theta_1 &= L_1 - 0,5772\theta_2 \\ \theta_2 &= \frac{L_2}{\ln 2}\end{aligned}$$

Anche nel metodo degli L-momenti per la distribuzione GEV non si perviene ad una soluzione in forma chiusa; le relazioni che permettono di ricavare i tre parametri sono

$$L_1 = \theta_1 + \theta_2 \frac{[1 - \Gamma(1 + \theta_3)]}{\theta_3}$$

$$L_2 = \frac{\theta_2(1 - 2^{-\theta_3})\Gamma(1 + \theta_3)}{\theta_3}$$

$$\theta_3 \approx 7.8590c + 2.9554c^2$$

$$c = \frac{2}{3 + \frac{L_3}{L_2}} - \frac{\ln 2}{\ln 3}$$

$$\theta_2 = \frac{L_2 \theta_3}{(1 - 2^{-\theta_3})\Gamma(1 + \theta_3)}$$

**Tabella 2.3** stimatori lineari e parametri stimati per le quattro distribuzioni con il metodo L-momenti.

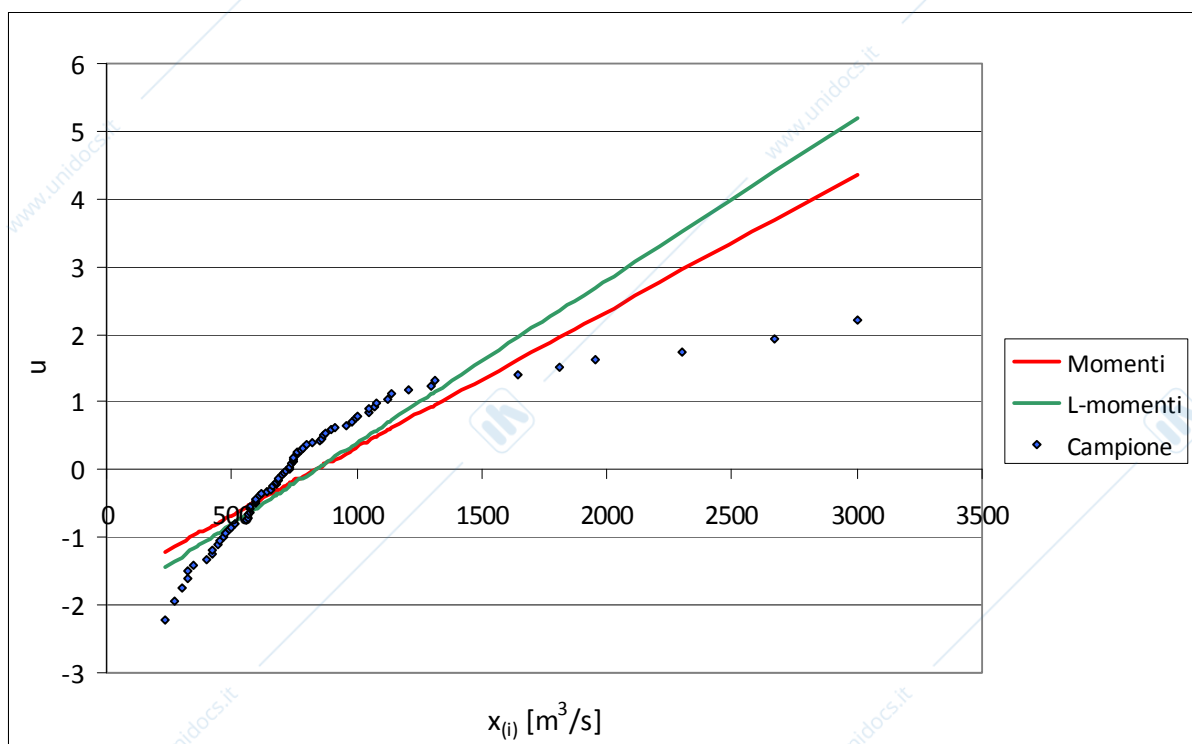
<b>Normale</b>	L <sub>1</sub>	834,74	θ <sub>1</sub>	834,74
	L <sub>2</sub>	234,94	θ <sub>2</sub>	416,42
<b>Log-normale</b>	L <sub>1</sub>	6,60	θ <sub>1</sub>	6,60
	L <sub>2</sub>	0,27	θ <sub>2</sub>	0,48
<b>Gumbel</b>	L <sub>1</sub>	834,74	θ <sub>1</sub>	639,10
	L <sub>2</sub>	234,94	θ <sub>2</sub>	338,95
<b>GEV</b>	L <sub>1</sub>	834,74	θ <sub>1</sub>	604,37
	L <sub>2</sub>	234,94	θ <sub>2</sub>	246,35
	L <sub>3</sub>	83,24	θ <sub>3</sub>	-0,269
	c	-0,035		

I risultati finali del processo di stima dei parametri sono presentati nella tabella 2.4 per un confronto tra i valori ottenuti secondo i due metodi differenti.

**Tabella 2.4** Tabella riassuntiva parametri stimati secondo i due metodi per le quattro distribuzioni.

		<b>Momenti</b>	<b>L-momenti</b>
<b>Normale</b>	$\theta_1$	834,74	834,74
	$\theta_2$	496,46	416,42
<b>Log-normale</b>	$\theta_1$	6,58	6,60
	$\theta_2$	0,55	0,48
<b>Gumbel</b>	$\theta_1$	611,31	639,10
	$\theta_2$	387,09	338,95
<b>GEV</b>	$\theta_1$	606,94	604,37
	$\theta_2$	311,81	246,35
	$\theta_3$	-0,135	-0,269

Le rette relative ai parametri stimati per le distribuzioni a due parametri sono state poi diagrammate su uno stesso grafico insieme ai dati campionari in modo da avere un confronto grafico tra andamento della distribuzione teorica e i valori che si sono effettivamente registrati (figure 2.4, 2.5, 2.6). Da un primo confronto qualitativo si può notare come la distribuzione normale e di Gumbel non riescano ad adattarsi efficacemente alla serie di dati campionari di massimi annui: per questo motivo ci si può attendere che tali distribuzioni difficilmente supereranno entrambi i test statistici di adattamento a cui verranno sottoposte, se non nessuno dei due.

**Figura 2.4** Confronto rette a parametri stimati su carta probabilistica Normale.

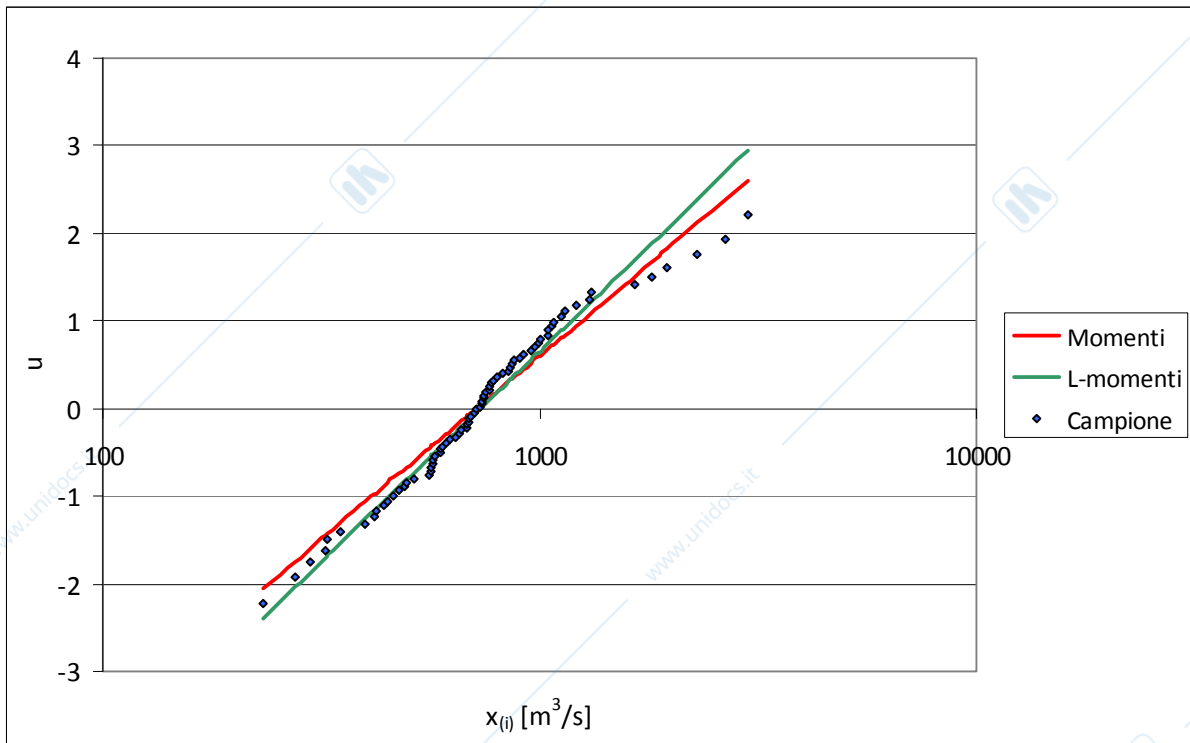


Figura 2.5 Confronto rette a parametri stimati su carta probabilistica Log-normale.

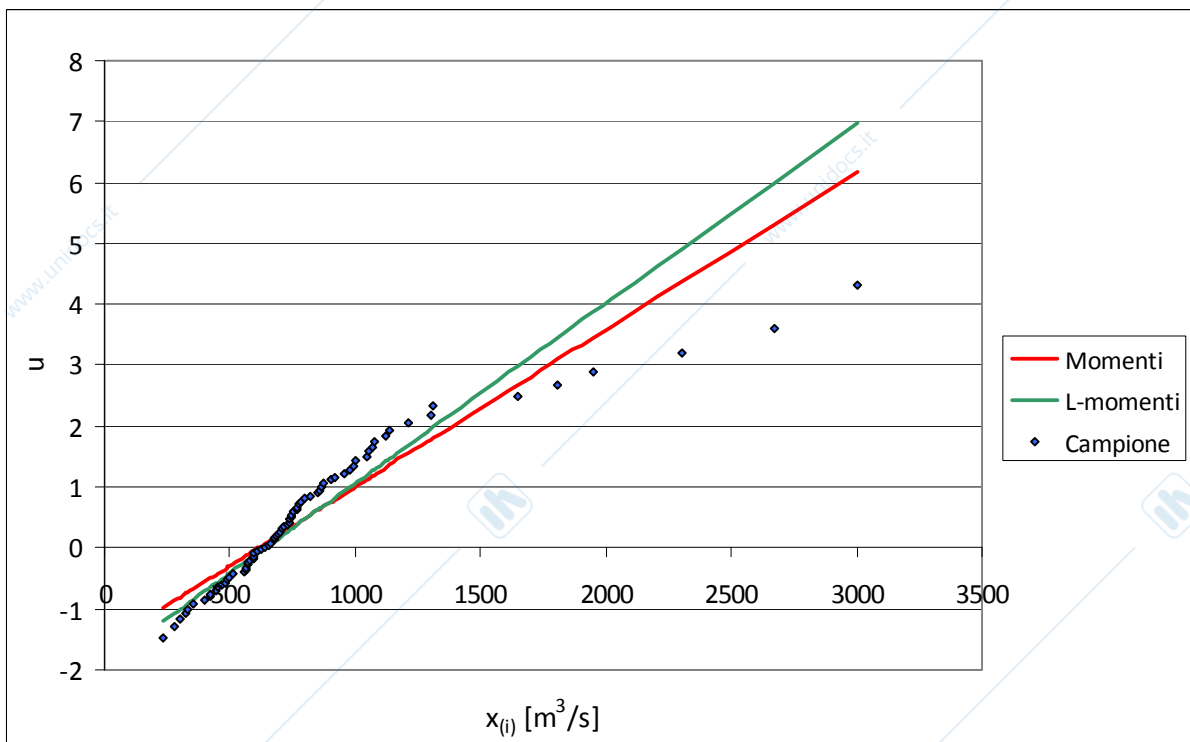


Figura 2.6 Confronto rette a parametri stimati su carta probabilistica di Gumbel.

### 3) Test di adattamento delle distribuzioni

#### Test di Pearson o del $\chi^2$

L'ipotesi  $H_0$  di partenza è ovviamente: "La distribuzione xxxxxx si adatta efficacemente al campione di dati". Il test di Pearson parte dalla suddivisione del campione in  $K=2N^{0,4}$  classi equiprobabili mutualmente escludenti. Ogni intervallo sarà caratterizzato da due valori estremi  $x_{inf}$  e  $x_{sup}$  ricavabili dall'inversa della distribuzione di probabilità considerata. Si calcola successivamente la quantità

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$$

con

- $n_i$  numero di dati campionari ricadenti nella classe i-esima;
- $p_i = 1/K$  probabilità di cadere nella classe i-esima.

Si comprende come il termine al numeratore  $n_i - np_i$  sia indice dell'affinamento della distribuzione considerata in quanto è lo scarto tra i valori realmente ricadenti nella classe i-esima e quelli attesi avendo considerato la determinata distribuzione di probabilità.

Perché l'ipotesi  $H_0$  sia accettabile deve essere  $\chi^2 < \chi^2(1-\alpha; k-s-1)$ , valore limite tabulato in funzione del livello di significatività  $\alpha$ , del numero di classi  $k=2n^{0,4}$  e del numero di parametri  $s$  della relativa distribuzione sottoposta a test; in particolare  $k-s-1$  è il numero di gradi di libertà della distribuzione del chi-quadro. In caso contrario, se per il livello di significatività fissato risulta  $\chi^2 > \chi^2(1-\alpha; k-s-1)$  l'ipotesi va rigettata. Il valore di  $\chi^2$  limite è stato ricavato caso per caso mediante la funzione Excel **CHIINV(probability; deg\_freedom)**. Nella tabella 2.5 sono riportati i risultati per le otto distribuzioni sottoposte a test.

**Tabella 2.5** Risultati della sottoposizione ai test di Pearson.

Distribuzione	$\chi^2$	$\chi^2_{lim}$	Accettabilità Pearson
Normale - momenti	37.189	15.507	NO
Lognormale - momenti	10.730	15.507	SI'
Gumbel - momenti	18.162	15.507	NO
GEV - momenti	10.432	14.067	SI'
Normale - L momenti	26.189	15.507	NO
Lognormale - L momenti	8.946	15.507	SI'
Gumbel - L momenti	10.730	15.507	SI'
GEV - L momenti	7.162	14.067	SI'

Test di Anderson-Darling

Il test di adattamento di Anderson-Darling è basato sul confronto tra la distribuzione di probabilità corrispondente all' ipotesi  $H_0$  e la funzione di frequenza cumulata. In particolare questo tipo di test valuta lo scostamento medio quadratico tra la funzione di frequenza cumulata e la distribuzione ipotizzata valida attraverso una funzione di peso che porta, rispetto al test presentato precedentemente, più sensibilità sulla discrepanza nelle code delle due distribuzioni. La funzione di peso sopra menzionata è definita dalla relazione

$$A^2 = \int_{allx} \frac{[F_n(x) - P(x)]^2}{P(x) \cdot [1 - P(x)]} p(x) dx$$

oppure, in alternativa, per un calcolo più automatico

$$A^2 = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \{ (2i-1) \ln[P(x_{(i)})] + (2n+1-i) \ln[1 - P(x_{(i)})] \}$$

Nella realtà una volta stimato il valore di  $A^2$  non si opera una valutazione direttamente su di esso ma la variabile viene trasformata in un'altra variabile  $\omega$  definita come:

$$\omega = 0.0403 + 0.116 \cdot \left( \frac{A^2 - \xi_p}{\beta_p} \right)^{\frac{\eta_p}{0.851}} \quad \text{se} \quad 1.2\xi_p > A^2$$

$$\omega = \left[ 0.0403 + 0.116 \cdot \left( \frac{0.2\xi_p}{\beta_p} \right)^{\frac{\eta_p}{0.851}} \right] \frac{A^2 - 0.2\xi_p}{\xi_p} \quad \text{se} \quad 1.2\xi_p > A^2$$

con  $\xi_p$ ,  $\beta_p$ ,  $\eta_p$  coefficienti diversi per ogni distribuzione e ricavati come da tabella ...

Table 3. Coefficients to Be Set in Equation (11) for the Anderson-Darling Statistic, Asymptotic Case<sup>a</sup>

Distribution <sup>b</sup>	$\xi_p$	$\beta_p$	$\eta_p$
EV1 and EV2	0.169	0.229	1.141
NORM and LN	0.167	0.229	1.147
GEV <sup>c</sup>	$0.147 (1 + 0.13 \hat{\theta}_3 + 0.21 \hat{\theta}_3^2 + 0.09 \hat{\theta}_3^3)$	$0.189 (1 + 0.20 \hat{\theta}_3 + 0.37 \hat{\theta}_3^2 + 0.17 \hat{\theta}_3^3)$	$1.186 (1 - 0.04 \hat{\theta}_3 - 0.04 \hat{\theta}_3^2 - 0.01 \hat{\theta}_3^3)$
GAM and LP3 <sup>d</sup>	$0.145 (1 + 0.17 \hat{\theta}_3^{-1} + 0.33 \hat{\theta}_3^{-2})$	$0.186 (1 + 0.34 \hat{\theta}_3^{-1} + 0.30 \hat{\theta}_3^{-2})$	$1.194 (1 - 0.04 \hat{\theta}_3^{-1} - 0.12 \hat{\theta}_3^{-2})$

<sup>a</sup>Here  $\hat{\theta}_3$  is an asymptotic efficient estimator (usually maximum likelihood) of the shape parameter of the distribution.

<sup>b</sup>For tests of the EV2, LN, and LP3 distributions the data must be preliminarily log transformed.

<sup>c</sup>For the GEV distribution, if  $\hat{\theta}_3 > 0.5$ ,  $\hat{\theta}_3 = 0.5$  must be set in the regressions.

<sup>d</sup>For the GAM and LP3 distributions, if  $\hat{\theta}_3 < 2$ ,  $\hat{\theta}_3 = 2$  must be set in the regressions.

Una volta effettuata la trasformazione va verificato che il valore di  $\omega$  si inferiori ad un  $\omega_{LIM}$  che, per il livello di significatività richiesto del 5%, è pari in questo caso a 0.461.

Tabella 2.6 Risultati della sottoposizione al test di Pearson.

Distribuzione	$A^2$	$\omega$	Accettabilità A-D
Normale - momenti	4.825	6.765	NO
Lognormale - momenti	1.108	0.817	NO
Gumbel - momenti	2.206	2.213	NO
GEV - momenti	0.893	0,861	NO
Normale - L momenti	4.435	6.016	NO
Lognormale - L momenti	0.632	0.340	SI'
Gumbel - L momenti	1.411	1.160	NO
GEV - L momenti	0.534	0.376	SI'

Le uniche distribuzioni a superare il test di Anderson-Darling, peraltro molto più restrittivo rispetto a quello di Pearson, sono la lognormale e la GEV stimate con il metodo degli L-momenti.

#### 4) Stima della portata di progetto

Per la stima della portata di progetto si prendono in considerazione tutte le distribuzioni che hanno passato almeno uno dei due test statistici a cui sono state sottoposte, il che significa, vista la restrittività del test di Anderson, tutte le distribuzioni che hanno passato il test di Pearson; per riassumere quindi: Lognormale momenti ed L-momenti, Gumbel L-Momenti, GEV momenti ed L-momenti. In questo modo oltre ad evitare errori di tipo I dove l'ipotesi  $H_0$  viene accettata anche se falsa si vuole escludere errori di tipo II per cui un'ipotesi pur essendo vera viene rigettata.

La valutazione di detta portata è richiesta per tre periodi di ritorno relativi a 10, 50, e 100 anni a cui corrispondono rispettivamente delle probabilità di non superamento pari a 0.9, 0.98, 0.99. I valori vengono ricavati mediante la funzione inversa delle corrispondenti distribuzioni cumulate in cui viene imposto il periodo di ritorno considerato in fase di progetto; i risultati sono riassunti nella tabella 2.7.

Tabella 2.7 Portate stimate per le varie distribuzioni accettate dopo la sottoposizione ai test.

T [y]	Portate stimate [ $m^3/s$ ]				
	Lognormale momenti	Lognormale L-momenti	Gumbel L-momenti	GEV momenti	GEV L-momenti
10	1452	1354	1402	1427	1366
50	2221	1961	1962	2210	2305
100	2581	2235	2198	2597	2845

La scelta del valore di progetto relativo ad un determinato periodo di ritorno può cadere sul valore massimo estrapolato dalle varie distribuzioni oppure sulla media di essi, scelta che implica attente analisi di carattere tecnico ed economico nella realizzazione dell'opera per cui l'analisi della portata di progetto è stata effettuata. Come ci si poteva facilmente

attendere per periodi di ritorno più elevati aumenta lo scarto tra i valori massimi ottenuti e la media tra le varie distribuzioni.

**Tabella 2.8** Portate di progetto stimate in relazione al periodo di ritorno considerato.

<b>T [y]</b>	<b>P<sub>Pmax</sub> [m<sup>3</sup>/s]</b>	<b>P<sub>Pav</sub> [m<sup>3</sup>/s]</b>
10	1452	1400
50	2305	2132
100	2845	2491

## Esercitazione 3

### METODO DELLA PRECIPITAZIONE INDICE

1. Calcolo della media e dello scarto dei massimi annui dell'altezza di pioggia in  $d$  ore, con  $d = 1, 3, 6, 12, 24$  ore, registrati dal pluviografo di Torino:

Media:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Scarto:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Secondo le formule descritte, è possibile calcolare media e scarto dei massimi annui dell'altezza di pioggia per ogni intervallo orario, come si può vedere in tabella.

**Tabella 3.1** Calcolo di media e scarto

	<b>1h</b>	<b>3h</b>	<b>6h</b>	<b>12h</b>	<b>24h</b>
<b>Media [mm]</b>	30,66	37,64	43,77	53,92	68,04
<b>Scarto</b>	12,01	12,74	14,13	18,31	23,68

2. Considerando tutte le durate separate l'una dall'altra, e applicando ad ognuna un metodo di inferenza statistica, si può calcolare l'altezza di progetto relativa all'altezza considerata. Usando il modello di regressione:

$$h_d = a d^n$$

con  $d =$  durata (ore)

$h_d =$  valore medio del massimo annuo della precipitazione in  $d$  ore

Si può stimare  $a$  ed  $n$  tramite regressione lineare sui logaritmi.

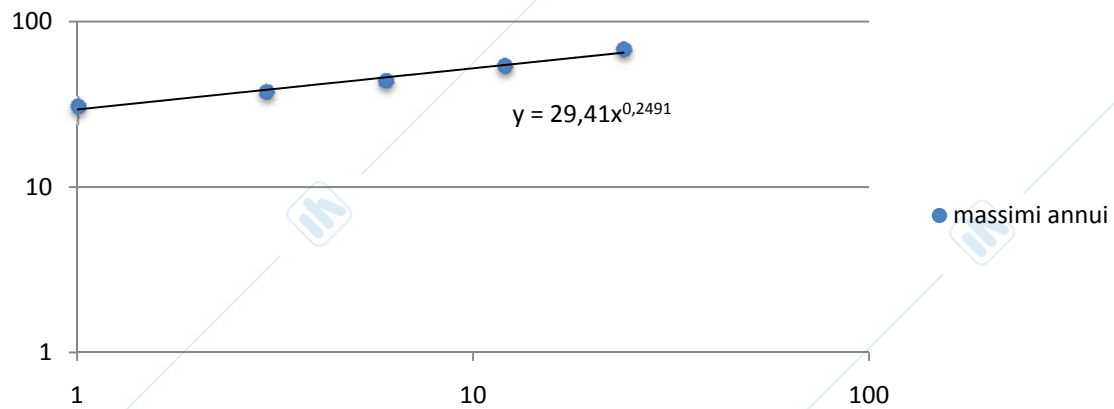


Figura 3.1 Diagramma dei massimi annui

La curva che si ottiene rappresenta la variabilità dell'altezza di precipitazione in funzione della durata. I coefficienti  $a$  ed  $n$  rappresentano dei coefficienti empirici che dipendono dal tempo di ritorno.

Tabella 3.2 riepilogo dei valori caratterizzanti il diagramma dei massimi annui

intercetta	29,41	$a$
coefficiente angolare	0,2491	$n$

3. Stimare, tramite il modello probabilistico di Gumbel, il fattore di crescita della precipitazione media ( $K_T$ ) in funzione del periodo di ritorno.

Il fattore di crescita  $K_T$  può essere calcolato secondo la formula:

$$K_T = \left[ 1 - CV_{hd} \left( \gamma_E + \frac{\sqrt{6}}{\pi} + \frac{\sqrt{6}}{\pi} \ln \left[ -\ln \left( 1 - \frac{1}{T} \right) \right] \right) \right]$$

Il coefficiente  $CV_{hd}$  rappresenta il coefficiente di variazione, che non dipende marcatamente da  $d$ , e può essere ottenuto mediante la formula:

$$CV_{hd} = \frac{S_{hd}}{h_d}$$

Utilizzando le formule sopra descritte si può quindi calcolare il valore di  $K_T$  al variare del periodo di ritorno, che in questo caso varia tra 5, 10 e 50 anni.

Tabella 3.3 calcolo di  $K_T$  al variare del periodo di ritorno

	$K_T$	1h	3h	6h	12h	24h
<b>5</b>	1,250	38,345	47,067	54,729	67,420	85,079
<b>10</b>	1,454	44,592	54,734	63,645	78,403	98,938
<b>50</b>	1,902	58,339	71,608	83,266	102,574	129,440

4. Diagrammare sul piano con coordinate  $(h, d)$  le leggi di probabilità pluviometrica, corrispondenti ad un periodo di ritorno pari a  $T = 5, 10$  e  $50$  anni.

Il grafico è stato costruito calcolando  $h_{d,T} = \bar{h}_d \cdot k_T$  dove  $k_T$  è dato dalla formula precedente.

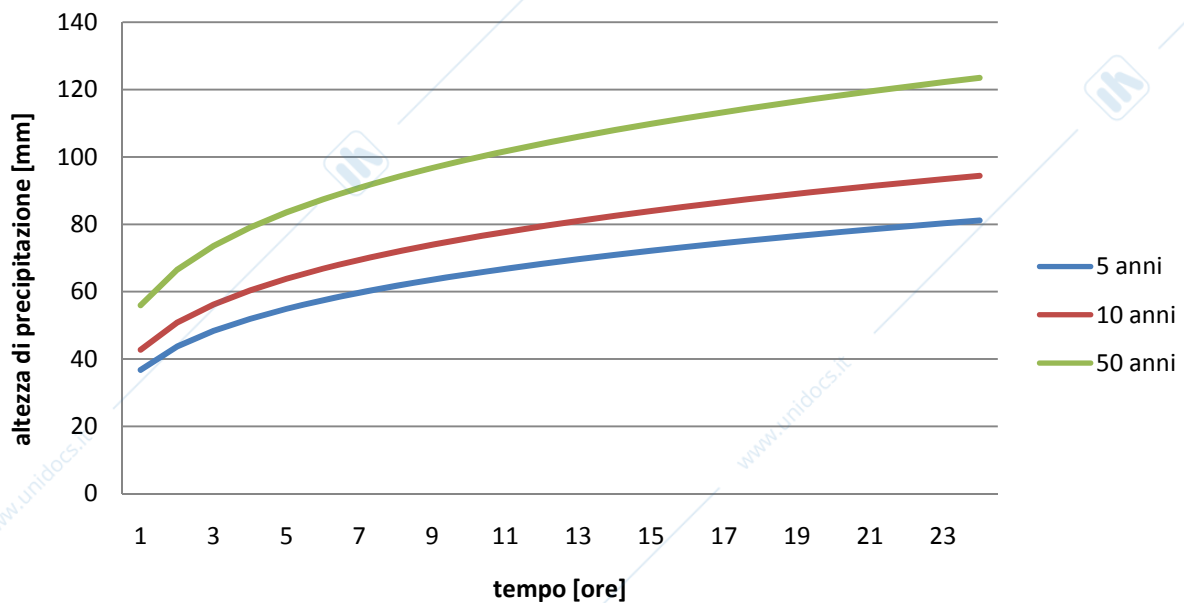


Figura 3.2 Probabilità pluviometrica

Per realizzare un grafico più preciso, è stato necessario eseguire il calcolo di  $h_{d,T}$  non solo per i tempi pari a 1h, 3h, 6h, 12h e 24h, ma per intervalli di un'ora da 1 a 24 ore.

**CONFRONTO CON IL METODO "CLASSICO", PER LA SOLA DURATA  $d = 3$  ORE**

Per la stima dei parametri della distribuzione di Gumbel relativa ai massimi annui di precipitazione (durata 3 ore) con il metodo dei momenti, bisogna calcolare media e scarto della popolazione a disposizione.

Secondo le formule precedentemente utilizzate, si è ottenuto un valore di media e di scarto come da tabella:

**Tabella 3.4** Calcolo di media e scarto

Media	Scarto
37,63922	12,7397

Una volta trovati questi due valori, si procede con il calcolo dei parametri propri della distribuzione di Gumbel secondo le formule:

$$\vartheta_1 = x - 0.5772 \frac{\sqrt{6}}{\pi} \cdot \sqrt{\sigma^2} = 31,91$$

$$\vartheta_2 = \frac{\sqrt{6}}{\pi} \sqrt{\sigma^2} = 9,93$$

Con i parametri  $\vartheta_1$  e  $\vartheta_2$  si possono calcolare le altezze di precipitazione medie in 5, 10, 50 anni, con la formula che si ricava invertendo l'equazione della distribuzione di Gumbel:

$$x_T = \vartheta_1 - \vartheta_2 \cdot \log \left( \log \left( 1 - \frac{1}{T} \right) \right)$$

I valori ottenuti facendo questa operazione si possono leggere in tabella:

**Tabella 3.5** Calcolo di  $h_{d,t}$  al variare del periodo di ritorno

	$h_{d,t}$
<b>5</b>	46,804889
<b>10</b>	54,258963
<b>50</b>	70,664196

Se si fa un confronto con i valori ottenuti con il metodo della precipitazione indice, si può osservare che in questo caso i valori sono più bassi rispetto al metodo utilizzato precedentemente.

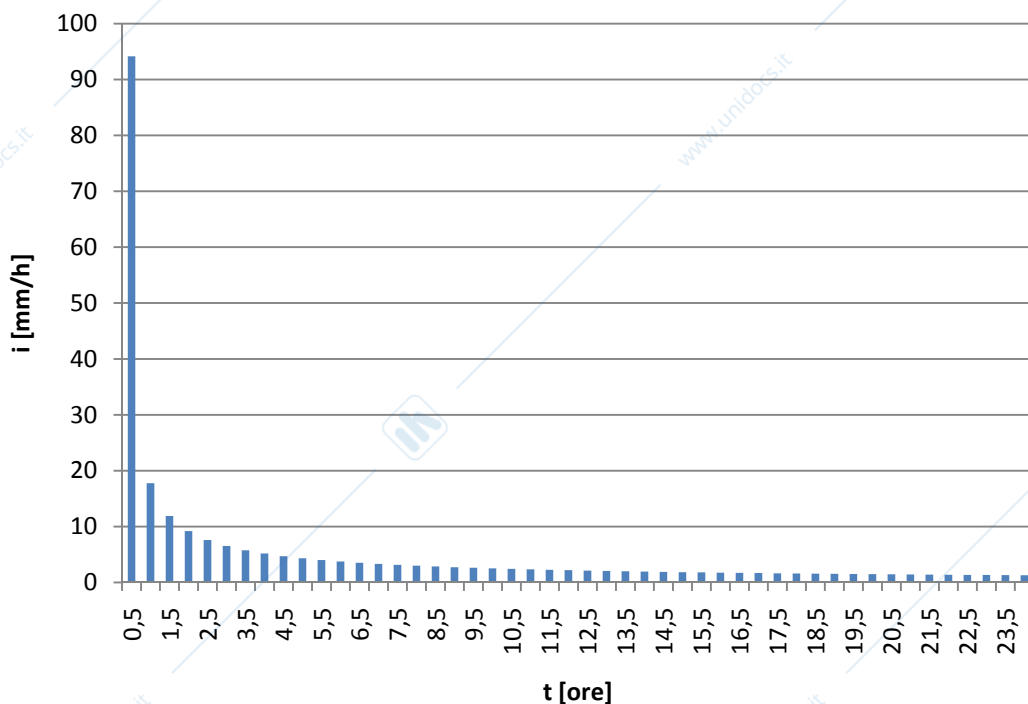
**Tabella 3.6** Riepilogo dei calcoli attraverso il metodo della precipitazione indice

	$h_{d,t}$	Metodo precipitazione indice	$\Delta$
<b>5</b>	46,80488944	48,35275197	1,547863
<b>10</b>	54,25896347	56,22939005	1,970427
<b>50</b>	70,66419595	73,56461883	2,900423

### DETERMINAZIONE DELLO IETOGRAMMA DI PROGETTO

Con riferimento alla curva di probabilità pluviometrica (CPP), determinata con il metodo della precipitazione indice, per  $T=50$  anni, si determini lo ietogramma di progetto "Chicago" con picco centrale utilizzando un intervallo di campionamento di 30 minuti ed un tempo base di 24 ore.

Lo ietogramma di progetto del tipo Chicago si ottiene calcolando per prima cosa la curva di probabilità pluviometrica in funzione del tempo. Lo ietogramma deve essere consistente con la CCP in ogni punto e deve essere caratterizzato da un intervallo minimo che sarà la base della costruzione del grafico.

**Figura 3.3** Ietogramma Chicago

Lo ietogramma con picco al centro si ottiene mettendo il valore più alto al centro, e poi distribuendo i valori decrescenti rispettivamente a sinistra e a destra.

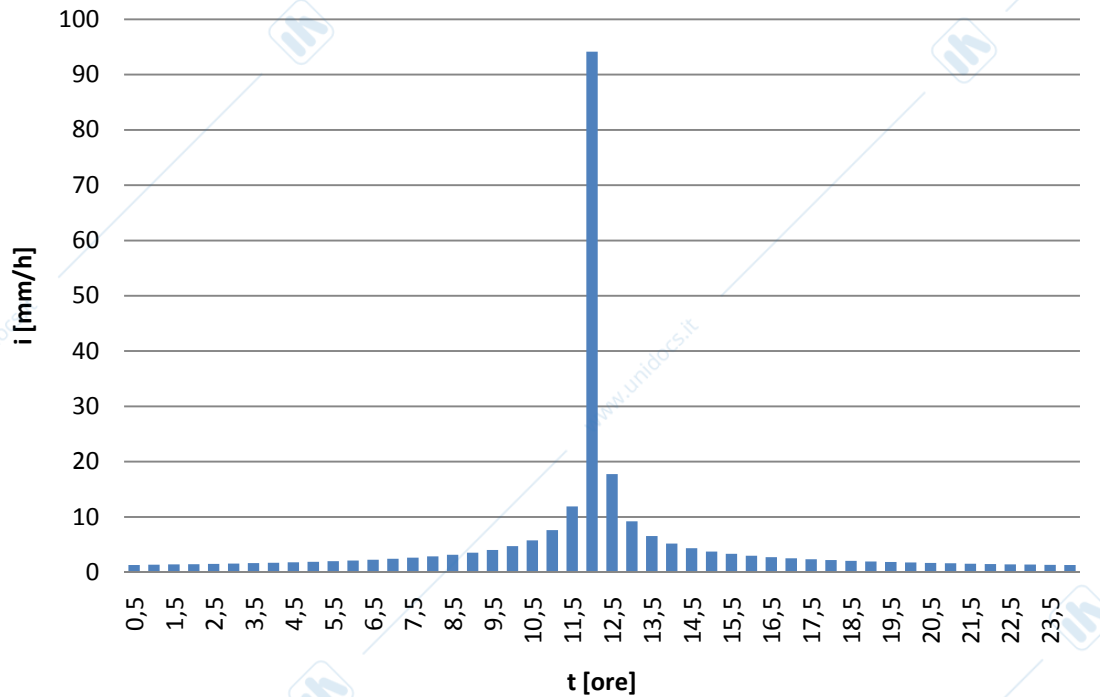


Figura 3.4 Ietogramma Chicago con picco al centro

## Esercitazione 4

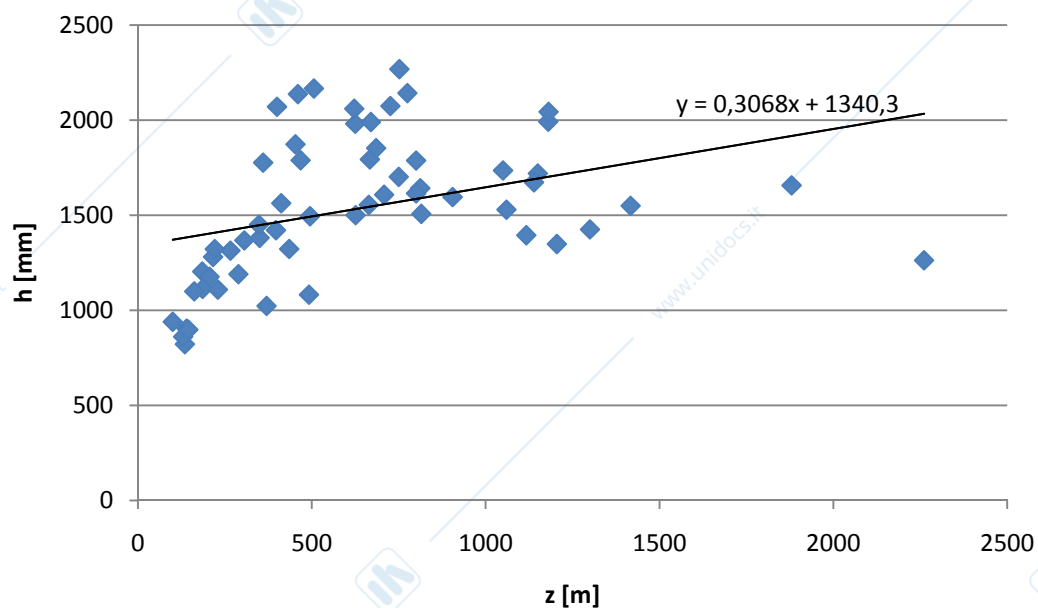
### RELAZIONE TRA PRECIPITAZIONE ANNUA E QUOTA ED ANALISI DI TREND

Si considerino le stazioni pluviometriche presenti all'interno del bacino del Sesia a Fontanetto Po.

1. Determinare, con il metodo dei minimi quadrati, i coefficienti della retta di regressione che rappresenta la relazione tra la precipitazione media annua e la quota della stazione pluviometrica. Rappresentare, in un diagramma cartesiano, i punti corrispondenti ai dati e la retta trovata.

Il metodo dei minimi quadrati viene utilizzato per la stima dei parametri  $a_0$  e  $a_1$  che rappresentano rispettivamente l'intercetta e il coefficiente angolare della retta che interpola i dati della precipitazione in funzione della quota.

Diagrammando quindi i valori di precipitazione media annua in funzione dell'altezza, e interpolando i punti del grafico così creato, si ottiene una retta di equazione data in figura:



**Figura 4.1** Interpolazione della precipitazione media annua in funzione dell'altezza

Dal grafico si possono quindi stimare i due parametri, leggendoli direttamente dall'equazione della retta di tendenza:

$$a_0 = 1340,3$$

$$a_1 = 0,3068$$

2. Valutare la significatività della regressione attraverso la stima del coefficiente angolare della regressione attraverso in test t di Student, il calcolo del coefficiente  $R^2$ , e rappresentare i residui della regressione in carta probabilistica normale.

Il test t di Student viene utilizzato per la valutazione della significatività del coefficiente  $\alpha_1$  ovvero del coefficiente angolare della retta prima descritta. Il primo passo da seguire consiste nella determinazione della variabile test T, che è nota se i residui hanno distribuzione normale.

$$T = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1^0}{\frac{\sigma}{\sqrt{S_{xx}}}} = 2,92$$

Dove:

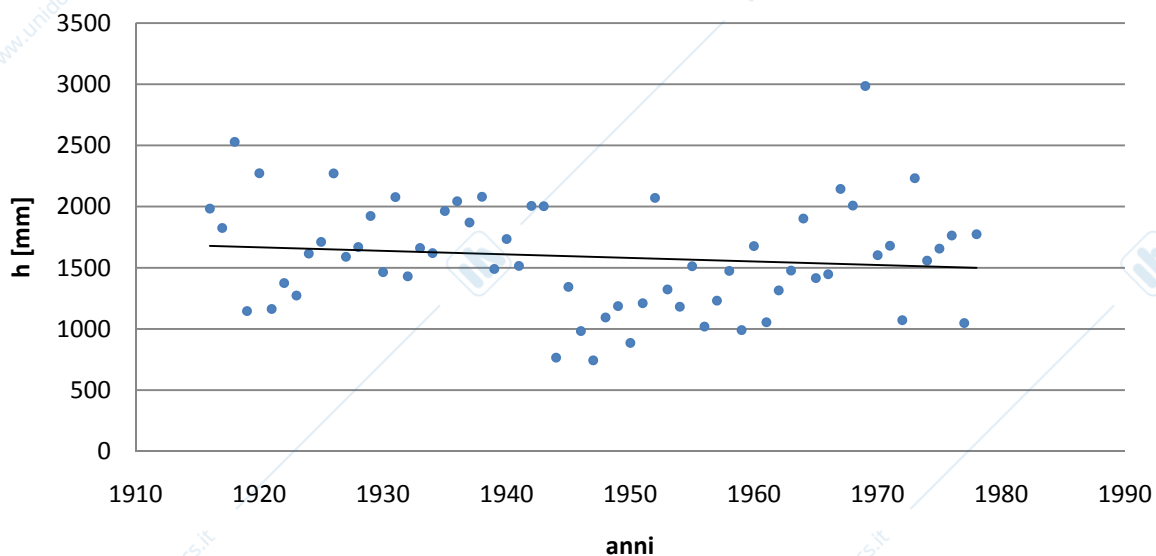
$\beta_1^0$  valore rispetto al quale si vuole valutare la significatività (in questo caso è pari a 0);

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum \varepsilon^2}{n-2}} = 350,81$$

deviazione standard dei residui ("2" indica il numero di parametri che si stanno stimando;

$$\sqrt{S_{xx}} = \sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2} = 3339,09$$

3. Considerando la serie storica della precipitazione annua registrata alla stazione di Rimasco, verificare la presenza di un eventuale trend temporale.



**Figura 4.2** Interpolazione della precipitazione media annua in funzione dell'anno

Dal grafico si possono quindi stimare i due parametri, leggendoli direttamente dall'equazione della retta di tendenza:

$$a_0 = 7218,08$$

$$a_1 = -2,89$$

Successivamente per ogni singolo valore si calcola:

$$X_i - X_{\text{medio}} = \Delta X_i$$

$$Y_i - Y_{\text{medio}} = \Delta Y_i$$

$$S_{yx,i} = \Delta X_i \cdot \Delta Y_i$$

$$S_{xx,i} = (\Delta X_i)^2$$

Successivamente si esegue la somma di tali valori per tutti gli  $i$  anni e si ottiene:

$$S_{yx} = -60231,5$$

$$S_{xx} = 20832$$

Si calcola anche il valore di  $\epsilon$  pari alla somma della differenza tra precipitazione registrata e teorica secondo il trend ricavato.

$$\widehat{\beta}_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$$

$$T = \frac{\widehat{\beta}_1 - \beta_1^\circ}{\frac{\sigma}{\sqrt{S_{xx}}}}$$

Come nel punto precedente si calcola  $T$  che risulta pari a  $-2231,32$  e valutando il test con la funzione di Excel si ottiene un valore pari a  $0,3 e^{-8}$ .

## Esercitazione 5

### RICOSTRUZIONE DEL PERIODO DI RITORNO DI UN NUBIFRAGIO

Scopo dell'esercitazione è quello di stimare il periodo di ritorno relativo ad un evento eccezionale. Un evento di questo tipo, date le sue caratteristiche di eccezionalità, può non rientrare nelle distribuzioni probabilistiche ricavate mediante interferenza statistica a partire da un campione storico di misure pluviometriche: in alcuni casi, infatti, la legge del valore estremo EV1 non è adeguata a descrivere le scie degli estremi idrologici.

#### 1) Determinazione del periodo di ritorno di un evento eccezionale

Per individuare il periodo di ritorno di un evento è necessario tracciare le curve di possibilità pluviometrica per associare una  $T$  ad un determinato valore di intensità di pioggia di determinata durata. Non disponendo dei dati storici relativi alla stazione recente di Caselle i dati del nuovo evento vengono valutati con riferimento alle CPP ricavate dalla stazione più vicina, nel caso particolare quella di Lanzo (Tabella 5.3). Tale analisi viene effettuata mediante il metodo della precipitazione indice il cui procedimento è stato già descritto nella precedente esercitazione. Pertanto vengono solamente presentati i parametri necessari per il tracciamento delle curve.

**Tabella 5.1** Deviazione standard e media di campioni di massimi orari per eventi di diversa durata di Lanzo.

	1h	3h	6h	12h	24h
$\sigma$	12,75	21,61	27,55	38,81	48,59
$\mu$	32,10	50,66	67,82	90,68	122,71

Valutando la regressione lineare (ottenuta mediante procedimento automatico di Excel) delle altezze di precipitazione media si ottiene la CPP indice (Figura 5.1) a cui sono associati i parametri  $a = 31,972$  e  $n = 0,4214$ . La regressione risulta valida in quanto  $R^2=0,9999$ .

I fattori di intensificazione della precipitazione  $K_T$  valutati su un  $C_v$  medio che risulta essere pari a 0,411 sono riportati in tabella 5.2.

**Tabella 5.2** Fattori di crescita della precipitazione per i diversi periodi di ritorno.

$K_{T50}$	$K_{T100}$	$K_{T200}$	$K_{T500}$	$K_{T1000}$
12,75	21,61	27,55	38,81	48,59

Una volta determinati questi parametri si tracciano per punti le curve di possibilità pluviometrica relative ad ognuno dei periodi di ritorno considerati (Figura 5.2).

Tabella 5.3 Estremi pluviometrici orari di Lanzo.

1h	3h	6h	12h	24h
18,80	25,00	40,60	46,60	62,40
35,80	63,00	63,20	86,80	125,20
48,00	64,60	74,20	78,80	109,00
20,60	22,20	44,80	46,80	71,00
34,40	50,40	51,00	84,00	111,40
30,00	58,00	89,60	127,00	181,00
18,00	31,00	46,00	53,40	61,40
29,00	38,00	39,40	74,00	112,00
35,00	58,20	68,00	91,00	115,00
23,00	28,00	28,00	45,00	81,00
17,60	37,00	52,60	87,00	90,40
22,00	31,00	40,60	67,00	83,00
46,00	66,00	90,00	106,00	140,00
16,00	37,00	48,00	80,00	128,00
20,00	37,00	72,00	110,00	165,40
38,60	62,60	97,60	118,00	133,20
24,60	61,00	86,00	99,80	162,00
38,40	68,40	93,00	128,00	192,40
32,20	39,20	43,00	73,00	121,00
30,00	65,00	111,80	171,80	195,40
36,00	82,00	112,00	138,60	156,20
18,00	26,00	43,00	62,00	98,40
35,00	56,40	85,00	94,00	94,60
30,00	36,00	56,00	99,00	173,00
20,00	31,20	44,00	68,00	95,00
20,00	32,00	34,60	57,00	60,40
12,00	19,00	32,00	42,00	68,80
10,00	30,00	54,00	61,00	96,00
35,00	82,00	118,20	186,00	192,80
36,20	55,80	55,80	59,80	83,00
26,40	42,80	46,40	75,20	112,20
34,80	74,80	113,40	128,00	144,40
16,60	33,00	46,00	56,80	81,20
24,40	29,00	53,80	58,00	72,20
45,40	85,40	86,20	89,60	122,80
19,40	30,40	54,00	92,00	123,40
37,60	54,60	59,00	78,60	117,20
49,20	64,00	64,00	64,00	87,40
44,40	51,00	51,80	94,60	136,80
32,40	43,70	79,70	141,30	203,30
41,00	52,60	92,20	54,70	161,40
25,10	43,40	69,70	163,70	108,30
36,40	74,30	136,00	217,70	312,00
31,00	37,60	61,20	82,20	99,70
31,60	35,80	41,30	52,10	63,70
63,40	76,00	77,20	78,80	104,10
55,20	78,40	99,90	111,70	151,70
69,90	135,70	144,10	144,10	151,90
37,40	69,50	86,90	112,80	194,90
21,20	30,10	43,90	52,50	67,30
50,90	53,70	60,30	80,00	141,30
5,13	45,73	45,73	45,73	65,35

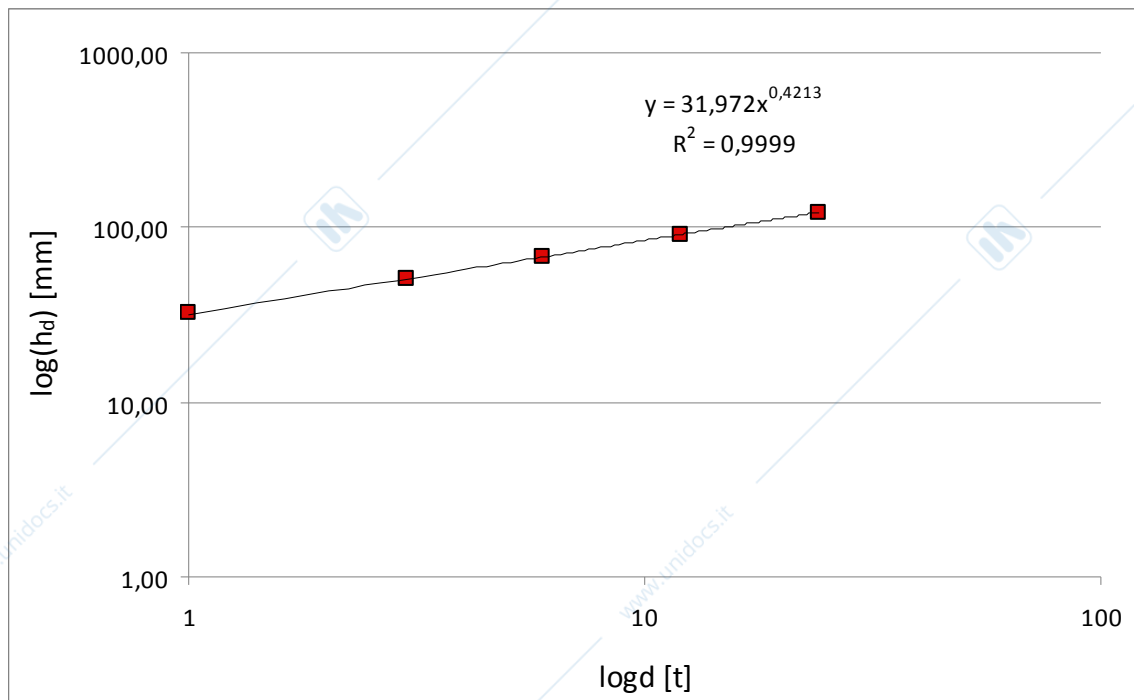


Figura 5.1 Regressione lineare del campione di Lanzo.

Successivamente si sono determinati i valori delle altezze di pioggia massime relative alle tre durate (1, 3 e 6 ore) per l'evento eccezionale di Caselle. Per poter determinare tali valori dalla serie di dati pluviometrici si è ricorso alla somma mobile, tenendo conto via via della somma di misurazioni successive, registrate ogni 10 minuti, secondo intervalli di ampiezza variabile a seconda della durata di precipitazione considerata. I massimi valori delle tre successioni di somme mobili sono i valori ricercati; analiticamente:

$$h(d) = \max \left( \sum_{j=t}^{t+d} \Delta h_j \right)$$

Il procedimento ha prodotto i seguenti risultati sulle misure analizzate

Durata [h]	$h_{\max}$ [mm]
1	74,2
3	148,2
6	232,8

I valori così trovati vengono poi sovrapposti alla curva di possibilità pluviometrica costruita a partire con i dati disponibili della stazione di Lanzo. Dal grafico di figura 5.1 si può stimare indicativamente che gli eventi di durata 1, 3, e 6 ore siano corrispondenti a dei periodi di ritorno rispettivamente di 100, 500, e 2000 anni.

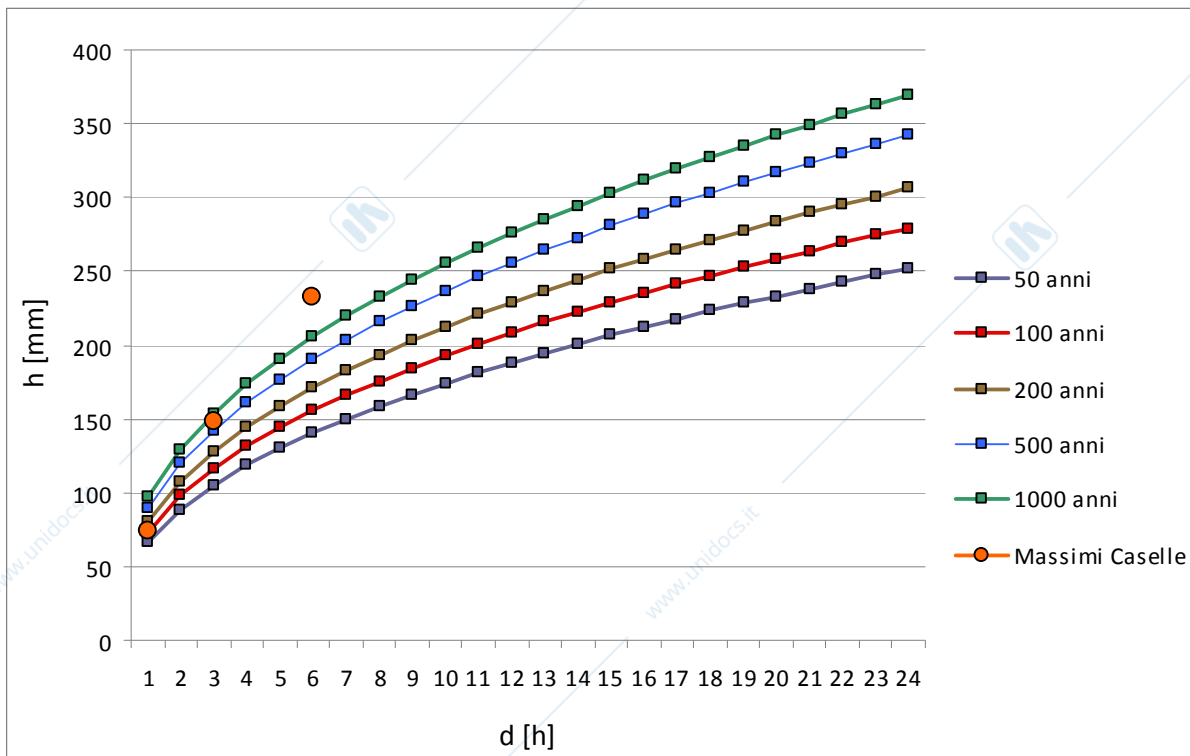


Figura 5.2 Sovrapposizione valori di caselle a CPP costruita sui dati di Lanzo.

## 2) Determinazione di dettaglio di T(P) mediante la distribuzione di Gumbel

L'analisi di seguito presentata è riferita solo alle precipitazioni di durata pari a un'ora. Ipotizzando che i dati dell'evento eccezionale di Caselle appartengano alla stessa popolazione dei dati storici di Lanzo se quest'ultimo risultasse il massimo della serie si potrebbe applicare il test del massimo valore. L'ipotesi  $H_0$  da sottoporre a test è: "Il valore massimo  $X_n$  appartiene alla distribuzione dei massimi di  $N$  dati su una  $F_{X_n}(x)$  di Gumbel"

Primo obiettivo è quello di ricavare la  $F_{X_n}(x)$ ; per il procedimento di costruzione della distribuzione di un massimo di una variabile casuale si ha

$$F_{X_{(N)}}(x) = [F_X(x)]^N$$

Se la distribuzione  $F_X(x)$  è una Gumbel anche la distribuzione del massimo di un campione di  $N$  dati risulterà una Gumbel; infatti equivale a scrivere

$$F_{X_{(N)}}(x) = \left[ \exp\left(-\exp\left(\frac{x-\theta_1}{\theta_2}\right)\right)\right]^N$$

che, dopo semplici passaggi, porta all'espressione

$$F_{X_{(N)}}(x) = \exp\left(-\exp\left(\frac{x - \theta_1^*}{\theta_2}\right)\right)$$

$$\theta_1^* = \theta_1 + \theta_2 \ln N$$

La nuova distribuzione, come volevasi dimostrare, è quindi ancora una Gumbel con un parametro  $\theta_1$  incrementato che equivale a traslare orizzontalmente la Gumbel originaria della quantità  $\theta_2 \ln N$ .

Rimane da valutare se il nuovo evento può essere descritto dalla distribuzione valutata a partire dai dati storici in possesso nella stazione di riferimento. Per fare ciò è possibile applicare il test del massimo valore che consiste nel definire una  $X_{nLIM}$  che costituisce il limite di accettazione del test. Per un livello di significatività del 5% ( $\alpha=0,05$ ) e trattandosi un controllo per estremi positivi si ha che

$$X_{nLIM} = X(F_{X_n} = 0,95)$$

più in generale, per ottenere un'espressione utilizzabile nei calcoli, tenendo conto della legge di distribuzione di Gumbel

$$X_{nLIM} = \theta_1^* - \theta_2 \ln(-\ln(1 - \alpha))$$

Se il valore dell'evento è inferiore a  $X_{nLIM}$  allora il test è passato e la distribuzione con i parametri così stimati è adatta a prevedere l'evento; in caso contrario inserendo nel campione di dati il nuovo evento e ristimando i parametri si verifica che il test fornisce esito positivo. Ciò è spiegabile con il fatto che il test diventa meno restrittivo in quanto il nuovo evento è in grado di distorcere il valore limite "a suo favore", il che non risulta accettabile.

$h(i)$ [mm]	$h(i)+\theta_2 \ln N$ [mm]	$u$	PP	$u$
10,00	48,89	-1,6676	0,0189	-1,3788
12,00	50,89	-1,4644	0,0377	-1,1870
16,00	54,89	-1,0581	0,0566	-1,0549
16,60	55,49	-0,9971	0,0755	-0,9493
17,60	56,49	-0,8955	0,0943	-0,8590
18,00	56,89	-0,8549	0,1132	-0,7787
18,00	56,89	-0,8549	0,1321	-0,7053
18,80	57,69	-0,7736	0,1509	-0,6370
19,40	58,29	-0,7127	0,1698	-0,5727
20,00	58,89	-0,6517	0,1887	-0,5114
20,00	58,89	-0,6517	0,2075	-0,4526
20,00	58,89	-0,6517	0,2264	-0,3957
20,60	59,49	-0,5908	0,2453	-0,3403
21,20	60,09	-0,5298	0,2642	-0,2861
22,00	60,89	-0,4485	0,2830	-0,2329
23,00	61,89	-0,3469	0,3019	-0,1804
24,40	63,29	-0,2047	0,3208	-0,1285
24,60	63,49	-0,1844	0,3396	-0,0769
25,10	63,99	-0,1336	0,3585	-0,0255
26,40	65,29	-0,0015	0,3774	0,0258
29,00	67,89	0,2626	0,3962	0,0771
30,00	68,89	0,3642	0,4151	0,1287
30,00	68,89	0,3642	0,4340	0,1806
30,00	68,89	0,3642	0,4528	0,2329
31,00	69,89	0,4658	0,4717	0,2858
31,60	70,49	0,5267	0,4906	0,3394
32,20	71,09	0,5877	0,5094	0,3939
32,40	71,29	0,6080	0,5283	0,4493
34,40	73,29	0,8112	0,5472	0,5058
34,80	73,69	0,8518	0,5660	0,5637
35,00	73,89	0,8721	0,5849	0,6231
35,00	73,89	0,8721	0,6038	0,6841
35,00	73,89	0,8721	0,6226	0,7470
35,80	74,69	0,9534	0,6415	0,8121
36,00	74,89	0,9737	0,6604	0,8796
36,20	75,09	0,9941	0,6792	0,9499
36,40	75,29	1,0144	0,6981	1,0234
37,40	76,29	1,1160	0,7170	1,1005
37,60	76,49	1,1363	0,7358	1,1818
38,40	77,29	1,2176	0,7547	1,2679
38,60	77,49	1,2379	0,7736	1,3598
41,00	79,89	1,4817	0,7925	1,4583
44,40	83,29	1,8271	0,8113	1,5650
45,13	84,02	1,9013	0,8302	1,6815
45,40	84,29	1,9287	0,8491	1,8102
46,00	84,89	1,9896	0,8679	1,9544
48,00	86,89	2,1928	0,8868	2,1191
49,20	88,09	2,3147	0,9057	2,3117
50,90	89,79	2,4874	0,9245	2,5450
55,20	94,09	2,9243	0,9434	2,8427
63,40	102,29	3,7573	0,9623	3,2580
69,90	108,79	4,4176	0,9811	3,9608

**Tabella 5.4** Analisi campione di Lanzo senza l'evento eccezionale di Caselle.

$$\mu = 32,10$$

$$\sigma = 12,62$$

$$\theta_1 = 26,42$$

$$\theta_2 = 9,84$$

$h(i)$ [mm]	$h(i)+\theta_2 \ln N$ [mm]	$u$	PP	$u$
10,00	52,78	-1,5370	0,0185	-1,3835
12,00	54,78	-1,3523	0,0370	-1,1927
16,00	58,78	-0,9829	0,0556	-1,0614
16,60	59,38	-0,9275	0,0741	-0,9565
17,60	60,38	-0,8351	0,0926	-0,8669
18,00	60,78	-0,7982	0,1111	-0,7872
18,00	60,78	-0,7982	0,1296	-0,7145
18,80	61,58	-0,7243	0,1481	-0,6469
19,40	62,18	-0,6688	0,1667	-0,5832
20,00	62,78	-0,6134	0,1852	-0,5226
20,00	62,78	-0,6134	0,2037	-0,4644
20,00	62,78	-0,6134	0,2222	-0,4082
20,60	63,38	-0,5580	0,2407	-0,3535
21,20	63,98	-0,5026	0,2593	-0,3001
22,00	64,78	-0,4287	0,2778	-0,2476
23,00	65,78	-0,3364	0,2963	-0,1959
24,40	67,18	-0,2070	0,3148	-0,1448
24,60	67,38	-0,1886	0,3333	-0,0940
25,10	67,88	-0,1424	0,3519	-0,0436
26,40	69,18	-0,0223	0,3704	0,0068
29,00	71,78	0,2178	0,3889	0,0571
30,00	72,78	0,3102	0,4074	0,1077
30,00	72,78	0,3102	0,4259	0,1584
30,00	72,78	0,3102	0,4444	0,2096
31,00	73,78	0,4025	0,4630	0,2612
31,60	74,38	0,4580	0,4815	0,3135
32,20	74,98	0,5134	0,5000	0,3665
32,40	75,18	0,5318	0,5185	0,4204
34,40	77,18	0,7166	0,5370	0,4753
34,80	77,58	0,7535	0,5556	0,5314
35,00	77,78	0,7720	0,5741	0,5888
35,00	77,78	0,7720	0,5926	0,6477
35,00	77,78	0,7720	0,6111	0,7083
35,80	78,58	0,8459	0,6296	0,7708
36,00	78,78	0,8643	0,6481	0,8355
36,20	78,98	0,8828	0,6667	0,9027
36,40	79,18	0,9013	0,6852	0,9727
37,40	80,18	0,9936	0,7037	1,0458
37,60	80,38	1,0121	0,7222	1,1226
38,40	81,18	1,0860	0,7407	1,2036
38,60	81,38	1,1045	0,7593	1,2895
41,00	83,78	1,3261	0,7778	1,3811
44,40	87,18	1,6402	0,7963	1,4794
45,13	87,91	1,7076	0,8148	1,5857
45,40	88,18	1,7325	0,8333	1,7020
46,00	88,78	1,7879	0,8519	1,8304
48,00	90,78	1,9727	0,8704	1,9745
49,20	91,98	2,0835	0,8889	2,1389
50,90	93,68	2,2405	0,9074	2,3314
55,20	97,98	2,6377	0,9259	2,5645
63,40	106,18	3,3950	0,9444	2,8619
69,90	112,68	3,9954	0,9630	3,2770
74,20	116,98	4,3925	0,9815	3,9797

Tabella 5.5 Analisi campione di Lanzo con l'evento eccezionale di Caselle.

$$\mu = 32,89$$

$$\sigma = 13,89$$

$$\theta_1 = 26,64$$

$$\theta_2 = 10,83$$

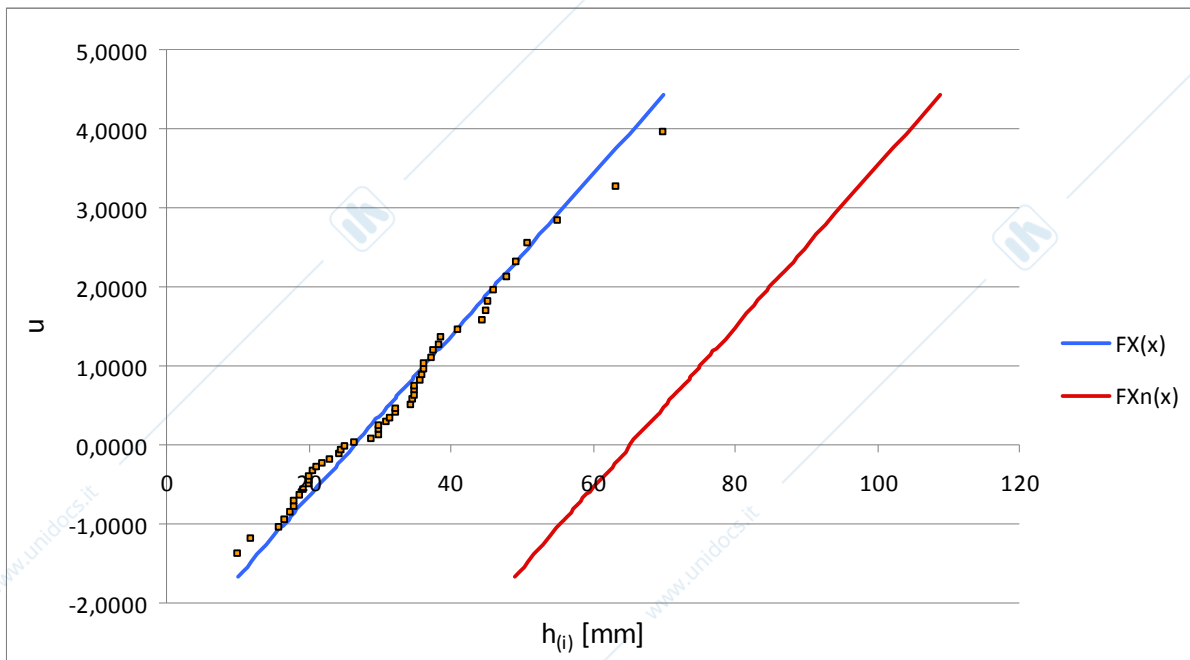


Figura 5.3 Analisi del campione di Lanzo con l'inclusione dell'evento di Caselle.

Il valore limite della prima distribuzione è comunque in grado di prevedere l'evento in quanto risulta essere pari a **94,55 mm**. All'evento di Caselle la distribuzione associa un periodo di ritorno di circa 100 anni.

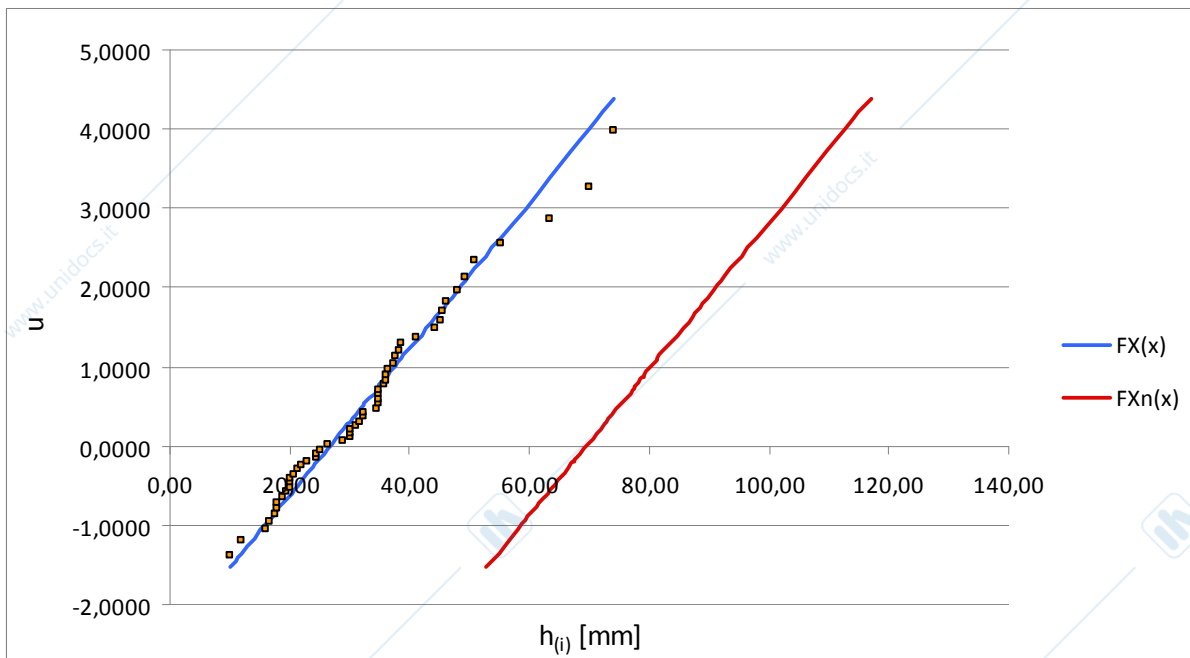


Figura 5.4 Analisi del campione di Lanzo con l'inclusione dell'evento di Caselle.

Come da attese il nuovo valore limite corrispondente con l'inclusione dell'evento risulta essere maggiore ed è pari a **101,58**.

## Esercitazione 6

### UTILIZZO DEL PROGRAMMA JGRASS

Il programma Jgrass permette di analizzare un bacino in tutte le sue forme, a partire dall'analisi della mappa importata, per arrivare all'estrazione del bacino di interesse e alla determinazione dei suoi parametri geomorfologici.

In questo caso si vuole analizzare il bacino del Sangone chiuso a Trana (coordinate N=4988160 E=375630), a partire dal modello digitale del terreno a maglie quadrate di 50m di lato.

1. Rappresentare la morfologia del bacino attribuendo ad ogni pixel un colore o un tono di grigio proporzionale alla sua quota.

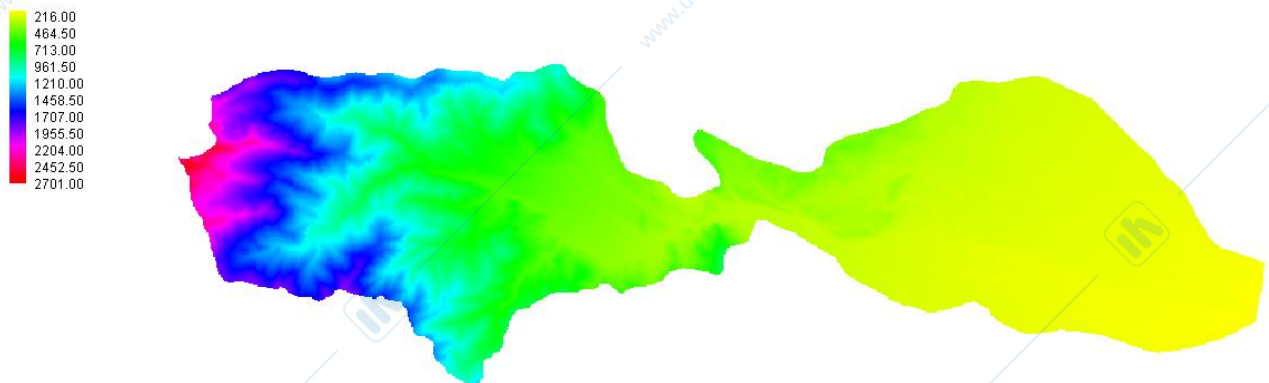


Figura 6.1 Dtm Sangone

2. Determinare l'area del bacino.  
Utilizzando il comando Jgrass - Raster tools – Raster info tool, è possibile interrogare il programma su alcuni dati relativi al bacino. Una di queste informazioni è proprio l'area del bacino, e quello che si troverà sarà:

active area (assuming metric resolution): 2.682825E8

Da questo si deduce che l'area del bacino è pari a 268,2825 km<sup>2</sup>.

3. Calcolare la quota media, massima e minima del bacino.  
Come si può vedere nel punto 1, la quota massima è pari a 2701 m, la quota minima è 216 m, mentre quella media può essere calcolata attraverso la formula:

$$\bar{z} = \frac{1}{A} \sum_{i=0}^k A_i \cdot \frac{(z_i - z_{i+1})}{2}$$

Poiché il programma Jgrass suddivide il bacino in aree uguali, basterà fare la media dei valori trovati nel punto 1. Quindi la quota media del bacino sarà pari a 1325,72 m.

## 4. Tracciare le curve ipsografica e ipsometrica del bacino.

La curva ipsografica viene costruita per la valutazione della distribuzione delle quote di un bacino. La quota media prima calcolata suddivide il grafico in due aree uguali, questo perché il valore medio è pesato sulle aree.

Se si considera una curva di livello  $i$ -esima, a questa quota corrisponderà l'area al di sopra. Se si procede in questo modo per tutte le quote si ottiene una curva come segue:

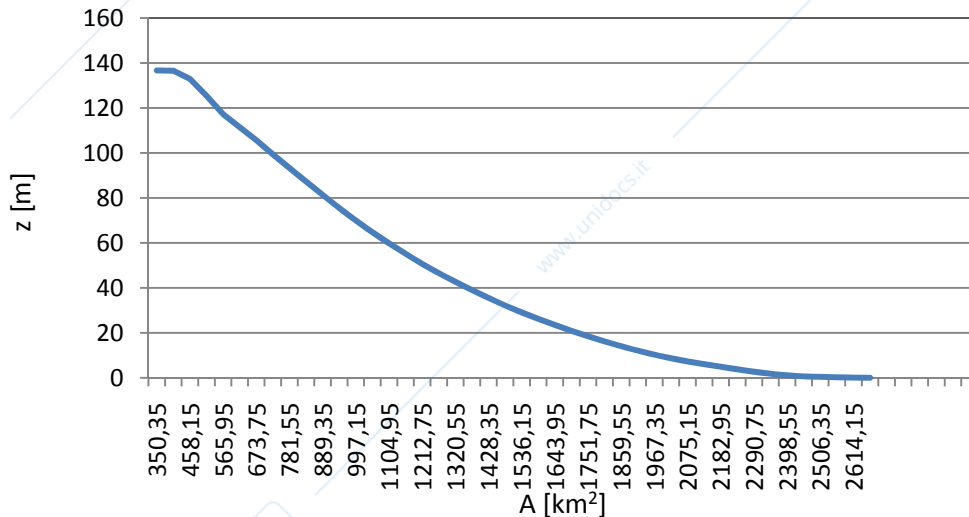


Figura 6.2 Curva ipsografica

La curva ipsometrica, invece, è l'adimensionalizzazione della curva ipsografica e permette così di fare confronti omogenei tra bacini superficiali e sotterranei.

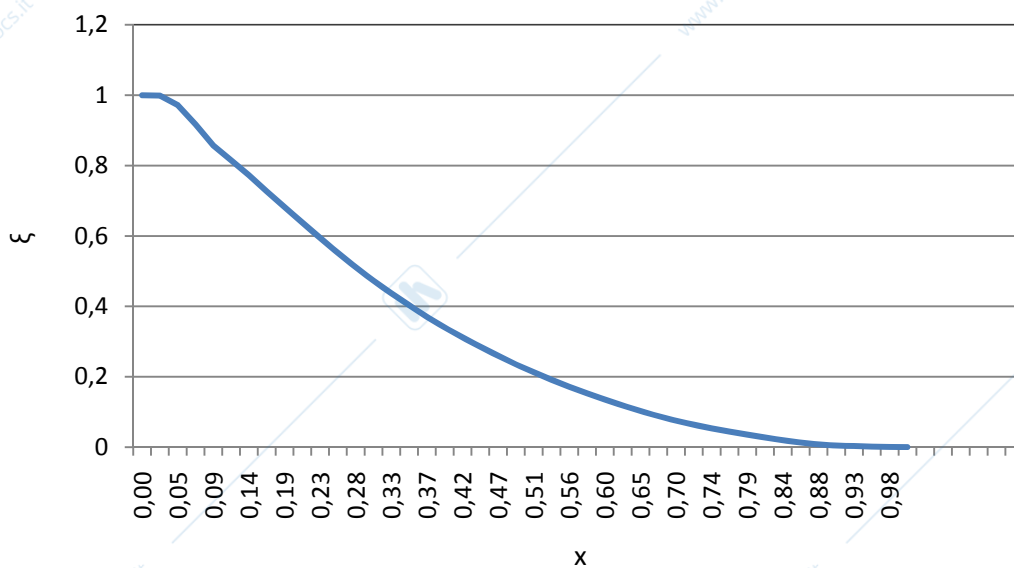


Figura 6.3 Curva ipsometrica

Sull'asse delle ascisse saranno presenti i valori calcolati secondo la formula:

$$\xi = \frac{z - z_{min}}{(z_{max} - z_{min})}$$

Sull'asse delle ordinate, invece, ci saranno le frazioni di aree adimensionali, secondo la formula:

$$x = \frac{a(\xi)}{A}$$

Si ottiene quindi un grafico come di seguito, caratterizzato da un andamento rettilineo, che è la caratteristica principale di un diagramma adimensionale.

5. Estrarre con procedura automatica il reticolo idrografico.  
Prima di procedere all'estrazione del bacino idrografico, sono necessarie alcune elaborazioni dei dati digitali del terreno di partenza. Il primo passo consiste nell'applicazione del comando "*h.pitfiller*" che permette di eliminare eventuali punti di depressione in modo da poter calcolare direttamente le direzioni di drenaggio.

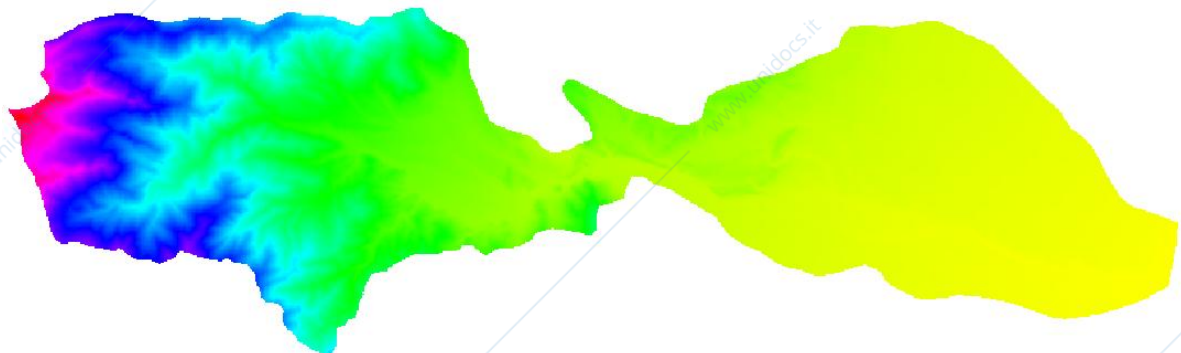


Figura 6.4 Dtm Sangone\_comando h.pitfiller

Il passo successivo è quello di determinare come l'acqua si muove sulla superficie in relazione alla topografia che caratterizza la regione di studio. Il comando "*h.flowdirections*" permette di calcolare le direzioni di drenaggio, dirigendo i flussi lungo la linea di massima pendenza.

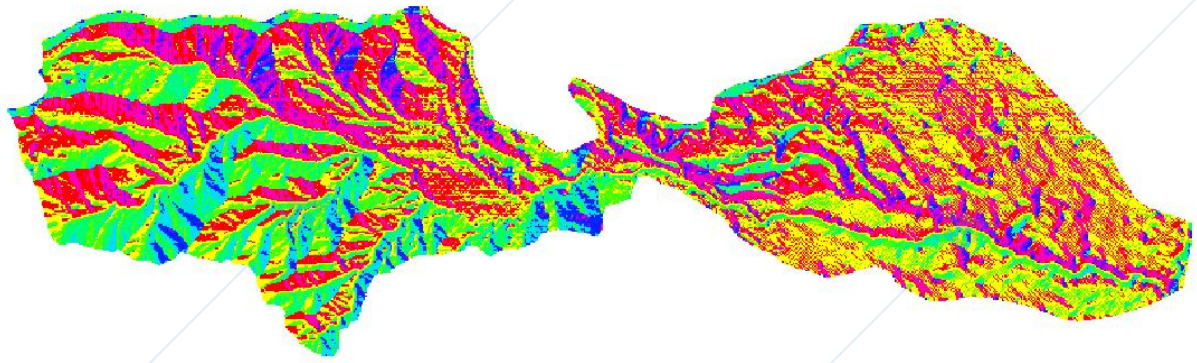


Figura 6.5 Dtm Sangone\_comando h.flowdirections

Il metodo usato in Flowdirections per calcolare le direzioni di drenaggio provoca una deviazione del flusso rispetto al percorso realmente seguito dall'acqua durante la discesa da monte verso valle. *"h.draindir"* consente di ricalcolare tale percorso apportando una correzione che minimizza tale deviazione.

Il programma calcola anche le aree contribuenti (TCA o Total Contributing Area) che rappresentano la proiezione sul piano orizzontale delle aree che fanno riferimento ad un punto del bacino.

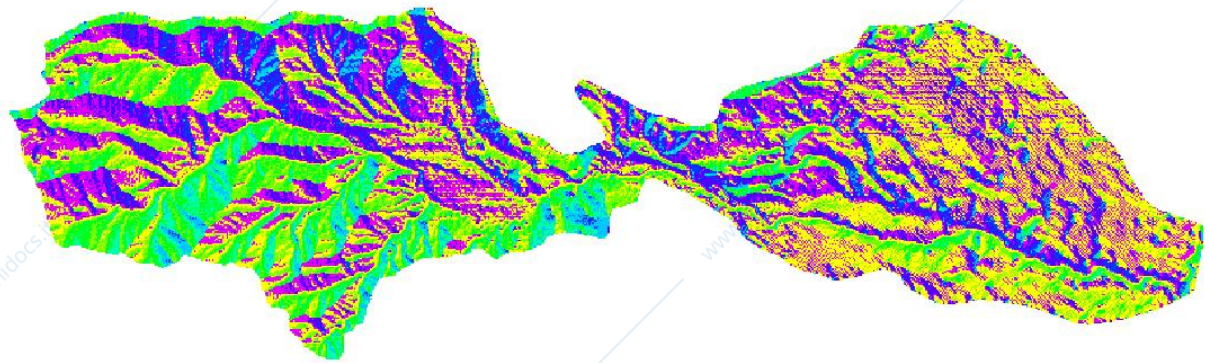
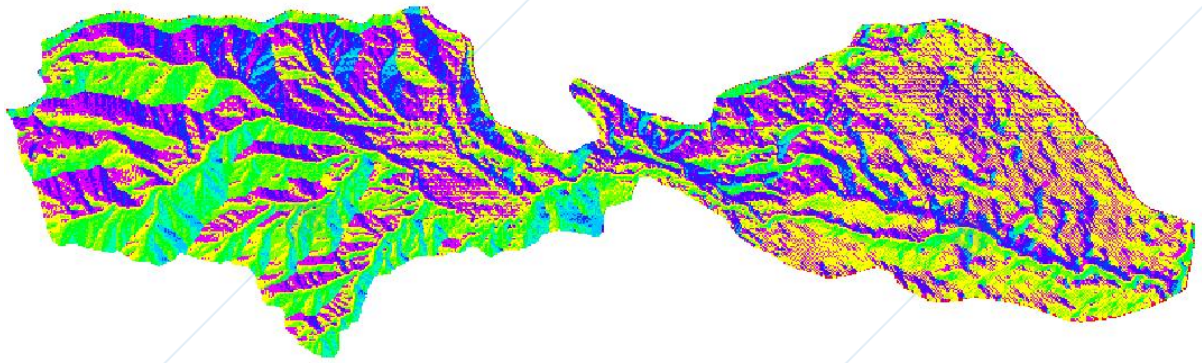


Figura 6.6 Dtm Sangone\_comando h.draindir

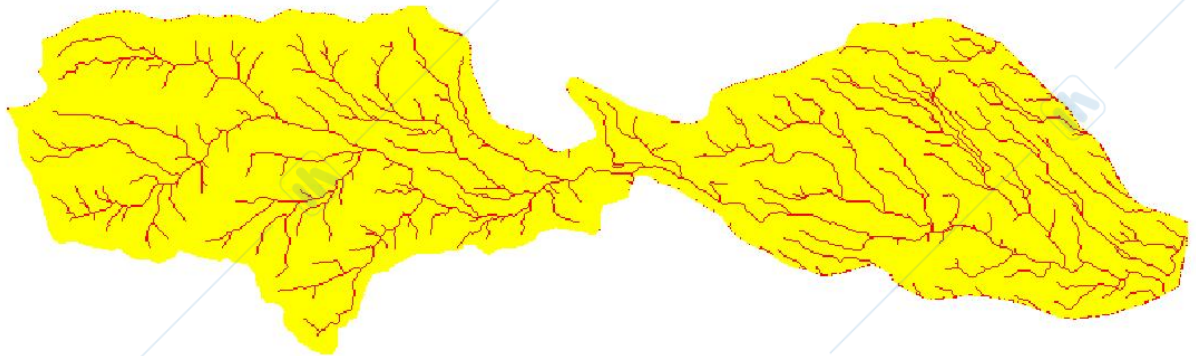
A questo punto è necessario fissare sulla mappa delle direzioni di drenaggio tutti i punti di uscita dalla regione considerata. Seguendo le direzioni di drenaggio, si arriva infatti sul bordo del modello digitale del terreno. I punti sul bordo, sono la chiusura di un bacino idrografico. *"h.MarkOutlets"* individua appunto questi punti.



**Figura 6.7** Dtm Sangone\_comando h.MarkOutlets

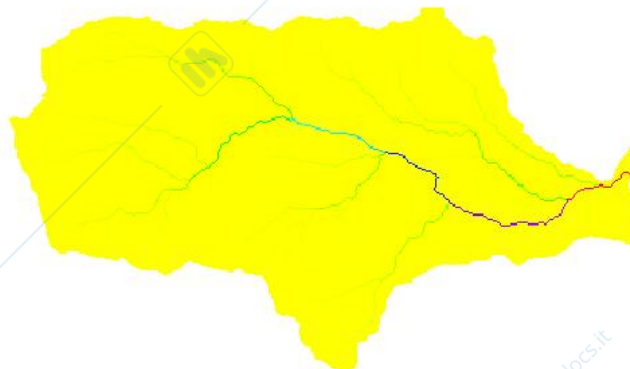
Si può quindi procedere all'estrazione del reticolo idrografico utilizzando uno dei tre metodi a disposizione. Uno basato sulla magnitudo o le aree contribuenti, un secondo sul prodotto tra aree contribuenti e gradiente ed un terzo sulle curvature. A seconda del metodo prescelto è necessario procedere al calcolo di mappe aggiuntive.

Utilizzando il comando "*h.extractnetwork*" si ottiene un grafico come di seguito:



**Figura 6.8** Dtm Sangone\_comando h.extractnetwork

6. Determinare la lunghezza, la pendenza dell'asta principale e identificarne il percorso. Per quanto riguarda la lunghezza dell'asta principale, si è voluto fare riferimento al bacino idrografico che si chiude a Trana. In questo caso l'estrazione del reticolo idrografico è riportato di seguito:



**Figura 6.9** Dtm Trana\_reticolo idrografico

Come si può vedere, nell'immagine spicca l'asta principale che ha una lunghezza di 22 500 m.

Di seguito è riportato il profilo dell'asta principale:

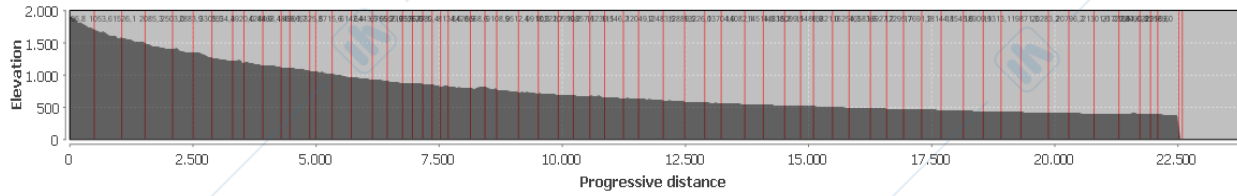


Figura 6.10 Profilo dell'asta principale

## Esercitazione 7

### RICOSTRUZIONE DI UN IDROGRAMMA DI PROGETTO CON IL METODO CINEMATICO

1a) Nota la curva ipsografica del bacino del Sangone a Trana si valuti il tempo di corrivazione del bacino attraverso la formula di Giandotti

$$t_c = \frac{4\sqrt{S} + 1,5L}{0,8\sqrt{H'}}$$

dove:

- L = lunghezza dell'asta principale (in km);
- S = area del bacino (in km<sup>2</sup>);
- H' = differenza tra la quota media e la quota minima del bacino (in metri);
- t<sub>c</sub> è espresso in ore.

A [km <sup>2</sup> ]	136,70
h <sub>min</sub> [m]	364
h <sub>max</sub> [m]	2668
h <sub>media</sub> [m]	1087,9
H' [m]	723,9
L [km]	22,5

Tali dati sono stati ricavati dal file elaborato con JGRASS relativo all'esercitazione precedente. Applicando la formula di Giandotti si ottiene che il tempo di corrivazione è di **3,74 ore**.

**2a) A partire dalla curva di possibilità pluviometrica con T=50 anni (riferita alla stazione di Torino) costruire un pluviogramma di progetto con intensità costante pari all'intensità media  $i_{tc}^*$  di durata pari al tempo di corrivazione  $t_c$ .**

Calcolando il valore dell'altezza di pioggia con la formula

$$h = K_t a d^n$$

dove:

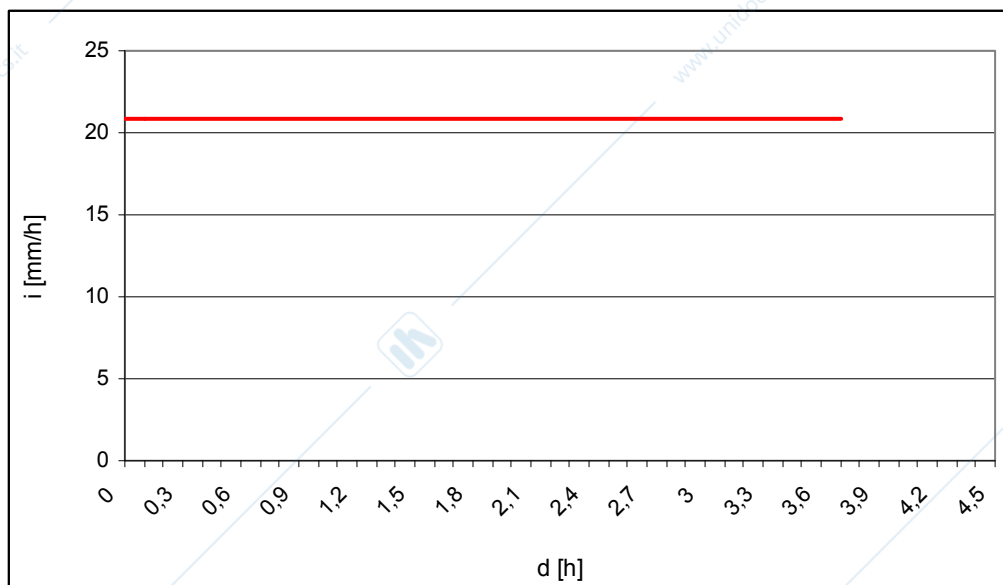
- $K_t$  ricavato dall'Esercitazione 4 per un tempo di ritorno di 50 anni e pari a 1,91;
- $a, n$  parametri della retta di regressione (Esercitazione 4) pari rispettivamente a 29,41 e 0,2491;
- $d$  è il tempo di corrivazione pari a 3,74 ore.

Si ottiene il valore di  $h$  pari a **78,08 mm**.

Per ottenere il valore di  $i_{tc}^*$  si divide il valore dell'altezza di pioggia per il tempo di corrivazione e si ottiene:

$$i_{tc}^* = \frac{h}{t_c} = \frac{78,08}{3,74} = 20,86 \text{ mm/h}$$

Per cui il pluviogramma con intensità costante per il tempo di corrivazione sarà:



**Figura 7.1** Pluviogramma della precipitazioni (T= 50 anni).

3a) Calcolo dell'idrogramma di piena con il metodo cinematico, noto il pluviogramma netto, ottenuto come  $i_n = 0.5 i_{tc}^*$ .

Tabella 7.1 Costruzione dello idrogramma di piena.

x [m]	A [km <sup>2</sup> ]	Δ A [km <sup>2</sup> ]	q [m <sup>3</sup> /s]	Q(t) [m <sup>3</sup> /s]	t [h]
350,35	136,70				0,00
404,25	136,57	0,13	0,36	0,36	0,09
458,15	132,90	3,68	10,65	11,02	0,18
512,05	125,40	7,50	21,72	32,74	0,26
565,95	117,17	8,22	23,83	56,57	0,35
619,85	111,46	5,72	16,56	73,13	0,44
673,75	105,65	5,81	16,82	89,95	0,53
727,65	99,38	6,27	18,16	108,12	0,61
781,55	93,25	6,13	17,76	125,88	0,70
835,45	87,29	5,96	17,26	143,14	0,79
889,35	81,27	6,02	17,43	160,57	0,88
943,25	75,46	5,81	16,84	177,41	0,96
997,15	69,92	5,54	16,06	193,47	1,05
1051,05	64,70	5,22	15,11	208,58	1,14
1104,95	59,80	4,91	14,21	222,79	1,23
1158,85	55,17	4,63	13,40	236,18	1,31
1212,75	50,66	4,52	13,08	249,27	1,40
1266,65	46,56	4,10	11,86	261,13	1,49
1320,55	42,65	3,92	11,35	272,48	1,58
1374,45	39,03	3,62	10,49	282,97	1,66
1428,35	35,58	3,45	9,98	292,95	1,75
1482,25	32,10	3,49	10,10	303,04	1,84
1536,15	29,10	2,99	8,67	311,71	1,93
1590,05	26,22	2,88	8,35	320,06	2,01
1643,95	23,50	2,73	7,89	327,96	2,10
1697,85	20,90	2,59	7,51	335,47	2,19
1751,75	18,48	2,42	7,01	342,48	2,28
1805,65	16,24	2,25	6,51	348,99	2,36
1859,55	14,01	2,22	6,44	355,43	2,45
1913,45	12,09	1,93	5,58	361,01	2,54
1967,35	10,30	1,79	5,19	366,20	2,63
2021,25	8,72	1,58	4,58	370,78	2,71
2075,15	7,28	1,44	4,16	374,93	2,80
2129,05	6,06	1,22	3,54	378,48	2,89
2182,95	4,90	1,16	3,35	381,82	2,98
2236,85	3,84	1,07	3,09	384,91	3,06
2290,75	2,68	1,16	3,35	388,26	3,15
2344,65	1,73	0,96	2,77	391,03	3,24
2398,55	1,10	0,63	1,83	392,85	3,33

<b>x</b> [m]	<b>A</b> [km <sup>2</sup> ]	<b>Δ A</b> [km <sup>2</sup> ]	<b>q</b> [m <sup>3</sup> /s]	<b>Q(t)</b> [m <sup>3</sup> /s]	<b>t</b> [h]
2452,45	0,70	0,39	1,14	393,99	3,41
2506,35	0,43	0,27	0,79	394,78	3,50
2560,25	0,23	0,21	0,59	395,37	3,59
2614,15	0,09	0,14	0,40	395,77	3,68
2668,05	0,03	0,06	0,18	395,95	3,76
350,35	136,70				
404,25	136,57	0,13	-0,36	395,59	3,85
458,15	132,90	3,68	-10,65	384,94	3,94
512,05	125,40	7,50	-21,72	363,21	4,03
565,95	117,17	8,22	-23,83	339,39	4,11
619,85	111,46	5,72	-16,56	322,82	4,20
673,75	105,65	5,81	-16,82	306,00	4,29
727,65	99,38	6,27	-18,16	287,83	4,38
781,55	93,25	6,13	-17,76	270,07	4,46
835,45	87,29	5,96	-17,26	252,81	4,55
889,35	81,27	6,02	-17,43	235,38	4,64
943,25	75,46	5,81	-16,84	218,54	4,73
997,15	69,92	5,54	-16,06	202,48	4,81
1051,05	64,70	5,22	-15,11	187,38	4,90
1104,95	59,80	4,91	-14,21	173,17	4,99
1158,85	55,17	4,63	-13,40	159,77	5,08
1212,75	50,66	4,52	-13,08	146,69	5,16
1266,65	46,56	4,10	-11,86	134,82	5,25
1320,55	42,65	3,92	-11,35	123,47	5,34
1374,45	39,03	3,62	-10,49	112,99	5,43
1428,35	35,58	3,45	-9,98	103,01	5,51
1482,25	32,10	3,49	-10,10	92,91	5,60
1536,15	29,10	2,99	-8,67	84,24	5,69
1590,05	26,22	2,88	-8,35	75,89	5,78
1643,95	23,50	2,73	-7,89	67,99	5,86
1697,85	20,90	2,59	-7,51	60,48	5,95
1751,75	18,48	2,42	-7,01	53,47	6,04
1805,65	16,24	2,25	-6,51	46,96	6,13
1859,55	14,01	2,22	-6,44	40,52	6,21
1913,45	12,09	1,93	-5,58	34,94	6,30
1967,35	10,30	1,79	-5,19	29,75	6,39
2021,25	8,72	1,58	-4,58	25,18	6,48
2075,15	7,28	1,44	-4,16	21,02	6,56
2129,05	6,06	1,22	-3,54	17,48	6,65
2182,95	4,90	1,16	-3,35	14,13	6,74
2236,85	3,84	1,07	-3,09	11,04	6,83
2290,75	2,68	1,16	-3,35	7,69	6,91
2344,65	1,73	0,96	-2,77	4,93	7,00

x [m]	A [km <sup>2</sup> ]	Δ A [km <sup>2</sup> ]	q [m <sup>3</sup> /s]	Q(t) [m <sup>3</sup> /s]	t [h]
2398,55	1,10	0,63	-1,83	3,10	7,09
2452,45	0,70	0,39	-1,14	1,96	7,18
2506,35	0,43	0,27	-0,79	1,17	7,26
2560,25	0,23	0,21	-0,59	0,58	7,35
2614,15	0,09	0,14	-0,40	0,18	7,44
2668,05	0,03	0,06	-0,18	0,00	7,53

con

$$i_n = 0,5 \cdot i_{tc}^* = 10,43 \text{ mm/h}$$

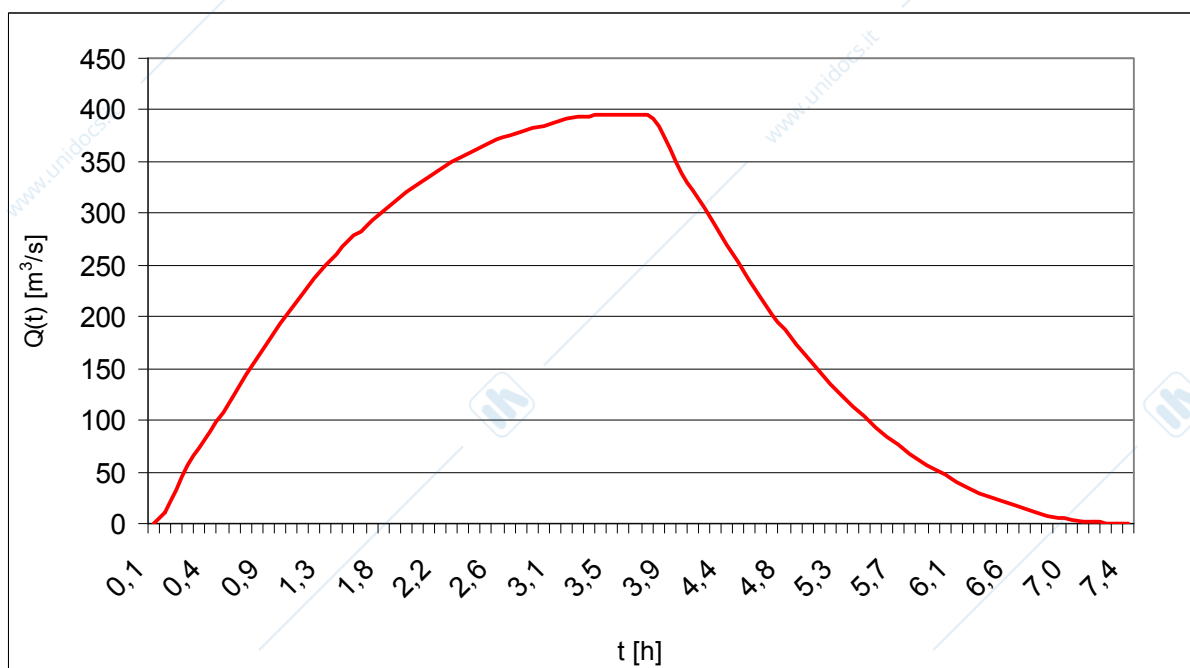
$$q = \frac{\Delta A \cdot i_n}{3,6}$$

$$Q(t) = \sum_{i=0}^t q_i$$

Il primo  $\Delta t$  è stato calcolato come il tempo di corrivazione diviso la differenza tra  $h_{\max}$  e  $h_{\min}$  del bacino e si ottiene un valore pari a 0,0016, il secondo  $t$  è stato calcolato come:

$$t = 0,0016(h_2 - h_1)$$

Dal successivo in poi il valore di  $t$  si ottiene dal precedente incrementato di  $\Delta t$ .



**Figura 7.2** Idrogramma di piena per l'evento considerato.

### 1b) Costruzione dello ietogramma di progetto

La precipitazione di progetto su cui è stato costruito l'idrogramma non costituisce una precipitazione reale ma è lo ietogramma "Chicago" con picco centrale con riferimento alla curva di probabilità pluviometrica riferita alla stazione di Torino, per T=50 anni. Il tempo base dell'evento è stato scelto pari al tempo di corrivazione ( $t_c = 3,74$  h) del bacino chiuso a Trana; l'intervallo di campionamento è stato scelto in modo che ogni diversa intensità dell'evento coprisse un tempo corrispondente a quello di due linee isocorrive del bacino individuate secondo il  $\Delta z$  fissato nell'analisi delle precedenti esercitazioni sullo stesso bacino.

**Tabella 7.2** Costruzione dello ietogramma di progetto sulla CCP di Torino (T=50 anni).

d [h]	$h_d$ [mm]	$h_{d50}$ [mm]	i [mm/h]
0,170	18,92	35,99	211,65
0,340	22,48	42,77	39,89
0,510	24,87	47,31	26,73
0,680	26,72	50,83	20,67
0,850	28,24	53,74	17,09
1,020	29,56	56,23	14,68
1,190	30,71	58,43	12,95
1,360	31,75	60,41	11,62
1,530	32,70	62,21	10,58
1,700	33,57	63,86	9,73
1,870	34,37	65,40	9,02
2,040	35,13	66,83	8,43
2,210	35,83	68,18	7,92
2,380	36,50	69,45	7,47
2,551	37,14	70,65	7,08
2,721	37,74	71,79	6,73
2,891	38,31	72,89	6,42
3,061	38,86	73,93	6,15
3,231	39,39	74,93	5,90
3,401	39,89	75,90	5,67
3,571	40,38	76,83	5,46
3,741	40,85	77,72	5,27

I valori ricavati di altezze di pioggia e di intensità (Tabella 7.1) relative alle diverse durate sono state ricavate mediante la relazione

$$h(d) = K_T \cdot a \cdot d^{n-1}$$

con  $K_T = 1,9025$  fattore di crescita relativo al periodo di ritorno di 50 anni,  $a = 29,41$  e  $n = 0,2491$  parametri della regressione valutati nell'Esercitazione 3 sui dati della stazione di Torino.

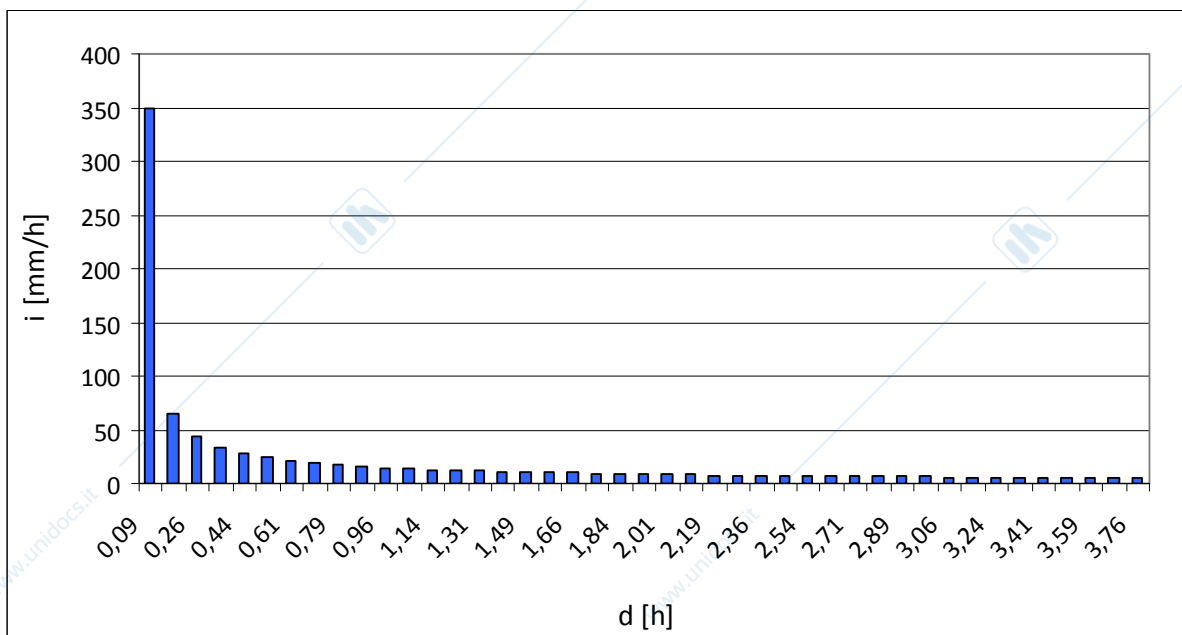


Figura 7.3 Ietogramma della precipitazioni con T= 50 anni.

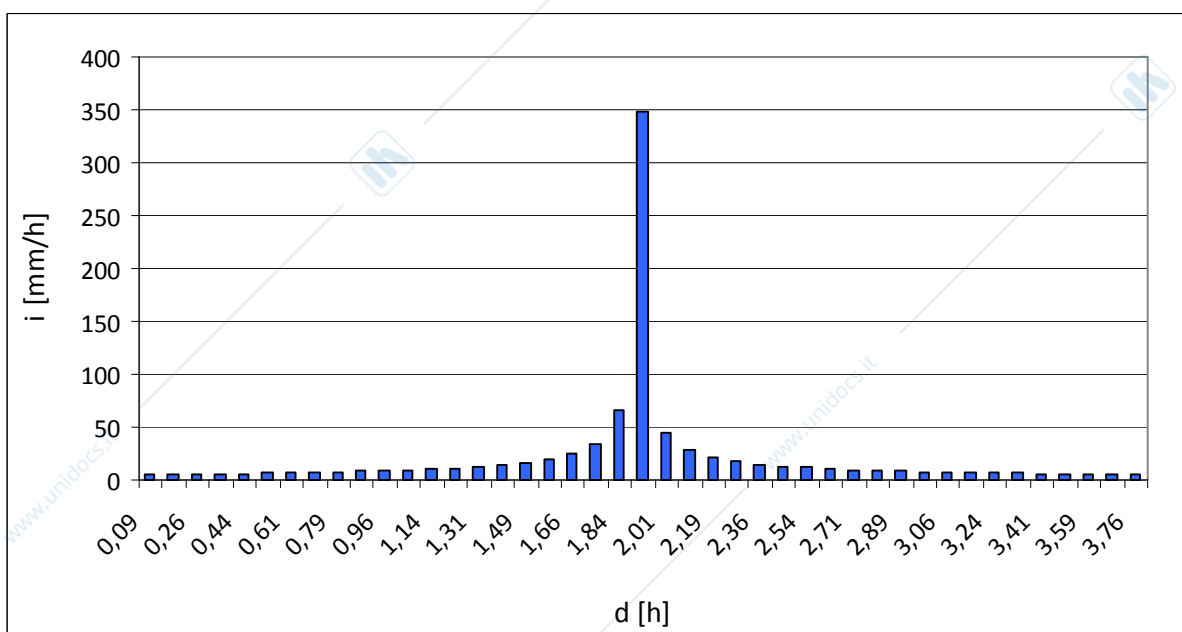


Figura 7.4 Ietogramma della precipitazioni con T= 50 anni.

Lo Ietogramma così prodotto costituisce così l'evento di precipitazione da cui verrà sollecitato il bacino preso in esame.

## 2b) Costruzione dell'idrogramma di piena

Se si sceglie il medesimo intervallo temporale  $\Delta t$  per la discretizzazione dello ietogramma di progetto della pioggia sia dell'idrogramma unitario  $UH_{\Delta t}$  prodotto da una pioggia di altezza unitaria e di durata ancora  $\Delta t$  si ha che:

- $i_n$  è l'intensità media di pioggia nell'intervallo di tempo compreso tra gli istanti  $(k-1)\Delta t$  e  $k\Delta t$  con  $k = 1, \dots, m$ ;
- la durata della pioggia è  $t_p = m\Delta t$ ;
- $n$  numero di intervalli di discretizzazione della curva aree tempi.

Ci si attende che l'intero ietogramma discretizzato generi un idrogramma con tempo di base pari a  $t_c + t_p = (n+m)\Delta t$

Si calcolano poi gli idrogrammi  $Q_k(t)$  generati da ciascuno ietogramma elementare costante di pioggia netta  $i_k(t)$ . Per linearità del sistema l'idrogramma totale si ottiene per sovrapposizione degli effetti

$$Q_m(t) = \sum_{n=1}^m A_n \cdot i_{n-m+1}$$

che trascritta in forma matriciale diventa

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ A_2 & A_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ A_3 & A_2 & A_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdot & & \\ A_n & A_{n-1} & A_{n-2} & \dots & & \\ 0 & A_n & A_{n-1} & \dots & & \\ 0 & 0 & A_n & \dots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdot & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_n & A_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ \vdots \\ i_{m-1} \\ i_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ \vdots \\ Q_n \\ Q_{n+1} \\ Q_{n+2} \\ \vdots \\ Q_{n+m-2} \\ Q_{n+m-1} \\ Q_{n+m} \end{bmatrix}$$

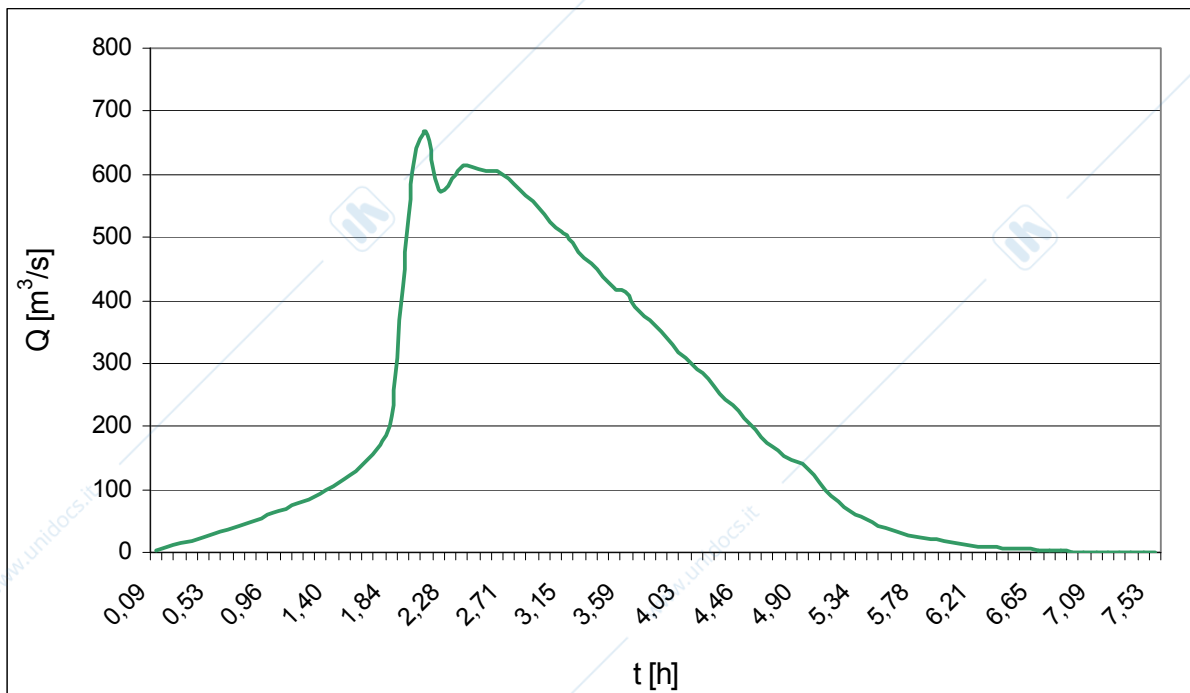


Figura 7.5 Idrogramma di piena risultante dall'evento considerato.

La portata massima pari a **669,54 m<sup>3</sup>/s** si registra a 2,10 ore dall'inizio dell'evento dopo circa 10 minuti dall'istante in cui si registra il picco di precipitazione.

### 3b) Rappresentazione dell'IUH cinematico di bacino e dell'IUH di Nash

L'idrogramma unitario istantaneo rappresenta la risposta del sistema  $h(t)$  (cioè l'idrogramma di piena) conseguente ad una precipitazione netta di volume unitario e di durata infinitesima (e conseguentemente di intensità infinita) avente cioè le caratteristiche di una immissione impulsiva. Un input di questo genere viene indicato come delta di Dirac ed ha le seguenti caratteristiche:

$$\delta(t) = 0 \quad \text{per } t \neq 0$$

$$\int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = 1 \quad \text{Per } t = 0$$

Dovendo valere l'equazione di continuità (volume complessivo di pioggia netta = volume defluente) deve essere :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt = 1$$

cioè l'area sottesa dall' IUH deve avere valore unitario e pertanto  $h(t)$  ha come dimensione l'inverso di un tempo. L'ascissa del baricentro dell'IUH rappresenta invece il cosiddetto tempo di ritardo del bacino.

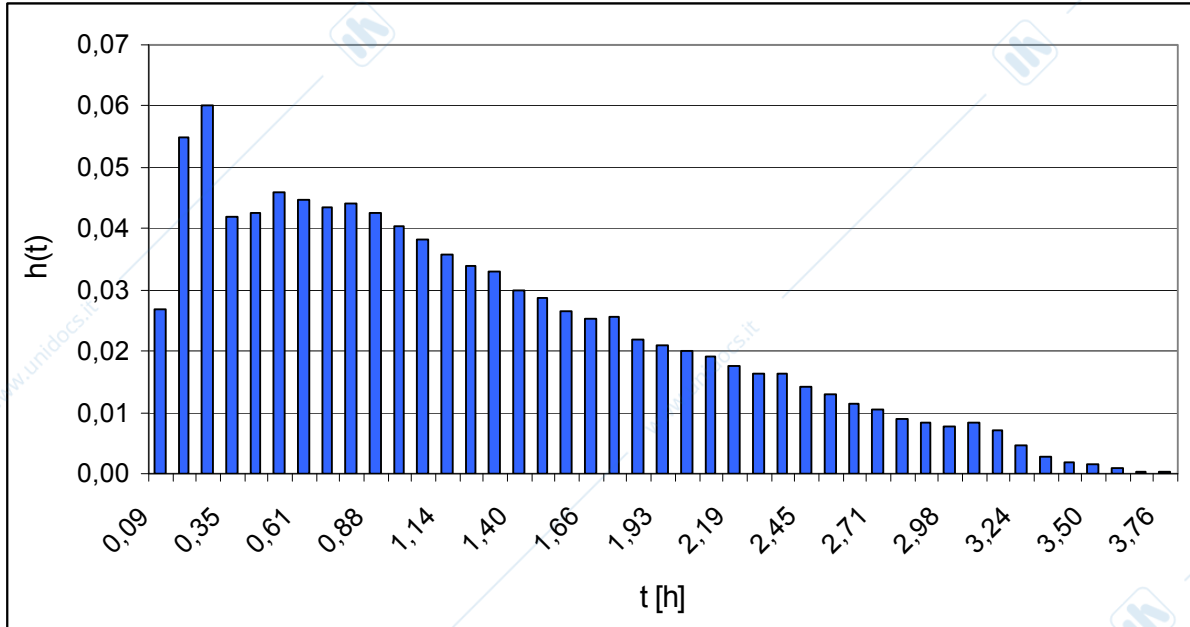


Figura 7.6 IUH cinematico per il bacino considerato.

Il modello di Nash è equivalente ad una cascata di  $n$  serbatoi lineari di identica costante di esaurimento  $k$ . Nel modello di invaso lineare a differenza del modello cinematico l'evoluzione del bacino dipende dalla quantità di precipitazione presente nell'invaso. La funzione IUH di Nash, ottenuta dalla combinazione di  $n$  invasi in serie assume la forma

$$h(t) = \frac{1}{k(n-1)!} \left(\frac{t}{k}\right)^{n-1} e^{-t/k}$$

con  $n$  e  $k$  parametri reali dell'IUH di Nash. Essendo il fattoriale definito solamente per numeri interi l'equazione può anche essere riscritta come

$$h(t) = \frac{1}{k\Gamma(n)} \left(\frac{t}{k}\right)^{n-1} e^{-t/k}$$

Con  $\Gamma(n)$  funzione definita come

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$$

presente su foglio Excel come **GAMMALN()**

Per la stima dei parametri dell'IUH di Nash si può partire dalle osservazioni sulla precipitazione netta e sulle corrispondenti portate alla sezione di chiusura. Per fare ciò si ricorre al metodo dei momenti che consiste nell'eguagliare i momenti attorno all'asse delle ordinate dell'uscita osservata e di quella simulata risultante dalla convoluzione dell'ingresso con l'IUH.

$$n = \frac{H_1^2}{H_2} = \frac{(S_1 - I_1)^2}{S_1' - I_1'} \quad k = \frac{H_1'}{H_1} = \frac{S_1' - I_1'}{S_1 - I_1}$$

I momenti di primo e secondo ordine, i cui valori di sommatoria sono presentati in tabella 7.3, sono pari a:

$H_1$	$H_2$	$I_1$	$I_2$	$S_1$	$S_1'$
1,20	0,67	1,93	54,42	3,12	55,09

I parametri della distribuzione di Nash pertanto risultano risultanti

$$n = 2,14$$

$$k = 0,56$$

L'idrogramma unitario istantaneo di Nash è stato così diagrammato (Figura 7.7) e confrontato con l'IUH cinematico (Figura 7.8)

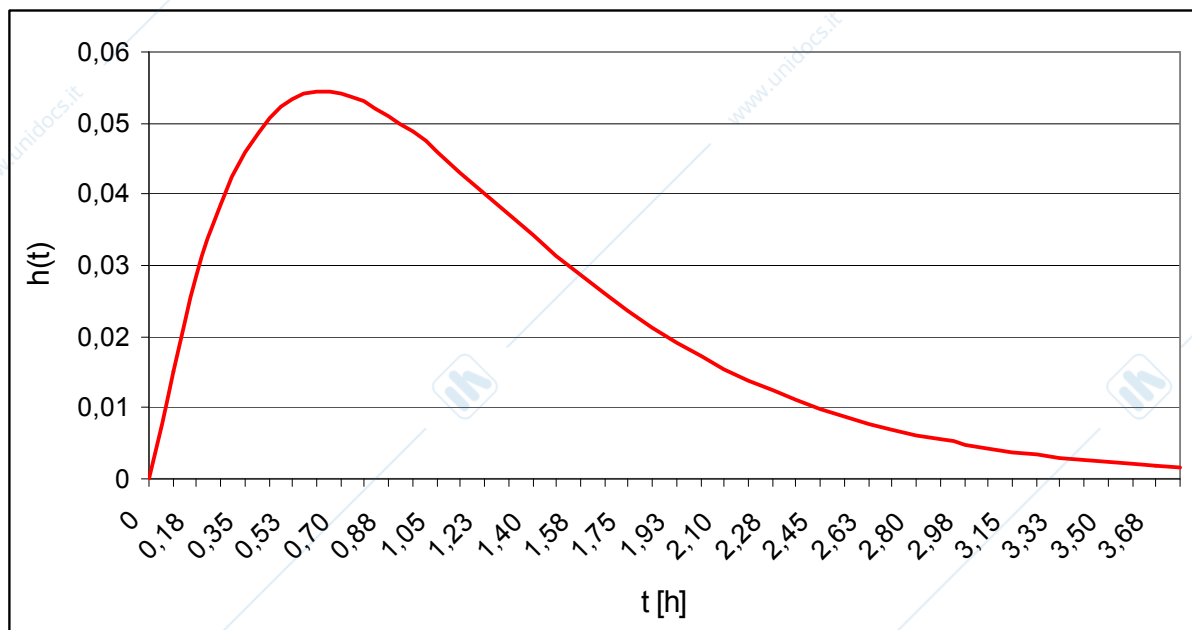


Figura 7.7 IUH di Nash per il bacino considerato.

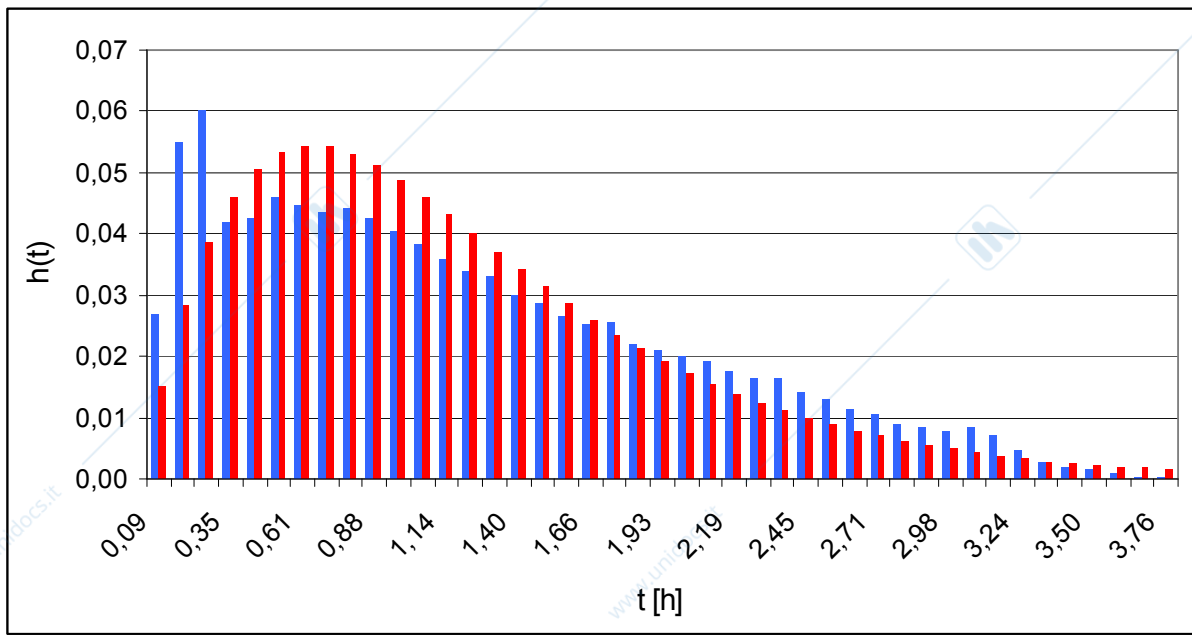


Figura 7.8 Confronto tra IUH cinematico e IUH di Nash.

Tabella 7.3 Calcolo dei momenti dell'IUH cinematico.

t [h]	A <sub>i</sub>	A <sub>i</sub> /A <sub>tot</sub>	S(t)	t*A <sub>i</sub> /A <sub>tot</sub>	(t-tr) <sup>2</sup> *h(t)	(t-tr) <sup>2</sup>
0,09	3,6775	0,0269	0,0269	0,0024	0,0331	3,3773
0,18	7,4975	0,0548	0,0817	0,0096	0,0573	3,0633
0,26	8,2250	0,0602	0,1419	0,0158	0,0526	2,7646
0,35	5,7175	0,0418	0,1837	0,0146	0,0300	2,4813
0,44	5,8075	0,0425	0,2262	0,0186	0,0245	2,2132
0,53	6,2700	0,0459	0,2721	0,0241	0,0207	1,9605
0,61	6,1300	0,0448	0,3169	0,0275	0,0153	1,7231
0,70	5,9575	0,0436	0,3605	0,0305	0,0108	1,5010
0,79	6,0175	0,0440	0,4045	0,0347	0,0074	1,2942
0,88	5,8125	0,0425	0,4471	0,0372	0,0044	1,1028
0,96	5,5425	0,0405	0,4876	0,0390	0,0022	0,9266
1,05	5,2150	0,0381	0,5258	0,0401	0,0008	0,7658
1,14	4,9050	0,0359	0,5616	0,0408	0,0001	0,6203
1,23	4,6250	0,0338	0,5955	0,0415	0,0000	0,4901
1,31	4,5150	0,0330	0,6285	0,0434	0,0004	0,3753
1,40	4,0950	0,0300	0,6585	0,0419	0,0012	0,2757
1,49	3,9175	0,0287	0,6871	0,0426	0,0024	0,1915
1,58	3,6200	0,0265	0,7136	0,0417	0,0038	0,1225
1,66	3,4450	0,0252	0,7388	0,0419	0,0055	0,0689
1,75	3,4850	0,0255	0,7643	0,0446	0,0078	0,0306
1,84	2,9925	0,0219	0,7862	0,0402	0,0090	0,0077
1,93	2,8825	0,0211	0,8073	0,0406	0,0112	0,0000
2,01	2,7250	0,0199	0,8272	0,0401	0,0133	0,0077
2,10	2,5925	0,0190	0,8462	0,0398	0,0155	0,0306
2,19	2,4200	0,0177	0,8639	0,0387	0,0174	0,0689
2,28	2,2475	0,0164	0,8803	0,0374	0,0191	0,1225
2,36	2,2225	0,0163	0,8966	0,0384	0,0221	0,1915
2,45	1,9275	0,0141	0,9107	0,0346	0,0221	0,2757
2,54	1,7900	0,0131	0,9238	0,0332	0,0235	0,3753
2,63	1,5800	0,0116	0,9353	0,0303	0,0236	0,4901
2,71	1,4350	0,0105	0,9458	0,0285	0,0241	0,6203
2,80	1,2225	0,0089	0,9548	0,0250	0,0230	0,7658
2,89	1,1550	0,0084	0,9632	0,0244	0,0241	0,9266
2,98	1,0675	0,0078	0,9710	0,0232	0,0247	1,1028
3,06	1,1550	0,0084	0,9795	0,0259	0,0294	1,2942
3,15	0,9550	0,0070	0,9865	0,0220	0,0266	1,5010
3,24	0,6300	0,0046	0,9911	0,0149	0,0192	1,7231
3,33	0,3925	0,0029	0,9939	0,0095	0,0130	1,9605
3,41	0,2725	0,0020	0,9959	0,0068	0,0098	2,2132
3,50	0,2050	0,0015	0,9974	0,0052	0,0080	2,4813
3,59	0,1375	0,0010	0,9984	0,0036	0,0057	2,7646
3,68	0,0625	0,0005	0,9989	0,0017	0,0028	3,0633
3,76	0,0250	0,0002	0,9991	0,0007	0,0012	3,3773

## Esercitazione 8

### VALUTAZIONE DELL'INFILTRAZIONE CON IL METODO DI GREEN - AMPT

Lo scopo dell'esercitazione è la rappresentazione dell'infiltrazione e del drenaggio di pioggia di due differenti eventi meteorici su un terreno limoso e caratterizzato da (Tabella 8.1):

**Tabella 8.1** Caratteristiche del terreno

$\theta_e$	0,486
$\psi_f$ [mm]	166,8
$K_{sat}$ [mm/h]	6,5
Saturazione <sub>effettiva</sub>	30%

#### PRIMO CASO

Pioggia con intensità costante pari a 40mm/h e di durata 4 ore.

Con il metodo di Green-Ampt si è calcolato :

- il tempo di ponding ( $t_p$ ):

$$t_p = \frac{K \cdot \psi \cdot \Delta\theta}{i(i - K)} = 0,275 \text{ h}$$

Dove:  $\Delta\theta = (1 - S_e) \cdot \theta_e$

- il volume infiltrato entro il tempo di ponding ( $F_p$ ):

$$F_p = t_p \cdot i = 0,275 \text{ h} \cdot 40 \text{ mm/h} = 11,01 \text{ mm}$$

- la sequenza dei deflussi superficiali  $d(t)$ , espressi in mm/h, ed i corrispondenti tassi effettivi di infiltrazione  $f(t)$  fino al termine della precipitazione.

Per il calcolo dei valori dei deflussi si deve partire dal calcolo dei volumi  $F_i$ , ed essendo una funzione da risolvere numericamente si deve iterare i risultati di  $F_i$  fino ad arrivare a convergenza.

$$F = F_p + K (t - t_p) + \psi \cdot \Delta\theta \cdot \ln \frac{\psi \cdot \Delta\theta + F}{\psi \cdot \Delta\theta + F_p}$$

Come primo tentativo si ipotizza  $F = F_p$  e con le successive 30 iterazioni si ottiene il volume dove la differenza tra i valori delle successive iterazioni è minimo, e come tempo si calcola ogni 0,25 h (tabella 8.2):

**Tabella 8.2** Valori di F alla trentesima iterazione ai differenti t

t [h]	F <sub>30</sub> [mm]
0,00	0,000
0,27	11,010
0,50	21,429
0,75	26,878
1,00	31,656
1,25	36,008
1,50	40,058
1,75	43,881
2,00	47,524
2,25	51,021
2,50	54,396
2,75	57,667
3,00	60,848
3,25	63,951
3,50	66,985
3,75	69,956
4,00	72,873

Una volta trovati i valori di F è possibile ricavare l'infiltrazione (f) e il drenaggio (d) (tabella 8.3, figura 8.1):

$$f = K \left( \frac{\psi \cdot \Delta\theta}{F} + 1 \right)$$

$$d = f - i$$

**Tabella 8.3** Valori di infiltrazione e drenaggio ai differenti t

t [h]	F <sub>30</sub> [mm]	f [mm/h]	d [mm/h]
0,00	0,000	40,000	0,000
0,27	11,010	40,000	0,000
0,50	21,429	23,712	16,288
0,75	26,878	20,223	19,777
1,00	31,656	18,152	21,848
1,25	36,008	16,743	23,257
1,50	40,058	15,708	24,292
1,75	43,881	14,906	25,094
2,00	47,524	14,261	25,739
2,25	51,021	13,729	26,271
2,50	54,396	13,281	26,719
2,75	57,667	12,896	27,104
3,00	60,848	12,562	27,438
3,25	63,951	12,268	27,732
3,50	66,985	12,006	27,994
3,75	69,956	11,772	28,228
4,00	72,873	11,561	28,439

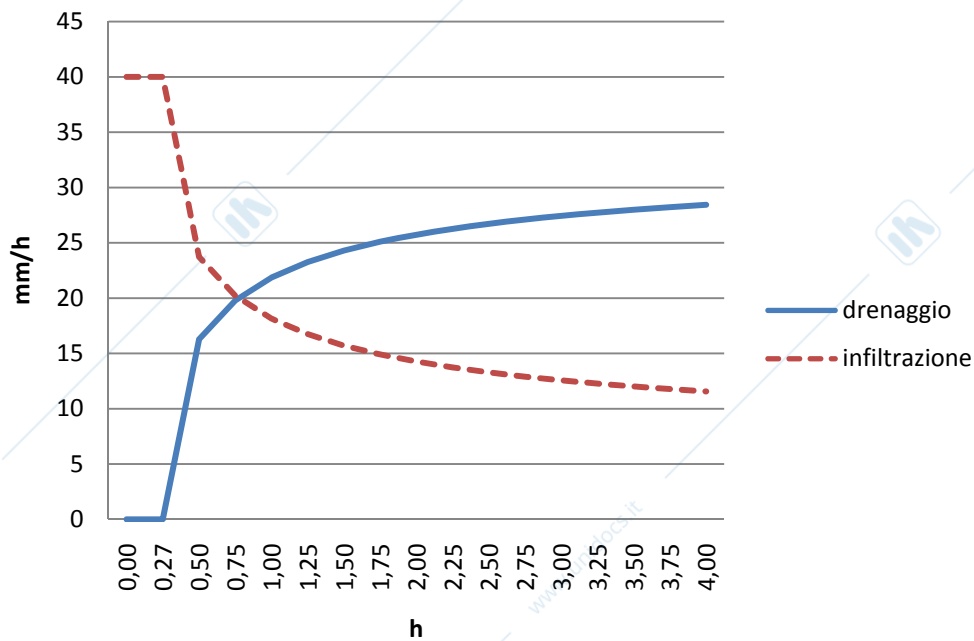


Figura 8.1 Grafico di infiltrazione e drenaggio ai differenti t

## SECONDO CASO

Pioggia triangolare con intensità  $i=(40-10t)$ ; la durata dell' evento è di 4 ore (figura 8.2).

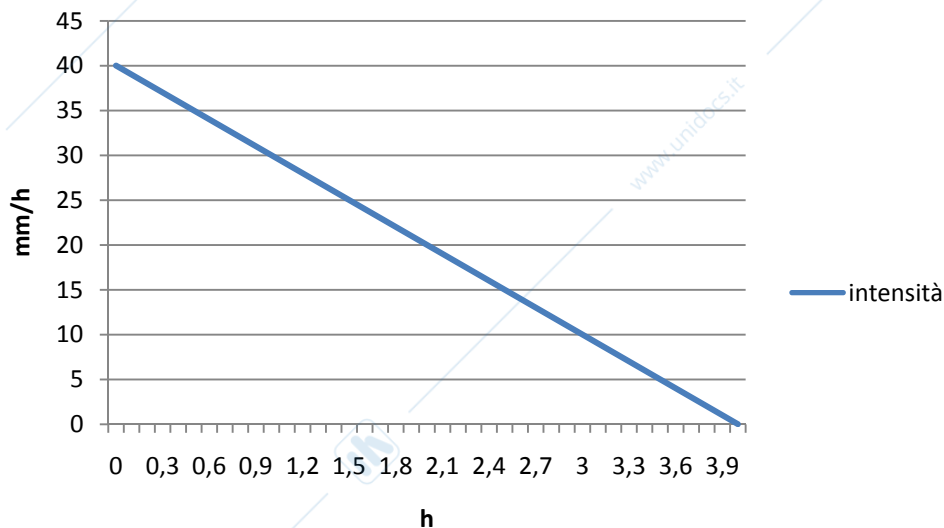


Figura 8.2 Intensità di pioggia triangolare

Per questo caso, il tempo di ponding deve essere determinato numericamente confrontando, a intervalli ravvicinati, il volume di precipitazione con il volume di infiltrazione dipendente dalla condizione di ponding  $f_c = i$ .

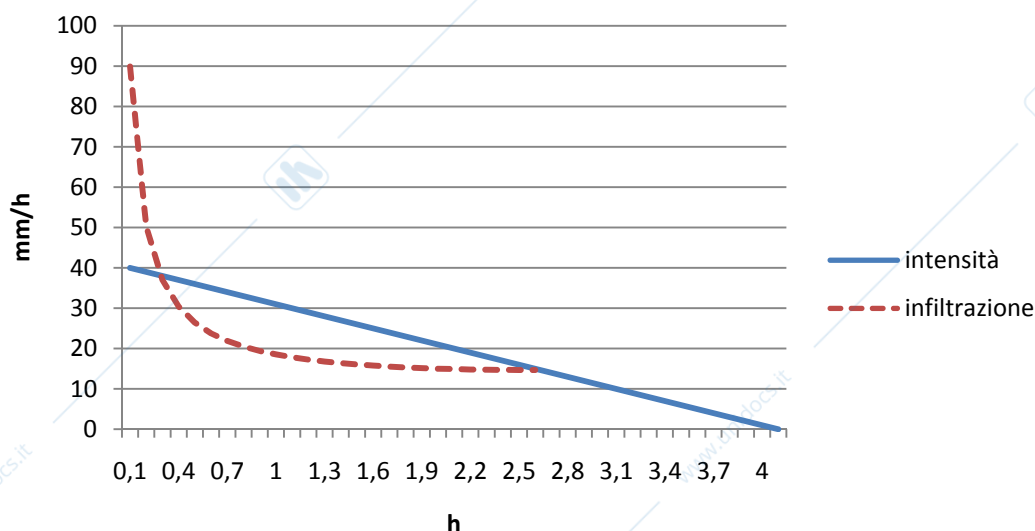
Per determinare la curva  $f(t)$  è necessario prima calcolare i valori del volume  $F$  in vari istanti di tempo, per l'esercitazione si è scelto intervalli di 6 minuti, con la formula:

$$F = K \cdot t + \psi \cdot \Delta\theta \cdot \ln \left( 1 + \frac{F}{\psi \cdot \Delta\theta} \right)$$

Successivamente è possibile trovare l'infiltrazione  $f$ :

$$f = K \left( \frac{\psi \cdot \Delta\theta}{F} + 1 \right)$$

Rappresentando su uno stesso grafico sia l'intensità di pioggia che l'infiltrazione  $f$  è possibile notare 2 punti di intersezione tra i due grafici. Il primo indica il tempo di ponding ( $t_p$ ), e il secondo è dove il valore di intensità di pioggia è minore dell'infiltrazione per cui tutta la precipitazione caduta viene assorbita dal terreno (figura 8.3).



**Figura 8.3** Grafico di infiltrazione e intensità di pioggia ai differenti  $t$

Graficamente i punti critici sono:

tempo di ponding pari a 0,3 h a cui corrisponde  $f = 37,01$  mm/h e nel secondo punto di intersezione è al tempo 2,6 h e si ha un valore di  $f$  pari a 14,69 mm/h.

Per il calcolo dei valori dei deflussi, come per il caso precedente, si deve partire dal calcolo dei volumi  $F_i$ , ed essendo una funzione da risolvere numericamente si deve iterare i risultati di  $F_i$  fino ad arrivare a convergenza.

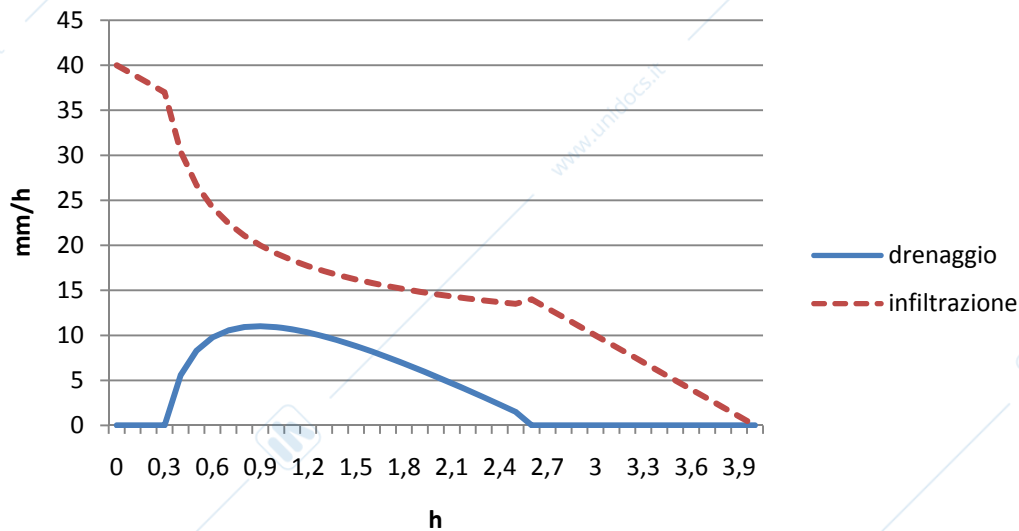
$$F = F_p + K (t - t_p) + \psi \cdot \Delta\theta \cdot \ln \frac{\psi \cdot \Delta\theta + F}{\psi \cdot \Delta\theta + F_p}$$

Come primo tentativo si ipotizza  $F = F_p$  e con le successive 30 iterazioni si ottiene il volume dove la differenza tra i valori delle successive iterazioni è minimo, e come tempo si calcola ogni 0,10 h.

Una volta trovati i valori di  $F$  è possibile ricavare l'infiltrazione ( $f$ ) e il drenaggio ( $d$ ) (figura 8.4):

$$f = K \left( \frac{\psi \cdot \Delta\theta}{F} + 1 \right)$$

$$d = f - i$$



**Figura 8.4** Grafico di infiltrazione e drenaggio ai differenti t

## Esercitazione 9

### CALCOLO DELL'EVAPOTRASPIRAZIONE CON IL METODO FAO

Valutare con la formula di FAO-Penman - Monteith l'evapotraspirazione di riferimento a Torino ( $\varphi = 45^\circ$ ) sulla base delle condizioni meteorologiche odierne ( $T_{\max}$  [C°],  $T_{\min}$  [C°],  $P$ [kPa],  $u_2$  [m/s]).

Il metodo di Penman - Monteith è basato sulla formula riportata di seguito:

$$ET_0 = \frac{0,408\Delta(R_n - G) + \gamma \frac{900u_2(e_s - e_a)}{T + 273}}{\Delta + \gamma(1 + 0.34u_2)}$$

La formula si riferisce ad una superficie vegetata ideale adeguatamente irrigata, con piantine alte 12 cm, resistenza superficiale di  $70 \text{ s m}^{-1}$  e albedo pari a 0,23.

Le variabili coinvolte sono:

$ET_0$	evapotraspirazione di riferimento
$T$	temperatura media giornaliera
$u_2$	velocità del vento
$R_n$	radiazione netta
$\Delta$	declinazione solare
$G$	flusso di calore nel suolo
$e_s$	tensione di vapore saturo media
$e_a$	tensione di vapore effettiva
$\gamma$	costante psicrometrica

Procedura di calcolo:

- 1) *Costante psicrometrica*: è funzione del calore specifico e della pressione atmosferica. Si calcola attraverso la formula:

$$\gamma = \frac{c_p \cdot P}{\varepsilon \lambda} = 0,067165 \text{ kPa } ^\circ\text{C}^{-1}$$

Dove  $P$  rappresenta la pressione atmosferica [kPa],  $\lambda$  il calore latente di evaporazione [ $\text{MJ kg}^{-1}$ ],  $c_p$  il calore specifico a pressione costante, ed  $\varepsilon$  il rapporto tra peso molecolare di vapor d'acqua e quello dell'aria secca.

La pressione atmosferica  $P$  è la pressione ricavata dal peso dell'atmosfera terrestre.

- 2) *Tensione di vapore saturo*: aumenta all'aumentare della temperatura dell'aria. E' espressa dalla formula:

$$e^{\circ}(T) = 0,6108 \exp\left(\frac{17,27 T}{T + 237,3}\right) [kPa]$$

Dove T rappresenta la temperatura dell'aria [°C].

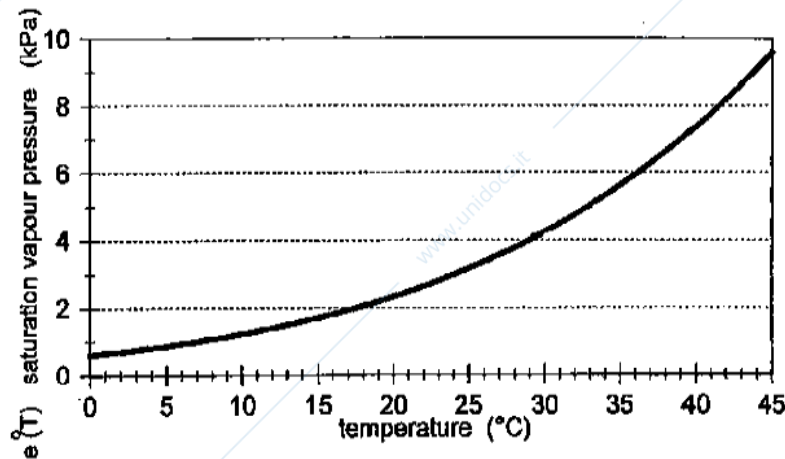


Figura 9.1 Tensione di vapore acqueo al variare della temperatura

- 3) *Tensione di vapore saturo media*: rappresenta la media tra il valore di tensione di vapore saturo calcolato a  $T_{max}$  e quello calcolato a  $T_{min}$ , attraverso la formula:

$$e_s = \frac{e^{\circ}(T_{max}) + e^{\circ}(T_{min})}{2} = 0,8626216 \text{ kPa}$$

- 4) *Tensione di vapore effettiva*: rappresenta la la pressione di vapore derivante dall'acqua presente nell'aria. Può essere calcolata attraverso la formula:

$$e(T_{dew} \sim T_{min}) = 0.611 \exp\left[\frac{17,27 T_{min}}{T_{min} + 237,3}\right]$$

Oppure dalla formula  $e_a = e_s \cdot RH = 0,5865827 \text{ kPa}$  se è disponibile l'umidità relativa ( $T_{dew}$  = temperatura necessaria per raffreddare l'aria affinché diventi saturo).

- 5) *Gradiente di vapor saturo*: rappresenta la pendenza della curva relativa alla tensione di vapore saturo in funzione della temperatura (figura 9.1).

$$\Delta = \frac{4098 \left[0,6108 \exp\left(\frac{17,27 T}{T + 237,3}\right)\right]}{(T + 237,3)^2} = 0,0604366 \text{ kPa } ^{\circ}\text{C}^{-1}$$

- 6) *Flusso di calore nel suolo*: energia che viene utilizzata per riscaldare il suolo, considerata in questo caso pari a 0 [ $\text{MJ m}^{-2} \text{day}^{-1}$ ].
- 7) *Radiazione netta*: è la differenza tra la radiazione proveniente dal cielo e quella in arrivo dalla superficie in esame.

$$R_n = R_{ns} - R_{nl} [\text{MJ m}^{-2} \text{day}^{-1}]$$

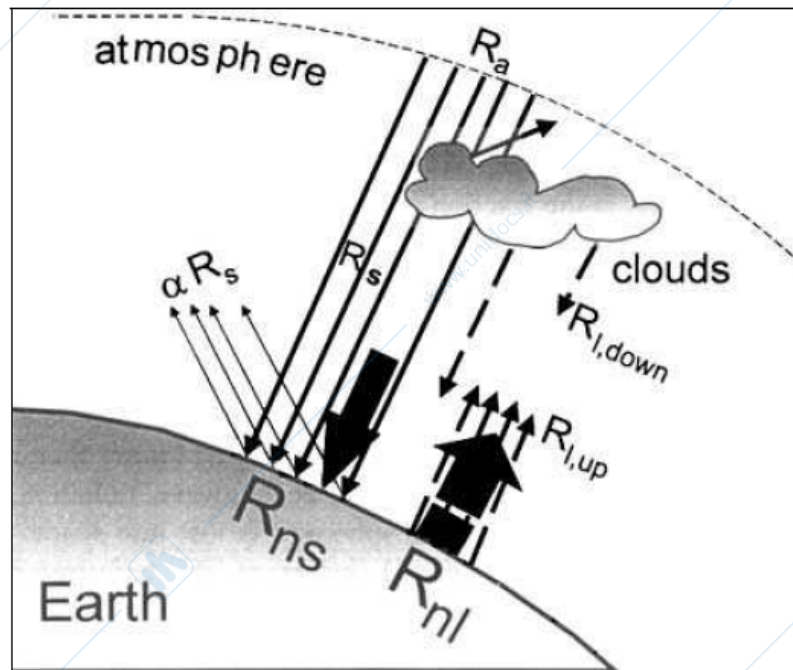


Figura 9.2 Componenti della radiazione solare

Per il calcolo della radiazione netta bisogna prima di tutto calcolare la radiazione netta ad onda corta e quella a onda lunga, definite rispettivamente dalle seguenti formule:

$$R_{ns} = (1 - \alpha) \cdot R_s = 6,1272292 [\text{MJ m}^{-2} \text{day}]$$

$$R_{nl} = f \varepsilon' \sigma T^4 = 1,9459106 [\text{MJ m}^{-2} \text{day}]$$

Dove:

- $\alpha = 0,23$  albedo della superficie;
- $R_s = 7,957$  radiazione globale (dipende da: coefficienti di Prescott, ore di insolazione effettiva e radiazione extra-atmosferica);
- $f = 0,894$  fattore di correzione per la nuvolosità (dipende da: radiazione globale, radiazione globale in condizioni di cielo limpido e coefficienti  $a_c$  e  $b_c$ );
- $\varepsilon' = 0,075$  emissività netta (dipende da: tensione di vapore effettiva e temperatura media giornaliera);
- $\sigma = 4,9 \cdot 10^{-9}$  costante di Stefan-Boltzmann [ $\text{MJ K}^{-4} \text{m}^{-2} \text{day}^{-1}$ ];
- $T = 4,55 \text{ }^\circ\text{C}$  da valutare in gradi Kelvin.

Dopo aver calcolato tutti questi valori, e sostituendo nella formula principale, è possibile calcolare l'evapotraspirazione:

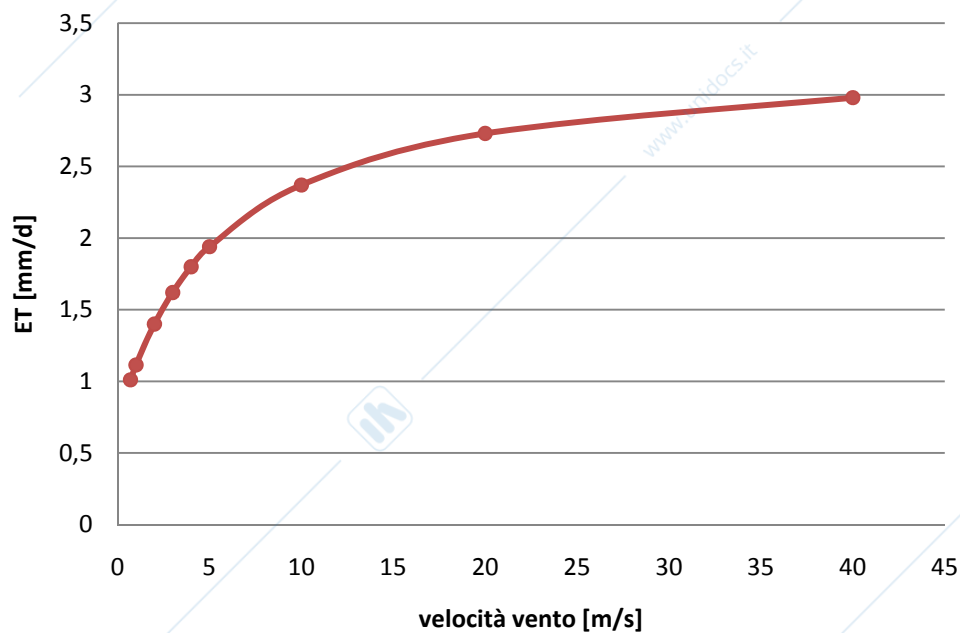
$$ET_0 = 1,08 \frac{mm}{d}$$

Elaborando i dati ottenuti, si possono ricavare alcuni grafici riportati di seguito:

- Variazione dell'evapotraspirazione all'aumentare delle velocità del vento:

**Tabella 9.1** Valori di  $ET_0$  in corrispondenza di alcune velocità del vento

$u_2$	ET
0,7	1,011
1	1,115
2	1,400
3	1,620
4	1,800
5	1,940
10	2,370
20	2,731
40	2,980

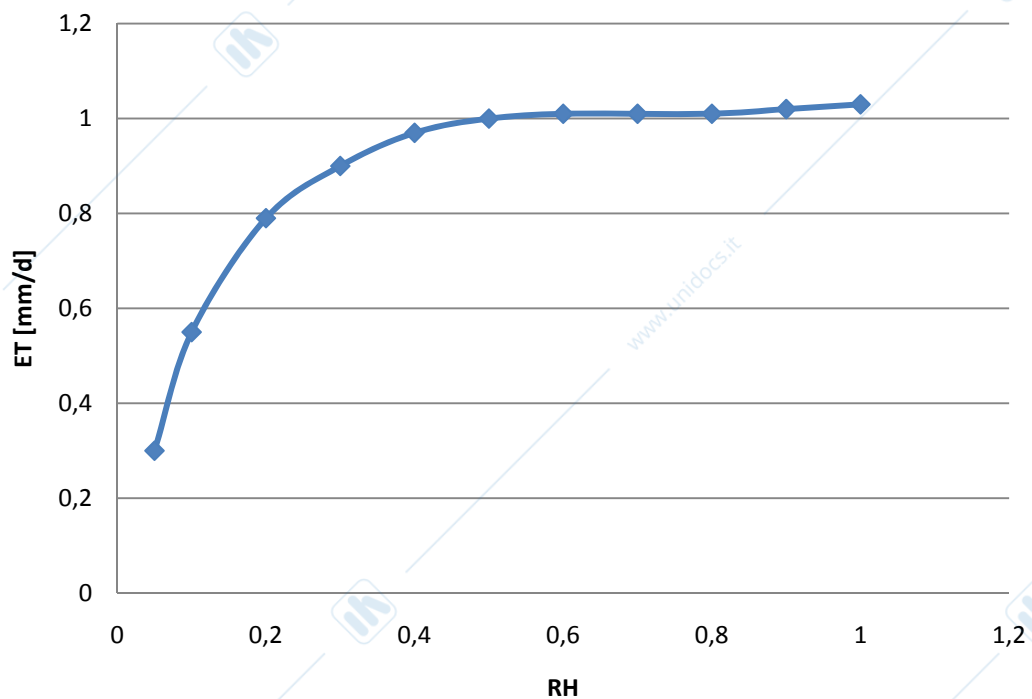


**Figura 9.3** Andamento di  $ET_0$  in funzione della velocità del vento

- Variazione dell'evapotraspirazione al variare dell'umidità relativa:

**Tabella 9.2** Valori di  $ET_0$  in corrispondenza di alcune umidità relative

RH	num 2	num1	ET
0,05	0,125	-0,082	0,3
0,1	0,1184	-0,039	0,55
0,2	0,105	0,0077	0,79
0,3	0,092	0,0375	0,9
0,4	0,079	0,059	0,97
0,5	0,066	0,077	1
0,6	0,053	0,093	1,01
0,7	0,03945	0,105	1,01
0,8	0,0263	0,117	1,01
0,9	0,01315	0,1275	1,02
1	0	0,13681	1,03



**Figura 9.4** Andamento di  $ET_0$  in funzione dell'umidità relativa

- Confronto tra la componente aerodinamica e quella radiativa, nel grafico dell' $ET_0$  in funzione dell'umidità relativa:

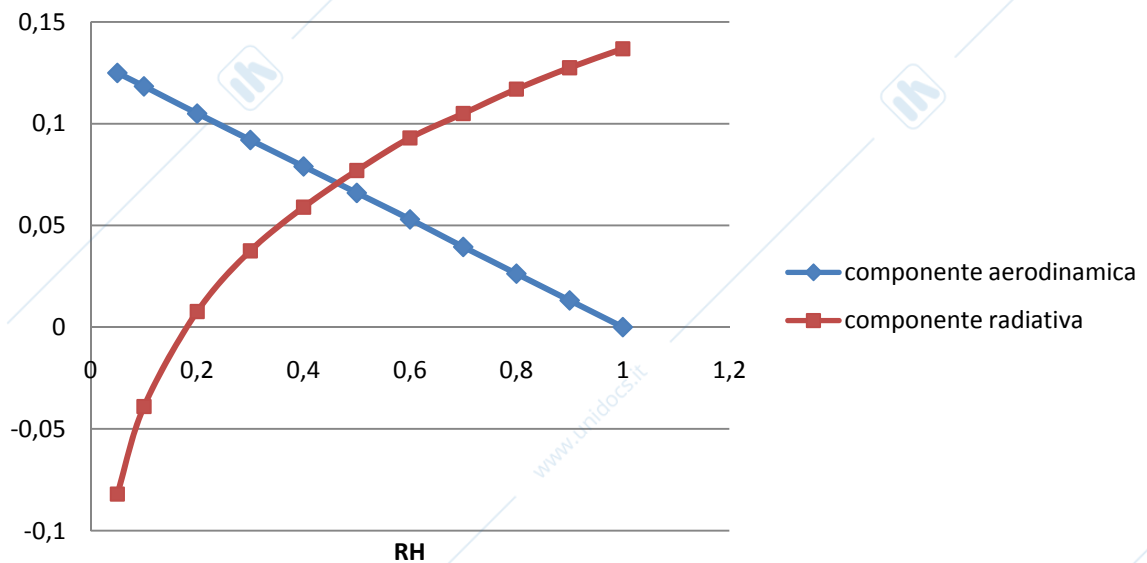


Figura 9.5 Confronto tra componente aerodinamica e componente radiativa