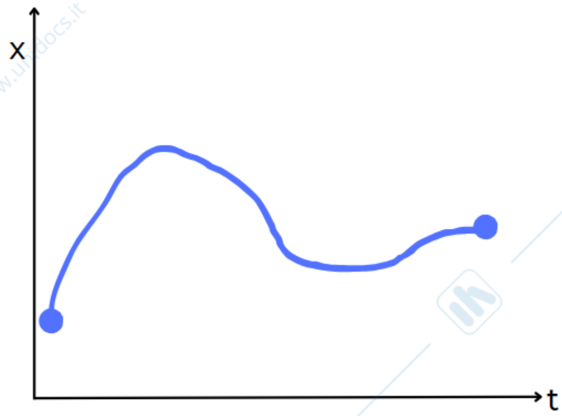
Cinematica

Velocità

Approccio Lagrangiano

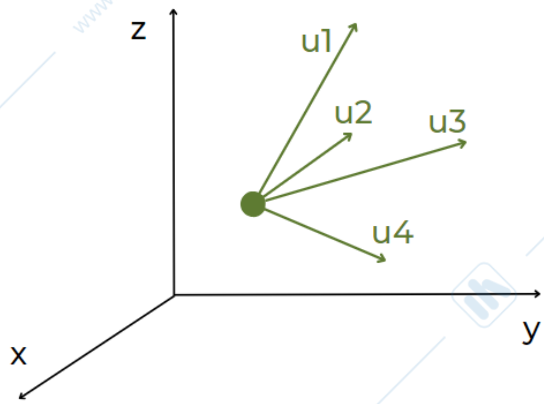
Segue una particella nel tempo

$$
\begin{cases}
x = x(x_0, t) \\
y = y(y_0, t) \\
z = z(z_0, t)
\end{cases}
$$



Approccio Euleriano

Focus su un punto e fotografo il cambiamento di velocità



Campo di moto

$$
\begin{cases}
u = u(x, y, z, t) \\
v = v(x, y, z, t) \\
w = w(x, y, z, t)
\end{cases}
$$

📌 Noi useremo l'approccio Euleriano, anche se inizialmente più complesso è più vantaggioso per descrivere il campo di moto

Legame tra i due approcci

$$\begin{cases} dx = u(x,y,z,t) \cdot dt \\ dy = v(x,y,z,t) \cdot dt \\ dz = w(x,y,z,t) \cdot dt \end{cases}$$

Accelerazione

$$\vec{F} = m\vec{A}$$

Se con l'approccio Lagrangiano è intuitivo ricavare velocità e accelerazione, con quello Euleriano è più complesso.

$$\vec{A} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \qquad Lagrangiano$$

❓ A che massa è riferita l'accelerazione? Dove prima c'era una particella in un secondo momento ce n'è un'altra.

Particella che da A $\vec{u}_A(t)$ va a B $\vec{u}_B(t+\Delta t)$

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{u}_B(t+\Delta t) - \vec{u}_A(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{u}_B(t+\Delta t) - \vec{u}_A(t) + \vec{u}_B(t) - \vec{u}_B(t)}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{u}_B(t+\Delta t) - \vec{u}_B(t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{u}_B(t) - \vec{u}_A(t)}{\Delta t} = \\ &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{u}_B(t) - \vec{u}_A(t)}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta s} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{u}_B(t) - \vec{u}_A(t)}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} = \\ &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial s}|\vec{u}| = \frac{D\vec{u}}{Dt}\end{aligned}$$

Quindi l'accelerazione possiamo scriverla come

$$\vec{A} = \frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial s}|\vec{u}|$$

Si definisce l'accelerazione come **derivata sostanziale** della velocità, con una componente di **accelerazione locale** (variazione locale di velocità) e una **accelerazione convettiva** (particella che si sposta).

Questo operatore è utilizzato per definire ogni grandezza nello spazio (densità, temperatura)

$$\frac{D\cdot}{Dt} = \frac{\partial \cdot}{\partial t} + \frac{\partial \cdot}{\partial x}u + \frac{\partial \cdot}{\partial y}v + \frac{\partial \cdot}{\partial z}w$$

Traiettorie

Posizioni successivamente assunte nel tempo dalle particelle.

Linee di corrente o di flusso

All'istante generico t_0 sia noto in ogni punto del campo di moto il vettore velocità. Si chiama **linea di corrente** la **curva tangente, in ciascuno dei suoi punti, al vettore velocità in quel punto**.

$$\frac{dx}{u(x,y,z;t_0)} = \frac{dy}{v(x,y,z;t_0)} = \frac{dz}{w(x,y,z;t_0)}$$

Individuano le velocità nei differenti punti del campo di moto ad un determinato istante

⚠️ NOTA BENE: in linea generale le linee di flusso sono diverse dalle traiettorie.

Se il vettore velocità in ogni punto del campo di moto è indipendente dal tempo (moto permanente) le linee di corrente coincidono con le traiettorie.

Linee di fumo

Linee con particelle passate per uno stesso punto. Definiscono la posizione che in un determinato istante occupano le particelle precedentemente passate per un prefissato punto del campo di moto.

Tipi di moto

Moto vario

Tutto può variare sia nello spazio, sia nel tempo

Moto permanente

Nel tempo tutto si mantiene costante, ma nello spazio tutto può cambiare

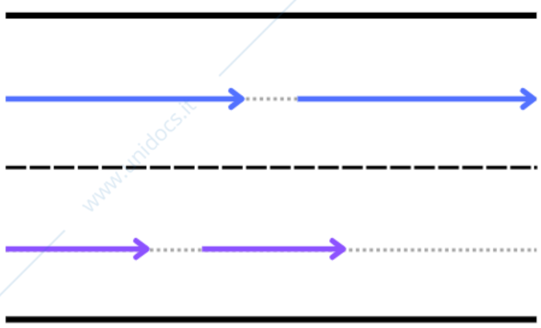
$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 0$$

esempio: un fiume per brevi lassi di tempo

Esiste un sistema di riferimento tale per cui il moto è permanente? esempio: acqua mossa da una imbarcazione POV imbarcazione

Moto uniforme

Il vettore velocità è uniforme per una stessa particella, ovvero non cambia né modulo né verso.



Uniforme si riferisce allo spazio

NOTA: è anche indipendente dal tempo

Moto piano

Approssimazione piana

Shallow water

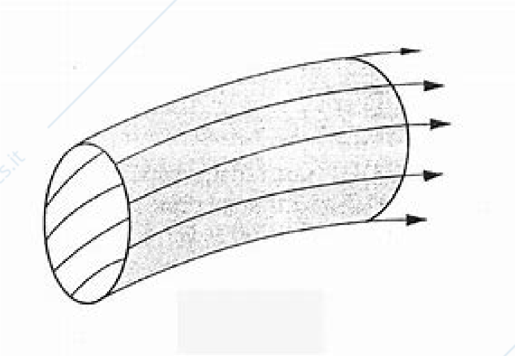
$$\begin{cases} u \neq 0 \\ v \neq 0 \\ w = 0 \end{cases}$$

esempio: moto mare Adriatico, atmosfera per strati a grande scala

Equazione di continuità

Tubi di flusso

Presa una superficie infinitesima consideriamo le linee di corrente che si appoggiano al bordo di $d\Omega$



Il volume infinitesimo che si forma è un **tubo di flusso**, in cui non c'è nessuna probabilità che ci siano particelle entranti o uscenti da quel volume

Se sono in caso di moto permanente i tubi di flusso sono costanti.

$dQ = v_n d\Omega = (\vec{u} \cdot \hat{n}) d\Omega$ portata infinitesima $[m^3/s]$

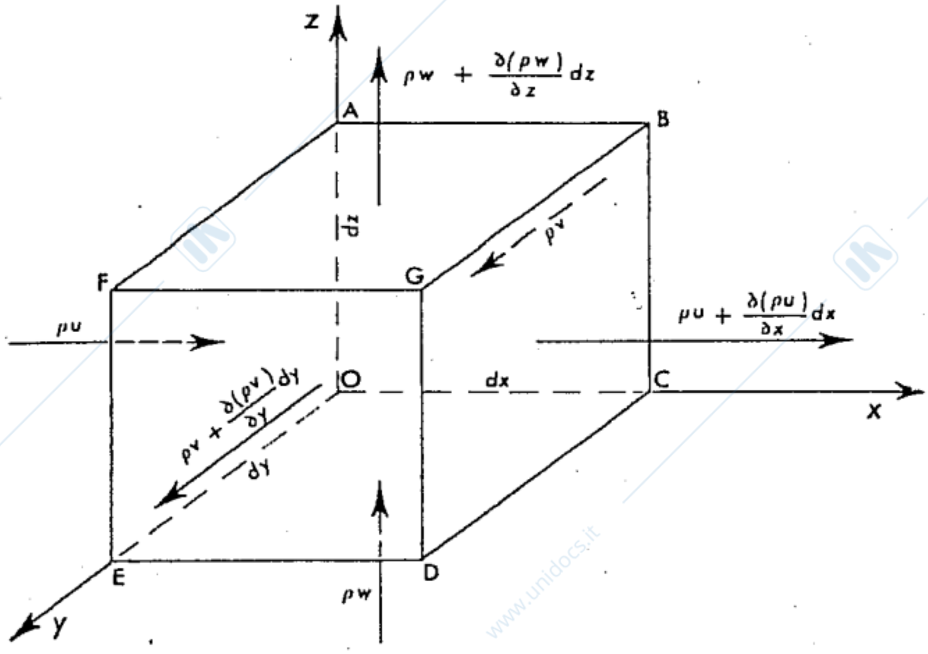
$Q = \int_\Omega (\vec{u} \cdot \hat{n}) d\Omega$ portata totale

Se scegliamo $d\Omega$ in modo che sia una **superficie trasversale**, ovvero, una superficie normale la vettore velocità, otteniamo $Q = \int_\Omega \vec{u} d\Omega$

Nelle correnti è facile individuare la sezione trasversale, è quella normale al percorso.

Conservazione della massa

La differenza tra ciò che entra e ciò che esce è pari alla variazione del contenuto.



Bilancio di ciò che entra ed esce

$$
\begin{aligned}
-\rho u\, dydz\, dt + (\rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx) dydz\, dt &= \frac{\partial \rho u}{\partial x} dxdydz\, dt \\
-\rho v\, dxdz\, dt + (\rho v + \frac{\partial \rho v}{\partial y} dy) dxdz\, dt &= \frac{\partial \rho v}{\partial y} dydxdz\, dt \\
-\rho w\, dxdy\, dt + (\rho w + \frac{\partial \rho w}{\partial z} dz) dxdy\, dt &= \frac{\partial \rho w}{\partial z} dzdxdy\, dt
\end{aligned}
$$

Variazione della massa

$$
\frac{\partial m}{\partial t} dt = \frac{\partial \rho dxdydz}{\partial t} dt = \frac{\partial \rho}{\partial t} dtdxdydz
$$

Poniamo uguali le due espressioni

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}\right) dxdydz\, dt + \frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydz\, dt = 0 \\
&\Rightarrow \left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}\right) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \\
&\Rightarrow \boldsymbol{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{div}(\rho \cdot \vec{\mathbf{u}}) = 0}
\end{aligned}
$$

Otteniamo l'**equazione di continuità indefinita**

Se la densità e il campo di moto soddisfano questa espressione allora abbiamo la **conservazione della quantità di moto**

Se abbiamo un fluido incomprimibile $\rho = cost$ allora il campo di moto è solenoidale

$$div\,\vec{u} = 0$$

📌 Un campo vettoriale nel quale la divergenza del vettore che lo rappresenta è nulla è detto campo solenoidale

Forma globale

$$dQ = v_n d\Omega = (\vec{u}\cdot\hat{n})d\Omega \Rightarrow \rho\, dQ\, dt = \rho(\vec{u}\cdot\hat{n})d\Omega\, dt$$

Evidenziata la **portata in massa**

Globalmente, su tutta la superficie

$$dt\int_\Omega \rho(\vec{u}\cdot\hat{n})d\Omega$$

La variazione della massa globale, dipende da una variazione della densità sempre nell'istante dt

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}dV$$

Ponendo uguali i due termini ottengo **l'equazione di continuità globale**

$$\int_\Omega \rho(\vec{u}\cdot\hat{n})d\Omega = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}dV$$

Se il fluido è incomprimibile $\rho = cost$

$$\int_{\Omega} \vec{u} \cdot \hat{n} d\Omega = \int_{Q} dQ = 0$$

Spezzo l'integrale in tre componenti: superficie entrante, uscente e laterale

$$\int_{\Omega} \vec{u} \cdot \hat{n} d\Omega = \int_{\Omega e} \vec{u} \cdot \hat{n} d\Omega + \int_{\Omega u} \vec{u} \cdot \hat{n} d\Omega + \int_{\Omega lat} \vec{u} \cdot \hat{n} d\Omega = 0$$

La superficie laterale ha velocità normale nulla

$$\int_{\Omega e} \vec{u} \cdot \hat{n} d\Omega + \int_{\Omega u} \vec{u} \cdot \hat{n} d\Omega = Q_e - Q_u = 0 \Rightarrow Q_e = Q_u$$

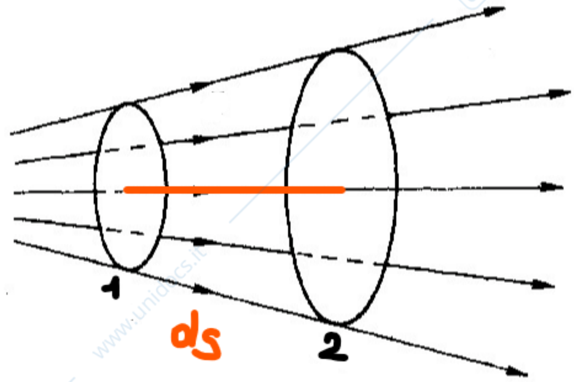
Caso particolare - correnti lineari

Correnti: moto dei fluidi in cui tutto è parallelo e allineato fra loro.

Se le correnti sono lineari (o rettilinee) significa che la direzione del moto S è sostanzialmente una retta e le linee di corrente sono rettilinee e parallele.

ds è approssimabile ad una retta

La sezione può cambiare, anche di poco



$\rho Q dt$ nella sezione 1

$(\rho Q + \frac{\partial \rho Q}{\partial s} ds) dt$ nella sezione 2

La variazione 2-1 corrisponde a

$$\frac{\partial \rho Q}{\partial s} ds dt$$

La massa è $(\Omega ds)\rho$

La variazione infinitesima di massa $\frac{\partial \rho \Omega}{\partial t} dt ds$

Facciamo il bilancio

$$\frac{\partial \rho Q}{\partial s} dsdt = -\frac{\partial \rho \Omega}{\partial t} dtds$$
$$\Rightarrow \frac{\partial \rho Q}{\partial s} = -\frac{\partial \rho \Omega}{\partial t}$$

Se fluido incomprimibile $\rho = cost$

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = -\frac{\partial \Omega}{\partial t}$$

Se fluido incomprimibile $\rho = cost$ e moto permanente abbiamo la **conservazione della portata** (invarianti del moto)

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = 0$$