

## Capitolo 3

# Correnti a pelo libero

### 3.1 Generalità

Si tratta essenzialmente delle correnti idriche che percorrono i *corsi d'acqua naturali* (fiumi, torrenti) o i *canali artificiali* (di bonifica, di irrigazione, di fognatura, di impianti idroelettrici, di navigazione interna).

Queste correnti sono caratterizzate dall'aver la parte superiore della superficie di contorno non a contatto con una parete solida, bensì con un gas, che nella più grande generalità dei casi è l'atmosfera. Questa superficie si dice *superficie libera* o *pelo libero*, essa è una *superficie isobarica* ( $p = \text{cost}$ ), almeno se si considerano tronchi di corrente non eccessivamente estesi.

#### 3.1.1 Ipotesi

##### Studio a grande scala

Lo studio delle correnti a pelo libero viene effettuato su grande scala, non andando quindi ad indagare su ciò che avviene puntualmente (per lo studio dei cui fenomeni si rendono necessarie le equazioni di Navier-Stokes). Invece quindi di ragionare in termini di forze e sforzi si ragiona in termini di *energia* (grandezza scalare) e *quantità di moto* (grandezza vettoriale).

##### Correnti lineari o gradualmente variate

Salvo situazioni eccezionali, in genere limitate a brevi tratti di corrente e che andranno esaminate caso per caso con apposita trattazione, si fa riferimento al caso delle *correnti lineari* o *gradualmente variate*: esse sono caratterizzate da una trascurabile curvatura delle singole traiettorie e quindi da una *distribuzione sensibilmente idrostatica della pressione* in ogni sezione trasversale.

Ne consegue che l'intersezione di una generica sezione trasversale con la superficie libera risulta una *retta orizzontale*.

È possibile quindi parlare della *quota del pelo libero* di una generica sezione e definire un *profilo longitudinale del pelo libero della corrente*, o più semplicemente *profilo del pelo libero*, come linea d'intersezione della superficie libera col cilindro a generatrici verticali contenente una generica traiettoria (il quale si discosterà assai poco da un piano verticale).

##### Teoria unidimensionale

Lo studio del moto può essere condotto secondo la teoria unidimensionale, con riferimento cioè ad *una sola coordinata spaziale*: l'ascissa curvilinea  $s$  misurata lungo una traiettoria. Ne consegue che del *vettore velocità*  $\vec{v}$  si considera solamente la *componente assiale* e si trascurano le componenti orizzontali e verticali nel piano della sezione.

Tale teoria viene inoltre *ulteriormente semplificata* ipotizzando che la *pendenza dell'alveo* in cui si muove la corrente, e quindi la pendenza di tutte le traiettorie e del profilo del pelo libero, siano trascurabili, sicché le *sezioni trasversali* possano assimilarsi, senza sensibile errore, a *piani verticali*. Tale ipotesi risulta ben accettabile in quanto valori tipici di pendenza dei corsi d'acqua sono:

- lungo i fondo valle: 1/100;
- lungo i conoidi: 1/1.000;
- lungo le pianure alluvionali: 1/10.000.

Così facendo si possono inoltre prendere le *componenti orizzontali* di spostamento e di velocità al posto di quelle lungo l'ascissa della traiettoria:

$$i_f = -\frac{dz_f}{ds} \approx -\frac{dz_f}{dx} \quad v_s \approx v_x \quad (3.1)$$

### 3.2 Caratteristiche energetiche della corrente in una sezione

Si fissi l'attenzione su una generica sezione trasversale di una corrente. Sia assegnata la geometria della sezione, in modo che l'area  $\Omega$  della parte di essa occupata dalla corrente (area bagnata o area della sezione liquida) possa considerarsi *funzione nota dell'altezza  $y$*  misurata a partire dal punto più basso del contorno:

$$\Omega = \Omega(y) \quad (3.2)$$

Il *carico totale* della corrente vale:

$$H = z_f + y + \alpha \frac{V^2}{2g} = h + h_c \quad (3.3)$$

- carico o quota *geodetica*:  $z_f$ ;
- carico o altezza *piezometrica*:  $y$ ;
- carico o altezza *cinetica*:  $h_c = \alpha V^2 / (2g)$ 
  - $V$ : velocità media nella sezione trasversale:  $V = (\int_{\Omega} v \, d\Omega) / \Omega = Q / \Omega$
  - $\alpha$ : coefficiente di Coriolis; serve a tener conto della non uniforme distribuzione della velocità nella sezione trasversale. Nel seguito si ipotizzerà sempre  $\alpha = 1$ .

Si definisce *energia specifica* della corrente nella sezione considerata il carico totale misurato rispetto al fondo dell'alveo:

$$E = y + \alpha \frac{V^2}{2g} = y + \alpha \frac{Q^2}{2g\Omega^2} = H - z_f \quad (3.4)$$

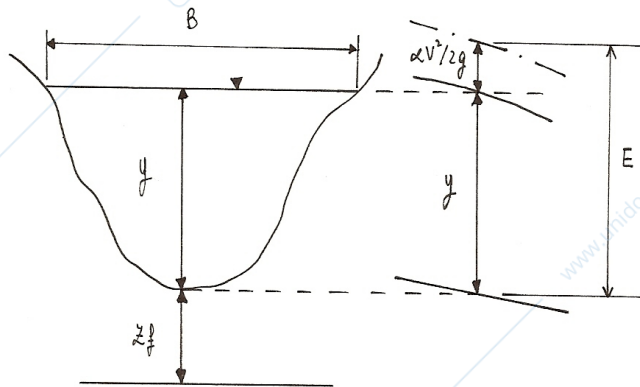


Figura 3.1: Carico totale ed energia specifica.

#### 3.2.1 Portata assegnata

Supponiamo *prefissata la portata  $Q$*  della corrente. Tale portata può muoversi attraverso l'assegnata sezione trasversale per ogni valore dell'altezza  $y$  e quindi dell'area bagnata  $\Omega$  compreso tra lo zero ed il massimo consentito dalla sezione: aumentando  $y$ , e quindi  $\Omega$ , diminuirà la velocità media  $V$  della corrente e viceversa.

Ne risulta che l'energia specifica è una *funzione univoca* dell'altezza  $y$ :

$$E = E(y) \quad (3.5)$$

- Se la profondità  $y$  diminuisce, tendendo a zero, tende a zero l'area  $\Omega$ , aumenta e tende all'infinito la velocità  $V$ , e quindi l'energia specifica  $E$  tende all'infinito.

- Se la profondità  $y$  aumenta, tendendo all'infinito, tende all'infinito l'area  $\Omega$ , diminuisce e tende a zero la velocità  $V$  e quindi il carico cinetico, di conseguenza l'energia specifica  $E$  tende a ridursi alla sola parte piezometrica  $y$ , ma con essa cresce pure indefinitamente.

La curva dell'energia specifica  $E(y)$  deve quindi avere un asintoto coincidente con l'asse delle  $E$  e un altro asintoto obliquo nella retta coincidente con la bisettrice del quadrante, di equazione  $E = y$ . Ne consegue che, essendo la  $E(y)$  positiva, essa deve presentare un *minimo* per un ben determinato valore positivo di  $y$ .

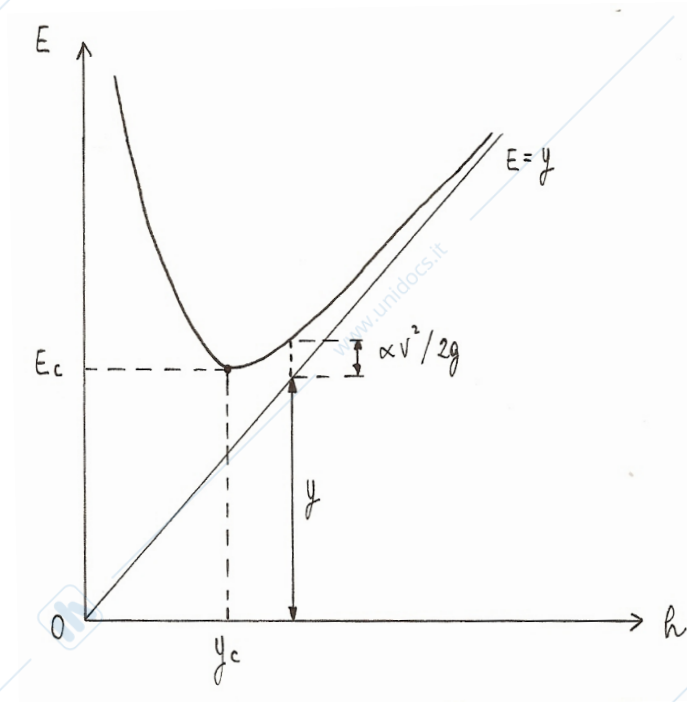


Figura 3.2: Curva dell'energia specifica  $E = E(y)$ .

La *condizione di minimo* si trova imponendo:

$$\frac{dE}{dy} = 1 - 2 \frac{Q^2}{2g\Omega^3} \cdot \frac{d\Omega}{dy} = 0 \quad (3.6)$$

Incrementando di  $dy$  l'altezza  $y$  l'incremento di area bagnata vale  $d\Omega = B \cdot dy + k(dy)^2$  e quindi, a meno di infinitesimi di ordine superiore in  $dy$ , si ha  $d\Omega/dy = B$ , con  $B = B(y)$ .

Il minimo di  $E$  si ha quindi per quel valore di  $y$  per cui risulta:

$$\frac{\Omega^3}{B} = \frac{Q^2}{g} \quad (3.7)$$

Il valore di  $y$  che soddisfa la relazione [3.7](#) viene indicata con  $y_c$  e si dice *altezza critica*.

### Stato critico

Dicesi *altezza critica* di una corrente a pelo libero di assegnata portata  $Q$ , quell'altezza  $y_c$  per cui risulta minima l'energia specifica  $E$  rispetto al fondo dell'alveo.

Dicesi *stato critico* della corrente quella particolare condizione in cui essa viene a trovarsi quando la sua altezza assume valore critico.

Dicesi *velocità critica*  $V_c$  la velocità media corrispondente allo stato critico. Dalla relazione [3.7](#) si ha:

$$V_c^2 = \frac{Q^2}{\Omega_c^2} = g \frac{\Omega_c}{B_c} \quad (3.8)$$

Poiché il rapporto  $y_m = \Omega/B$  rappresenta genericamente la profondità media della corrente ed indicando con  $y_{mc}$  il valore che  $y_m$  assume in corrispondenza dello stato critico, la relazione 3.8 può scriversi come:

$$V_c = \sqrt{g \cdot y_{mc}} \quad (3.9)$$

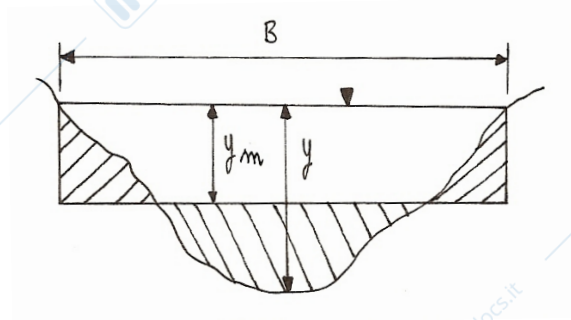


Figura 3.3: Profondità media della corrente.

### Sezioni rettangolari

Nel caso delle sezioni rettangolari la trattazione risulta estremamente semplice dal punto di vista analitico. Si può fare riferimento in questo caso ad una *portata unitaria*, per unità di larghezza dell'alveo:

$$q = \frac{Q}{B} \quad (3.10)$$

Essendo  $\Omega = By$ , si ricava subito dalla 3.7 che:

$$y_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gB^2}} = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} \quad (3.11)$$

e dalla 3.9 essendo in ogni caso  $\Omega/B = y_m = y$ :

$$V_c = \sqrt{g \cdot y_c} \quad (3.12)$$

Il valore minimo dell'energia specifica può infine essere ricavato dalla 3.4:

$$E_{\min} = E_c = y_c + \frac{y_c}{2} = \frac{3}{2}y_c \quad (3.13)$$

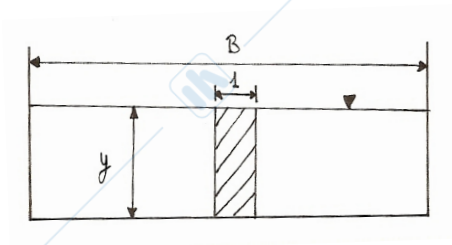


Figura 3.4: Sezione rettangolare.

Nel caso particolare della sezione rettangolare si ha dunque che, in corrispondenza dello stato critico, un carico cinetico pari alla metà dell'altezza della corrente ed un'energia specifica pari a 3/2 della profondità stessa.

### Sezioni di forma generica

Poiché vale la relazione [3.9](#) per una sezione di forma generica si può scrivere:

$$E_c = y_c + \frac{y_{mc}^3}{2} \quad (3.14)$$

### Correnti veloci e correnti lente

Ogni punto della curva  $E(y)$  rappresenta una particolare corrente di portata  $Q$ . Il punto di minimo divide la curva in due tratti.

- il tratto a *sinistra* del punto di minimo rappresenta correnti che hanno un'altezza  $y$  minore dell'altezza critica  $y_c$  e quindi una velocità media  $V$  maggiore della velocità critica  $V_c$ : *correnti veloci*;
- il tratto a *destra* del punto di minimo rappresenta correnti che hanno un'altezza  $y$  maggiore dell'altezza critica  $y_c$  e quindi una velocità media  $V$  minore della velocità critica  $V_c$ : *correnti lente*.

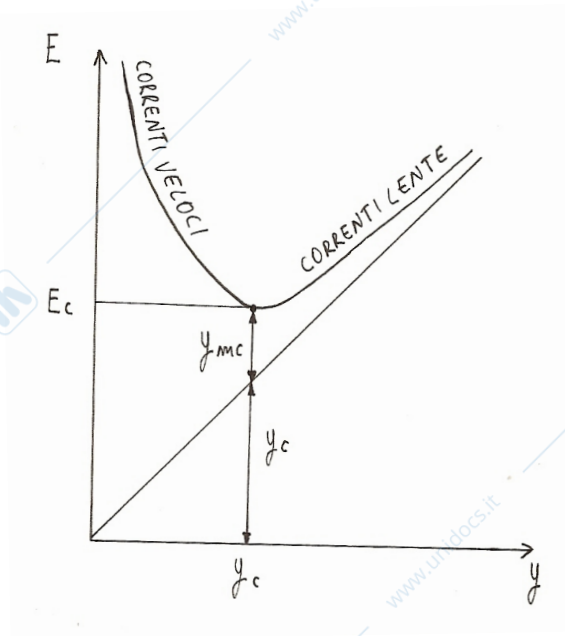


Figura 3.5: Correnti veloci e correnti lente.

### 3.2.2 Energia specifica assegnata

Tutte le considerazioni viste, ed in particolare quelle relative allo stato critico, possono essere anche riprese osservando i fatti da un altro punto di vista. Sempre assegnata la sezione trasversale prefissiamo il valore dell'*energia specifica*  $E$  della corrente, e studiamo come varia la portata  $Q$  al variare dell'altezza  $y$ .

I *limiti di variabilità* della  $y$  sono, in queste condizioni, lo zero e la stessa  $E$ , non potendo il carico piezometrico superare quello totale.

Conviene risolvere l'equazione [3.4](#) rispetto a  $Q$ :

$$Q = \Omega \sqrt{2g(E - y)} \quad (3.15)$$

La portata  $Q$  si annulla in due casi:

1.  $y = 0$ : si annulla l'area  $\Omega$ ;

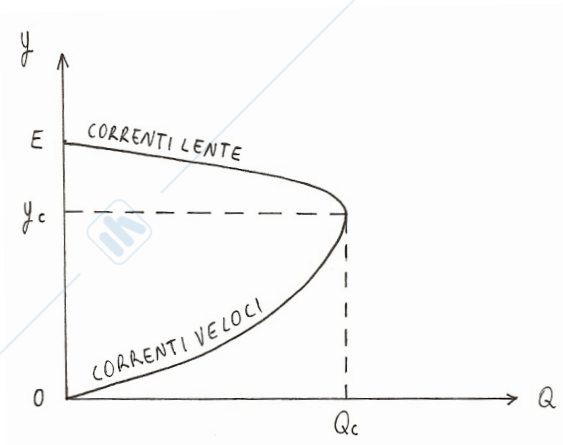


Figura 3.6: Andamento della portata  $Q$  in funzione della profondità  $y$  della corrente.

2.  $y = E$ : si annulla il carico cinetico e quindi la velocità.

Variando  $y$  tra questi due limiti, i valori della portata  $Q$  devono dunque passare per un *massimo*.

Imponendo la *condizione di massimo*:

$$\frac{dQ}{dy} = \sqrt{2g(E-y)} \cdot \frac{d\Omega}{dy} - \frac{g\Omega}{\sqrt{2g(E-y)}} = 0 \quad (3.16)$$

e moltiplicando ambo i membri per  $\sqrt{2g(E-y)}$  (che è non nullo in quanto sicuramente la soluzione non è  $y = E$ ) e ricordando che  $d\Omega/dy = B$ , si ottiene:

$$y = E - \frac{\Omega}{2B} = E - \frac{y_m}{2} \quad (3.17)$$

Ma si riconosce dalla [3.14](#) che questa condizione si ha proprio in corrispondenza dello *stato critico*; e si trova quindi che la portata massima compatibile con l'assegnata energia specifica  $E$  si ha proprio quando  $y = y_c$ .

Ne consegue una *seconda definizione* dell'altezza critica: dicesi *altezza critica* di una corrente di assegnata energia specifica  $E$  rispetto al fondo dell'alveo, quell'altezza a cui corrisponde il massimo valore della portata.

### Sezioni rettangolari

Nel caso particolare di sezioni rettangolari ( $y_m = y$  e  $\Omega = By$ ), l'altezza critica vale:

$$y_c = E - \frac{y_c}{2} = \frac{2}{3}E \quad (3.18)$$

e il *valore massimo della portata*:

$$Q_{\max} = Q_c = By_c \sqrt{gy_c} = \frac{2}{3\sqrt{3}} BE \sqrt{2gE} \quad (3.19)$$

## Esempio di sezione trapezia

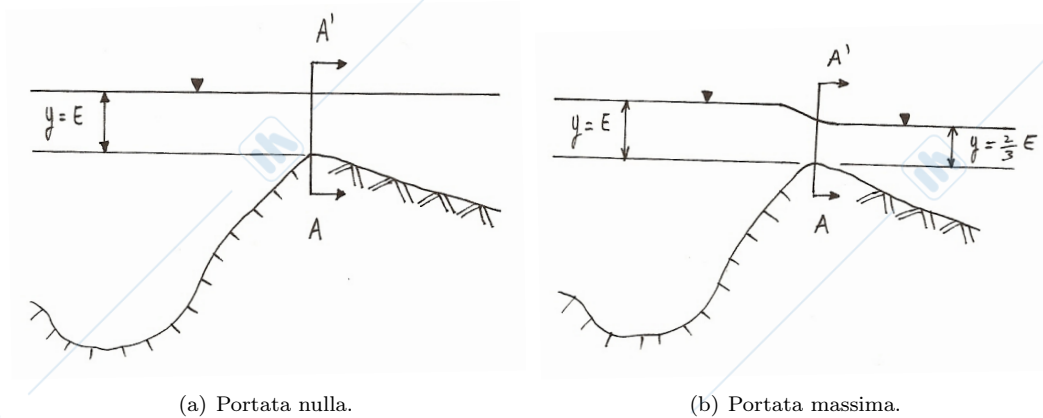


Figura 3.7: Esempio di energia specifica fissata.

Consideriamo un lago con all'interno dell'acqua ferma, dalla cui sponda esce un canale che si porta via dell'acqua. Si vuole valutare la portata in uscita nei casi in cui:

- il canale s'immette in un altro lago avente la stessa profondità riferita alla sezione dell'incile;
- il canale va verso valle senza nulla che faccia aumentare l'altezza della sezione.

Il canale è a sezione trapezia isoscele con  $B_0 = 5$  m ed  $m = 2$ , l'altezza della corrente nel lago è pari a  $y = E = 2$  m rispetto al livello zero definito dall'incile. Nel primo caso il livello energetico è

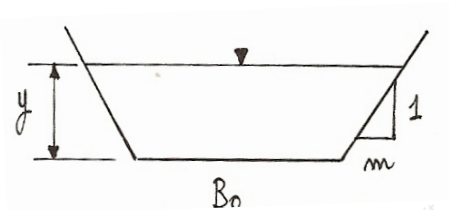


Figura 3.8: Sezione A-A'.

assegnato  $y = E$  ed è costante. La portata è quindi nulla.

Nel secondo caso la corrente si adatta alla profondità che preferisce, arriva quindi all'altezza critica:

$$y_c = E - \frac{y_{mc}}{2}$$

Sostituendo al posto di  $y_{mc}$  l'espressione dell'altezza media si ottiene un'equazione non lineare in  $y_c$  che può essere risolta, ad esempio, per tentativi:

$$y_c = E - \frac{1}{2} \cdot \frac{B_0 y_c + m y_c^2}{B_0 + 2m y_c} = 1,45 \text{ m} \quad (3.20)$$

Una volta ricavata l'altezza critica  $y_c$  la portata si calcola mediante la relazione:

$$Q_c = \Omega \sqrt{2g(E - y_c)} = (B_0 y_c + m y_c^2) \sqrt{2g(E - y_c)} = 37,63, \text{ m}^3/\text{s}$$

### 3.3 Alvei a debole pendenza e a forte pendenza

Finora ci si è limitati all'esame delle relazioni esistenti tra l'altezza d'acqua, l'energia specifica e la portata per una assegnata sezione trasversale. Si vuole ora estendere l'osservazione ad un *tratto di alveo di lunghezza finita*, abbracciante la sezione stessa.

#### 3.3.1 Ipotesi di moto uniforme

Viene formulata l'ipotesi che la corrente si muova di moto uniforme, ossia un moto in cui le *condizioni idrauliche* che si trovano in una sezione sono le stesse di quelle che si trovano in qualsiasi altra. Affinché ciò avvenga la *forma della sezione* deve essere sempre uguale e la *pendenza del fondo* deve essere costante, quindi il canale deve essere di tipo *prismatico* o *cilindrico*.

#### Caratterizzazione idraulica del moto uniforme

In condizioni di moto uniforme la velocità media  $V$  è legata alle caratteristiche dell'alveo (pendenza, scabrezza, forma della sezione trasversale) e della corrente (profondità, area bagnata, raggio idraulico) dalla *legge del moto uniforme*, che di norma si esprime attraverso la *legge di Chézy*:

$$V_0 = \chi \sqrt{R \cdot i_f} \quad (3.21)$$

dove:

- $\chi$ : *indice di scabrezza* avente le dimensioni della radice di una accelerazione [ $L^{1/2}T^{-1}$ ], ne consegue che i coefficienti che compaiono nelle formule che la definiscono hanno un valore che dipende dal sistema di riferimento adottato;
- $i_f$ : pendenza del fondo (al posto della cadente  $J$ );
- $R$ : raggio idraulico, nel caso di *sezione trasversale rettangolare*:

$$R = \frac{\Omega}{P} = \frac{By}{B + 2y} = \frac{y}{1 + 2y/B} \quad (3.22)$$

La relazione di Chézy può anche essere scritta con l'indice di scabrezza in *forma adimensionale*:

$$V_0 = C \sqrt{g \cdot R \cdot i_f} \quad (3.23)$$

- $C$ : *indice di scabrezza adimensionale*.

La definizione del coefficiente  $C$  avviene per mezzo di formule empiriche (Bazin, Kutter, Strickler, ...), che lo pongono in relazione con un altro indice di scabrezza e con il raggio idraulico, formule valide per le situazioni di *moto puramente turbolento* (come è quello nei canali).

#### 3.3.2 Pendenza critica per sezioni rettangolari larghe

Consideriamo il caso semplice della sezione rettangolare molto larga, per il quale, essendo  $B \gg y$  allora si può porre  $R \approx y$ . Si vuole calcolare in questo caso il valore della pendenza critica  $i_c$ .

La relazione di Chézy può essere scritta in termini di portata unitaria:

$$q = V_0 \cdot y = yC \sqrt{gyi_f} \quad (3.24)$$

da questa è possibile ricavare la *profondità del moto uniforme*:

$$y_0 = \sqrt[3]{\frac{q^2}{gC^2i_f}} \quad (3.25)$$

ed uguagliandola all'altezza critica fornita dalla 3.11 si ricava il *valore della pendenza critica*:

$$i_c = \frac{1}{C^2} \quad (3.26)$$

Si presentano due possibilità:

- $i_f < i_c$ : alvei a debole pendenza ( $y_0 > y_c$ )  $\rightarrow$  correnti uniformi lente ( $V_0 < V_c$ );
- $i_f > i_c$ : alvei a forte pendenza ( $y_0 < y_c$ )  $\rightarrow$  correnti uniformi veloci ( $V_0 > V_c$ ).

Si noti come la pendenza critica dipenda dalla portata ed in particolare diminuisca al crescere di essa. Per rendere evidente questo fatto si consideri la formula del moto uniforme di *Gauckler-Strickler*<sup>1</sup> ossia la formula di Chézy con indice di scabrezza calcolato secondo Gauckler e Strickler:

$$V_0 = K_s R^{2/3} i_f^{1/2} \quad (3.27)$$

Confrontandola, mediante rapporto con la formula di Chézy con coefficiente di scabrezza adimensionale, si ottiene l'espressione dell'indice di scabrezza secondo Gauckler e Strickler:

$$1 = \frac{C\sqrt{gR}}{K_s R^{2/3}} \Rightarrow C = \frac{K_s R^{2/3}}{\sqrt{g}} R^{-1/2} = \frac{K_s}{\sqrt{g}} R^{1/6} \quad (3.28)$$

Se la portata è piccola il raggio idraulico è piccolo, per la relazione [3.28](#) il coefficiente adimensionale di Chézy è anch'esso piccolo e quindi  $i_c$  è grande. Ciò significa che un alveo di assegnata pendenza  $i_f$  può essere a debole pendenza (corrente lenta) per piccole portate e a forte pendenza (corrente veloce) per portate maggiori.

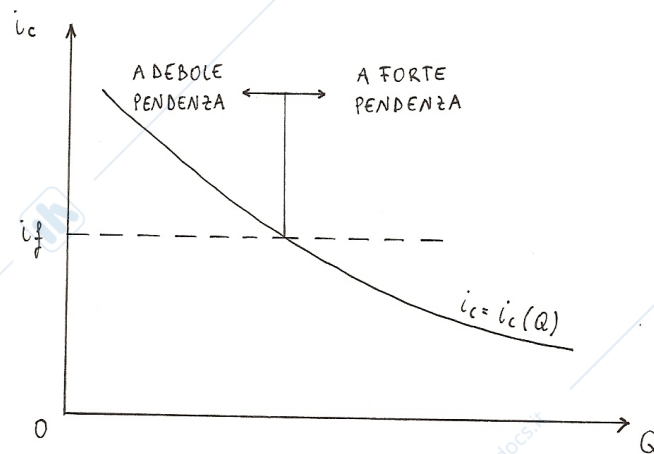


Figura 3.9: Relazione tra pendenza critica e portata.

Considerando un campo di variabilità di  $C$  tra 7 e 20 si ottengono valori della pendenza critica dell'ordine di  $10^{-2}$  e quindi nelle situazioni pratiche si devono considerare sia alvei a forte che a debole pendenza.

<sup>1</sup>Del tutto identica alla formula di Gauckler-Strickler è la *formula di Manning*, la più diffusa fra i tecnici anglo-americani: sola differenza è che in luogo di  $K_s$  vi compare il suo inverso  $K_s = 1/n$ , i cui valori, almeno nell'originaria tabellazione, erano riferiti al sistema di misura inglese.

### 3.4 Carattere cinematico dei due tipi di corrente

Lo stato critico delle correnti a pelo libero è stato individuato sulla base di *considerazioni energetiche*. La distinzione fra correnti lente e correnti veloci non è tuttavia una semplice *definizione analitica*, bensì è proprio la *diversità di comportamento fisico* dei due tipi di correnti che è tale da giustificare la distinzione.

La differenza sta soprattutto nelle modalità con cui si propagano le *perturbazioni di livello*: si riconosce che la *celerità di propagazione* delle piccole perturbazioni è superiore alla *velocità del movimento* nelle correnti lente, inferiore invece nelle correnti veloci.

#### 3.4.1 Celerità di propagazione delle perturbazioni di livello

Si abbia una corrente in un alveo rettangolare, supponiamo il moto uniforme (ipotesi comunque non necessaria) di altezza  $y_0$  e velocità media  $V_0$ . Ad esso si sovrapponga un'onda positiva di altezza  $\delta$ , sicché dopo il passaggio del suo fronte l'altezza risulti  $y_1 = y_0 + \delta$ .

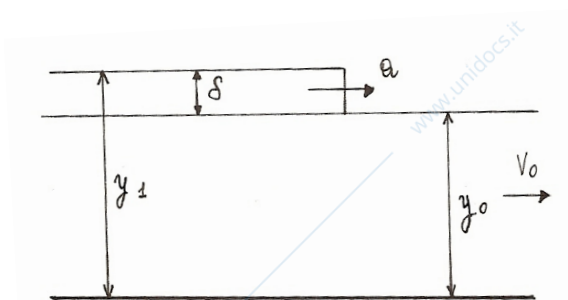


Figura 3.10: Propagazione di una perturbazione di livello.

Si definisce *celerità assoluta*  $a$  della perturbazione la velocità con cui il fronte d'onda avanza rispetto all'alveo fisso; si definisce *celerità relativa*  $c = a - V_0$  la velocità con cui la perturbazione si propaga rispetto alla corrente di base, di velocità  $V_0$ .

Si può facilmente dimostrare che, se si considera un  $\delta$  infinitesimo, vale la seguente *espressione di Lagrange*:

$$c = \pm \sqrt{gy} \quad (3.29)$$

Confrontiamo ora il valore della *celerità*  $c$  trovata per le perturbazioni infinitesime con quello della *velocità iniziale*  $V$  della corrente.

#### Correnti lente

Se la corrente è lenta la velocità  $V$  è, per definizione, inferiore alla velocità critica, mentre l'altezza  $y$  è maggiore dell'altezza critica  $y_c$ . Confrontando l'espressione di Lagrange per  $c$  con la [3.12](#) si ha che:

$$V < \sqrt{gy_c} < \sqrt{gy} = |c| \quad (3.30)$$

La celerità di propagazione delle piccole perturbazioni in una corrente lenta è maggiore della velocità della corrente.

Ne consegue che le piccole perturbazioni provocate in una corrente lenta possono non solo propagarsi lungo l'alveo verso valle, con celerità assoluta  $a = V + \sqrt{gy} > 0$ , ma anche verso monte, con celerità assoluta  $a = V - \sqrt{gy} < 0$ .

Immergendo verticalmente un bastone in una corrente lenta si forma attorno al punto di immersione un'onda circolare che si espande sempre circolarmente ma contemporaneamente il suo centro si sposta verso valle con la corrente, ossia con velocità  $V$ : il fronte d'onda riesce però a propagarsi anche verso monte, seppur con celerità minore che verso valle.

### Correnti veloci

Se la corrente è veloce la velocità  $V$  è, per definizione, superiore alla velocità critica, mentre l'altezza  $y$  è minore dell'altezza critica  $y_c$ . Confrontando l'espressione di Lagrange per  $c$  con la 3.12 si ha che:

$$V > \sqrt{gy_c} > \sqrt{gy} = |c| \quad (3.31)$$

La celerità di propagazione delle piccole perturbazioni in una corrente veloce è minore della velocità della corrente.

Ne consegue che le piccole perturbazioni provocate in una corrente veloce non possono che propagarsi verso valle, in quanto anche quelle che rimontano la corrente con celerità relativa  $c = -\sqrt{gy}$  presentano rispetto all'alveo una celerità assoluta  $a = V - \sqrt{gy} > 0$ , e si propagano quindi verso valle.

*Immergendo verticalmente un bastone* in una corrente veloce la velocità con cui il centro dell'onda circolare segue la corrente è superiore alla celerità  $c$ , e quindi anche il fronte dell'onda diretto contro corrente è costretto a spostarsi verso valle. Ne derivano, per involuppo delle successive posizioni assunte dall'onda circolare, due *fronti d'onda* rettilinei.

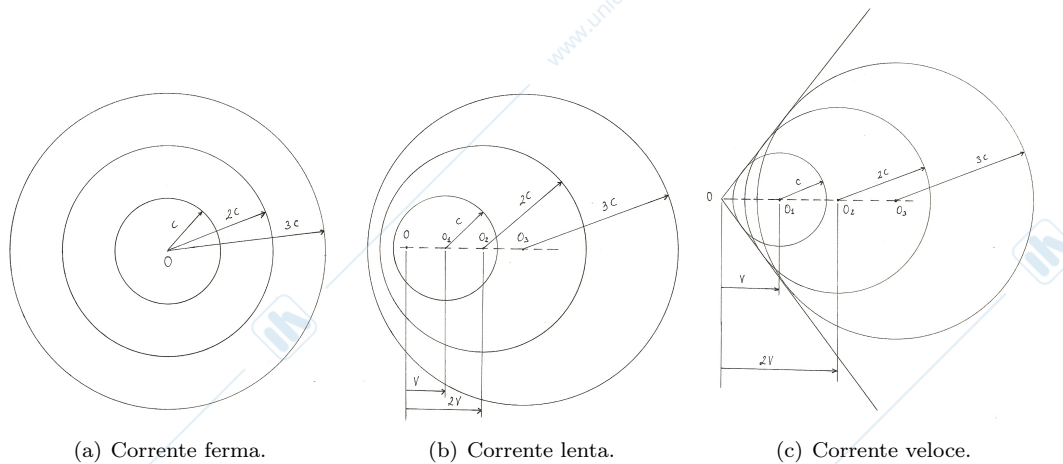


Figura 3.11: Propagazione di piccole perturbazioni.

### 3.4.2 Numero di Froude

Le osservazioni appena fatte possono essere a base di un facile criterio pratico distintivo dei due tipi di corrente.

Si definisce *numero di Froude* il rapporto tra la velocità della corrente e la celerità delle piccole perturbazioni:

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gy}} \quad (3.32)$$

- $Fr < 1$ : correnti lente;
- $Fr > 1$ : correnti veloci;
- $Fr = 1$ : stato critico.

Si noti come quanto dimostrato per gli alvei rettangolari sia valido anche per gli *alvei con sezione trasversale di forma qualsiasi*, sostituendo alla  $y$  l'altezza media  $y_m$  e ricordando che per essi la velocità critica vale  $\sqrt{gy_{mc}}$ .

Dal momento che il tipo di corrente costituisce la *condizione al contorno* per la valutazione dei *profili di moto permanente*, in quanto, come si vedrà nel seguito, nel caso di corrente lenta la condizione è determinata dal livello di valle mentre nel caso di corrente veloce la condizione è determinata dal livello di monte, ne deriva che nei due casi si hanno dei profili di aspetto totalmente diverso.

### 3.5 Correnti in moto permanente. Profili del pelo libero

Consideriamo una corrente in *moto permanente* con le sole condizioni che la *pendenza sia piccola* e le *variazioni di sezione piuttosto gradual*i, sicché la corrente stessa possa considerarsi lineare.

La *condizione di moto permanente* equivale a considerare nulle tutte le variazioni rispetto al tempo (ossia  $\partial/\partial t = 0$ ). Tuttavia se tali variazioni sono molte lente (ossia  $\partial/\partial t \approx 0$ ) è possibile comunque analizzare approssimativamente il moto come una *successione di moti permanenti*.

Le *caratteristiche geometriche* possono essere invece funzione dello spazio (ossia  $y = y(x)$ ) così come quelle *dinamiche* (ossia  $V = V(x)$ ,  $Q = Q(x)$ ).

#### Principio di conservazione della massa

Isoliamo un tronco di alveo di lunghezza  $\Delta x$  compreso tra le sezioni 1 e 2.

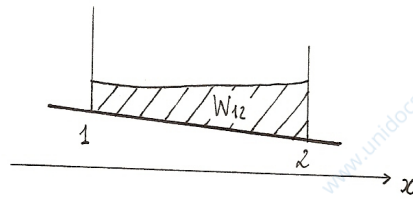


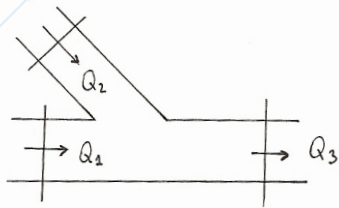
Figura 3.12: Tronco di alveo.

Applicando il principio di conservazione della massa o principio di continuità si ha che:

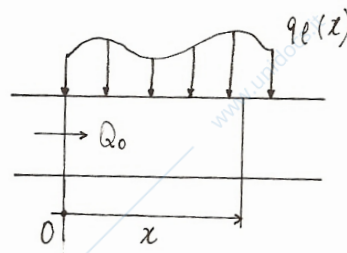
$$\frac{dW_{12}}{dt} = Q_1 - Q_2 \quad (3.33)$$

Poiché si è in condizioni di moto permanente il termine a sinistra della relazione 3.33 è nullo e deve quindi essere:

$$Q_1 = Q_2 \implies Q = \text{cost} \quad (3.34)$$



(a) Nodo.



(b) Afflusso continuo.

Figura 3.13: Variazioni di portata.

L'unico caso in cui si può avere una variazione di portata tra le due sezioni 1 e 2 si ha in presenza di afflussi o deflussi nel tratto considerato. Esistono due tipi di afflussi/deflussi:

1. *nodo*:

$$Q_3 = Q_1 + Q_2 \quad (3.35)$$

2. *afflusso/deflusso continuo*:

$$Q(x) = Q_0 + \int_0^x q_l(\eta) d\eta \quad (3.36)$$

L'andamento della portata sezione per sezione è quindi noto in ogni caso.

### Principio di conservazione dell'energia

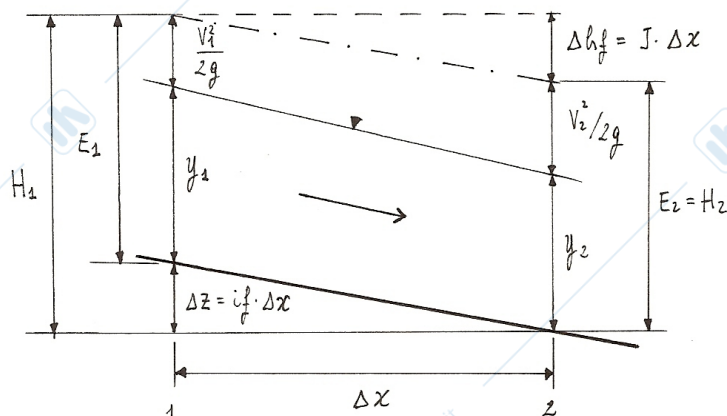


Figura 3.14: Applicazione del principio di conservazione dell'energia.

Lungo il tronco isolato l'*abbassamento del fondo* vale (nell'ipotesi che la pendenza sia piccola):

$$\Delta z = i_f \cdot \Delta x \quad (3.37)$$

l'*abbassamento della linea dei carichi totali* vale:

$$\Delta h_f = J \cdot \Delta x \quad (3.38)$$

essendo  $J$  la *cadente*, ossia la perdita di carico per unità di lunghezza.

Il pelo dell'acqua, ossia la *linea piezometrica*, potrà essere discendente o ascendente nel senso del moto, anche rispetto all'orizzontale.

Applicando il principio di conservazione dell'energia tra le sezioni 1 e 2 si ha quindi:

$$H_1 = H_2 + \Delta h_f \implies \underbrace{\Delta z + y_1 + \frac{V_1^2}{2g}}_{E_1} = \underbrace{y_2 + \frac{V_2^2}{2g}}_{E_2} + \Delta h_f \quad (3.39)$$

Da cui si ottiene:

$$\frac{E_2 - E_1}{\Delta x} = i_f - J \quad (3.40)$$

#### 3.5.1 Equazione differenziale del profilo del pelo libero

Se la lunghezza del tronco di alveo isolato tende a zero ( $\Delta x \rightarrow 0$ ) allora si ottiene l'equazione differenziale del profilo del pelo libero di una corrente gradualmente variata in moto permanente:

$$\frac{dE}{dx} = i_f - J \quad (3.41)$$

Con questa equazione si esprime il fatto che l'energia specifica totale rispetto al fondo aumenta per l'abbassamento del fondo stesso e diminuisce per effetto delle resistenze.

Tenuta presente la definizione di  $E$  è possibile scrivere:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{Q^2}{g\Omega^3} \frac{d\Omega}{dx} = i_f - J \quad (3.42)$$

Sempre per un alveo del tutto generico, l'area  $\Omega$  della sezione bagnata può variare non soltanto perchè varia  $y$  ma anche con la  $x$  possono variare forma e le dimensioni della sezione trasversale, quindi considerando che  $\Omega = \Omega(x, y(x))$  si ha:

$$\frac{d\Omega}{dx} = \frac{\partial \Omega}{\partial x} \Big|_{y=\text{cost}} + \frac{\partial \Omega}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial \Omega}{\partial x} \Big|_{y=\text{cost}} + B \frac{dy}{dx} \quad (3.43)$$

La forma più generale dell'equazione differenziale del profilo del pelo libero di una corrente gradualmente variata in moto permanente con portata costante risulta quindi:

$$\frac{dy}{dx} \left( 1 - \frac{Q^2}{g\Omega^3} B \right) - \frac{Q^2}{g\Omega^3} \frac{\partial \Omega}{\partial x} = i_f - J \quad (3.44)$$

Tale equazione risulta integrabile per qualsiasi tipo di alveo solamente con *metodi numerici* (metodi spettrali, metodi alle differenze).

Si noti come  $\Omega$  e  $B$  siano funzione nota di  $x$  e  $y$ . Nel caso particolare che l'alveo sia cilindrico si annulla l'ultimo addendo del primo membro e sia  $\Omega$  che  $B$  restano funzioni note della sola  $y$ .

### Alvei cilindrici

Si vuole ora trarre dalla [3.41](#) indicazioni qualitative circa l'andamento dei possibili profili di moto permanente nel caso di alvei cilindrici, per cui la  $E$  risulta funzione di  $x$  per il tramite della sola  $y$ , ossia  $E = E(y(x))$ ; si ha quindi:

$$\frac{dE}{dx} = \frac{dE}{dy} \frac{dy}{dx} \quad (3.45)$$

Si trae dalla [3.41](#)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{i_f - J}{\frac{dE}{dy}} \quad (3.46)$$

Studiando il segno della funzione fratta è possibile valutare l'andamento della profondità della corrente in funzione di  $x$  e quindi, di fatto, il profilo del pelo libero.

Per quanto riguarda il *denominatore* si è già visto che:

- $y < y_c$  (correnti veloci):  $dE/dy < 0$ ;
- $y > y_c$  (correnti lente):  $dE/dy > 0$ ;
- $y = y_c$  (correnti critiche):  $dE/dy = 0$ .

Per quanto riguarda il *numeratore* esso si annulla in condizioni di moto uniforme, in quanto in questo caso la linea dei carichi totali risulta parallela al fondo ( $i_f = J$ ) e si ha di conseguenza  $dy/dx = 0$ , che è appunto la definizione di moto uniforme. Accettando poi per la perdita di carico unitaria l'espressione:

$$J = \frac{V^2}{C^2 g R} = \frac{Q^2}{C^2 g R \Omega^2} \quad (3.47)$$

si riconosce che essa è tanto più piccola quanto maggiore è  $y$  (con  $y$  crescono tutti i fattori del denominatore) e quindi:

- $y < y_0$ :  $i_f - J < 0$ ;
- $y > y_0$ :  $i_f - J > 0$ ;
- $y = y_0$ :  $i_f - J = 0$ .

Convieni ora studiare separatamente quel che può avvenire negli alvei a debole e forte pendenza.

### 3.5.2 Alvei a debole pendenza

Assegnata la portata è possibile ricavare l'altezza del moto uniforme  $y_0$  dalla relazione di Chézy (relazione 3.25 per sezioni rettangolari larghe) e l'altezza critica  $y_c$  dalla relazione 3.7 (relazione 3.11 nel caso di sezioni rettangolari larghe), si troverà  $y_0 > y_c$ .

Tracciamo allora due rette parallele al fondo e distanti da esso rispettivamente  $y_c$  e  $y_0$  (quest'ultima corrisponde al profilo del moto uniforme). Queste due rette ed il fondo dell'alveo delimitano 3 zone, entro ognuna delle quali può svilupparsi un profilo di moto permanente.

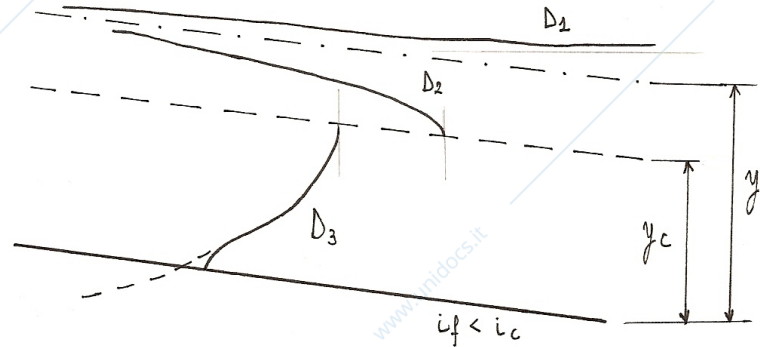


Figura 3.15: Profili del pelo libero: alvei a debole pendenza.

#### Profilo D1 - profilo di rigurgito

Per  $y > y_0 > y_c$  si ha una corrente lenta con altezza superiore a quella del moto uniforme. Sia il numeratore che il denominatore della 3.41 sono positivi e quindi  $dy/dx > 0$ , il che significa che la corrente è *ritardata*.

Se ci si spinge *verso monte* si trovano valori di  $y$  decrescenti e quindi sempre più prossimi ad  $y_0$ ; anche la pendenza del profilo tende a  $i_f$ : il moto uniforme viene raggiunto asintoticamente verso monte.

Se ci si spinge *verso valle* si trovano valori di  $y$  crescenti e, teoricamente, possono tendere all'infinito; la resistenza tende con ciò ad annullarsi ed il denominatore del secondo membro della 3.41 tende ad  $i_f$ ; il denominatore invece tende all'unità come si riconosce dal fatto che la  $E(y)$  ha un asintoto nella bisettrice del primo quadrante:  $dy/dx$  tende a  $i_f$ , il che significa che il profilo tende a *disporsi orizzontalmente*, in quanto il pelo dell'acqua si solleva rispetto al fondo di altrettanto di quanto il fondo si abbassa rispetto all'orizzontale.

#### Profilo D2 - profilo di richiamo

Per  $y_0 > y > y_c$  si ha una corrente lenta con altezza inferiore a quella del moto uniforme. Il numeratore della 3.41 risulta negativo mentre il denominatore risulta positivo e quindi  $dy/dx < 0$ , il che significa che la corrente è *accelerata*.

Se ci si spinge *verso monte* si trovano valori di  $y$  crescenti e quindi tendenti ad  $y_0$ , valore che viene raggiunto in via asintotica.

Se ci si spinge *verso valle* si trovano valori di  $y$  decrescenti e quindi tendenti a  $y_c$  e il profilo raggiunge lo stato critico con tangente verticale.

#### Profilo D3

Per  $y_0 > y_c > y$  la corrente risulta veloce: si è di fronte ad una corrente veloce in un alveo a debole pendenza. Sia il numeratore che il denominatore della 3.41 sono negativi e quindi  $dy/dx > 0$ , il che significa che la corrente è *ritardata*.

Se ci si spinge *verso valle* le altezze  $y$  crescono e tendono a  $y_c$ , altezza che il profilo teorico raggiungerebbe con tangente verticale: il profilo è quindi ascendente non solo rispetto al fondo ma anche rispetto all'orizzontale.

Se ci si spinge *verso monte* le altezze  $y$  decrescono: il profilo teorico, dopo aver tagliato il fondo dell'alveo, presenterebbe valori di  $y$  negativi, privi ovviamente di significato fisico: con ragionamento analogo a quello svolto per il profilo D1 si riconoscerebbe l'esistenza di un asintoto orizzontale.

Per riconoscere l'effettivo andamento del profilo *in prossimità del fondo*, occorre nella [3.41](#) esplicitare la  $J$ . Supponendo per semplicità l'alveo rettangolare molto largo ( $R \approx y$ ), adottando l'espressione di Gauckler-Strickler per il coefficiente  $C$ :

$$J = \frac{q^2}{C^2 y^3 g} = \frac{q^2}{K_s^2 y^{10/3}} \quad (3.48)$$

ricordando inoltre che:

$$\frac{dE}{dy} = 1 - \frac{q^2}{gy^3}$$

risulta:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{i_f - \frac{q^2}{K_s^2 y^{10/3}}}{1 - \frac{q^2}{gy^3}}$$

Per  $y$  tendente a zero il numeratore è infinito di ordine  $10/3$ , mentre il denominatore è infinito di ordine  $3$ ; la frazione tende quindi all'infinito, ed il *profilo si dispone verticale*.

### 3.5.3 Alvei a forte pendenza

Per un'assegnata portata l'altezza del moto uniforme risulta inferiore all'altezza critica:  $y_0 < y_c$ .

Si tracciano le rette  $y = y_0$  (profilo del moto uniforme) e  $y = y_c$ , che delimitano, col fondo dell'alveo, 3 zone, entro ciascuna delle quali può svolgersi un profilo di moto permanente.

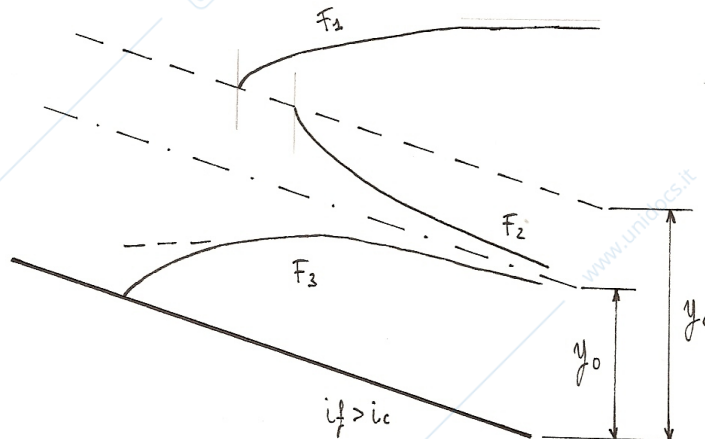


Figura 3.16: Profili del pelo libero: alvei a forte pendenza.

#### Profilo F1

Per  $y > y_c > y_0$  si ha una *corrente lenta*, la sola corrente lenta possibile in alveo a debole pendenza. Sia il numeratore che il denominatore della [3.41](#) sono positivi e quindi si ha  $dy/dx > 0$ .

Se ci si spinge *verso monte* si trovano valori decrescenti delle  $y$ , che tendono al valore critico  $y_c$ , il quale viene raggiunto con *tangente verticale*: il profilo risulta dunque *ascendente rispetto al fondo*.

Se ci si spinge *verso valle*, per profondità crescenti teoricamente fino all'infinito, una ragionamento identico a quello svolto per il profilo D1 porta a riconoscere l'esistenza di un *asintoto orizzontale*.

**Profilo F2**

Per  $y_c > y > y_0$  si ha una corrente veloce, con altezza maggiore di quella del moto uniforme. Il numeratore della [3.41](#) ha il numeratore positivo ma il denominatore negativo e quindi  $dy/dx < 0$  ed il moto risulta *accelerato*.

Se ci si spinge *verso monte* le  $y$  tendono a  $y_c$  che il profilo raggiunge con *tangente verticale*.

Se ci si spinge *verso valle* le  $y$  decrescono e tendono a  $y_0$  mentre la pendenza del profilo tende a  $i_f$  ( $dy/dx \rightarrow 0$ ); il moto uniforme viene ripristinato asintoticamente verso valle.

**Profilo F3**

Per  $y_c > y_0 > y$  la corrente è ancora veloce e la sua altezza è inferiore a quella del moto uniforme. Numeratore e denominatore della [3.41](#) sono entrambi negativi e quindi  $dy/dx > 0$ : moto *ritardato*.

Se ci si spinge *verso valle* per  $y$  crescenti si tende asintoticamente al moto uniforme; la pendenza del profilo tende pure a quella del moto uniforme, sicché il profilo, pur riguardando una corrente ritardata risulta discendente rispetto all'orizzontale.

Se ci si spinge *verso monte* il profilo teorico, dopo aver attraversato il fondo, presenterebbe valori di  $y$  negativi, crescenti in valore assoluto, e col solito ragionamento si riconoscerebbe una tendenza ad un asintoto orizzontale.

**3.5.4 Osservazioni generali**

Dal confronto dei 6 profili di moto permanente è possibile trarre qualche conclusione di carattere generale.

- Alvei a *debole pendenza*: il moto uniforme, che è di corrente lenta, viene sempre raggiunto asintoticamente verso monte.  
Infatti una *perturbazione* (scostamento dal moto uniforme), originata in una sezione qualsiasi di una corrente lenta, può risalire lungo l'alveo fino all'infinito a monte.
- Alvei a *forte pendenza*: il moto uniforme, che è di corrente veloce, viene raggiunto asintoticamente verso valle.  
Infatti una *perturbazione*, originata in una sezione qualsiasi di una corrente veloce, non può che propagarsi verso valle.
- Allo *stato critico* si tende *sempre*:
  - verso valle: alvei a debole pendenza;
  - verso monte: alvei a forte pendenza.
- Dei 6 profili 4 corrispondono a correnti ritardate, mentre 2 a correnti accelerate (questi ultimi si svolgono nell'intervallo di altezze comprese fra quella critica e quella del moto uniforme, indipendentemente dalla pendenza dell'alveo).

**3.5.5 Tracciamento quantitativo dei profili di moto permanente**

Si è visto come i profili di moto permanente siano analiticamente rappresentabili a mezzo di una ODE del I ordine. Per poterla risolvere è necessario definire una condizione al contorno: si impone la condizione che in una determinata sezione  $x^*$  si abbia una determinata altezza  $y^*$ :

$$y(x^*) = y^* \quad (3.49)$$

Tale condizione va ricercata in corrispondenza della *causa perturbatrice*, che provoca, in una certa sezione, un'altezza  $y$  diversa da quella di moto uniforme: tale altezza andrà stabilita in base *al modo di agire* della causa perturbatrice. Si noti come la causa perturbatrice possa esercitare la propria *influenza*:

- *verso monte* soltanto se la corrente è *lenta* (o diventa lenta per causa sua): se la corrente è veloce infatti le perturbazioni si propagano con celerità relativa inferiore alla velocità della corrente e quindi non possono risalire l'alveo;

- verso valle soltanto se la corrente è *veloce* (o diventa veloce per causa sua): si può dimostrare per assurdo.

Sulla base di queste considerazioni si può affermare che la condizione al contorno per la precisazione dell'integrale particolare dell'equazione del profilo, e quindi il *punto di partenza* per il materiale tracciamento del profilo stesso, va ricercata:

- all'estremo a *valle* se la corrente è *lenta*;
- all'estremo a *monte* se la corrente è *veloce*.

In questa sezione estrema dovrà quindi ritenersi nota l'altezza  $y^*$  determinata dalla causa perturbatrice e quindi sarà noto anche il dislivello  $y^* - y_0$  rispetto al moto uniforme.

### Metodo alle differenze finite

Per il tracciamento per punti del profilo di moto permanente conviene scrivere l'equazione differenziale del profilo del pelo libero sostituendo incrementi finiti ai differenziali:

$$\Delta x = \frac{\Delta E}{i_f - J} \quad (3.50)$$

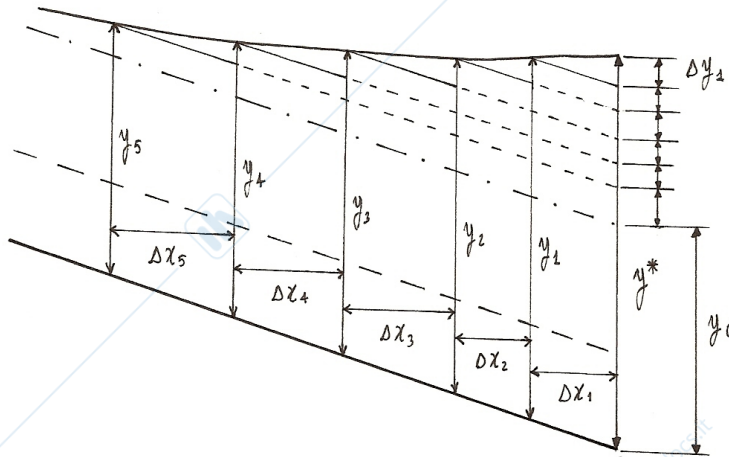


Figura 3.17: Metodo alle differenze finite per il tracciamento dei profili di moto permanente.

1. Si suddivide l'altezza del rigurgito  $y^* - y_0$  in un sufficiente numero di parti  $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$  (non necessariamente uguali, anzi col criterio di adattare la fittezza della suddivisione all'andamento del profilo cercato, che almeno qualitativamente è noto a priori).
2. Per ciascuna delle altezze  $y_i$  estreme dei singoli intervalli  $\Delta y_i$  si possono calcolare a mezzo della [3.4](#) (o dedurre dal grafico della curva dell'energia specifica) le corrispondenti energie specifiche  $E_i$ ; quindi le differenze  $\Delta E_i$  spettanti a ciascun intervallo, a partire dal più vicino alla causa perturbatrice.
3. Mentre la  $i_f$  è nota, la cadente  $\bar{J}_i$  da attribuire al singolo intervallo viene determinata adottando la formula di Gauckler-Strickler (relazione [3.48](#)) nel caso di sezioni rettangolari larghe) e facendo la media aritmetica delle  $J$  riferite agli estremi dell'intervallo.
4. Mediante la [3.50](#) si calcola la differenza  $\Delta x_i$ , cioè la lunghezza del tronco di corrente lungo la quale l'altezza varia di  $\Delta y_i$ .

Si noti come questo procedimento, pur essendo stato esposto con implicito riferimento agli alvei cilindrici (i soli per i quali si possa parlare di moto uniforme), sia *valido in generale*. Per un esempio numerico si veda l'esercizio [3.14.1](#)

### 3.6 Passaggio attraverso lo stato critico. Il risalto

Per semplicità consideriamo solamente il caso di *alvei cilindrici*, formati da *tratti a pendenza costante*.

Ci si chiede se è possibile il *passaggio graduale*, cioè con *profilo continuo*, attraverso lo stato critico e in caso affermativo in quali circostanze esso possa avvenire.

#### 3.6.1 Passaggio da corrente lenta a corrente veloce

Una corrente che da lenta tenda a diventare veloce dovrà essere *accelerata*, in modo da raggiungere lo stato critico verso valle con altezze via via decrescenti: il solo profilo di corrente lenta che possa soddisfare questo requisito è il D2.

Superato lo stato critico, la corrente, ormai veloce, dovrà ancora essere accelerata e tendere verso valle al moto uniforme: il solo profilo di corrente veloce che possa soddisfare questo requisito è l'F2.

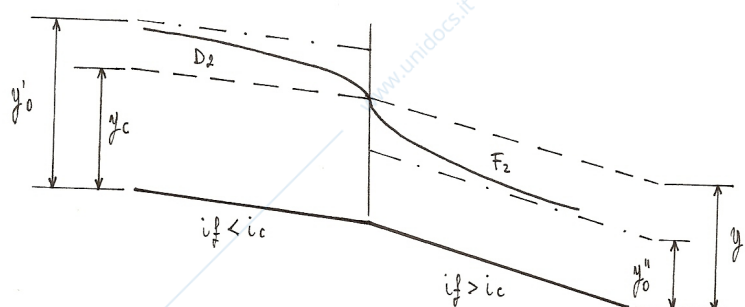


Figura 3.18: Passaggio attraverso lo stato critico: da corrente lenta a corrente veloce.

#### Cambiamento di pendenza dell'alveo

Affinchè ci sia il passaggio graduale di una corrente da lenta a veloce è dunque *necessario* un *cambiamento di pendenza* nell'alveo, da debole a forte.

Tale condizione è tuttavia *sufficiente*: quando l'alveo presenta un simile cambiamento di pendenza e *non esistano* lungo di esso altre cause perturbatrici, il passaggio graduale descritto avviene sempre, perchè avviene *spontaneamente*. La *causa perturbatrice* infatti, rappresentata appunto dal cambiamento di pendenza, è situata all'estremo *a valle della corrente lenta* e a quello *a monte della corrente veloce*, sicché su entrambe può esercitare la propria influenza, che si estende fino all'infinito.

Proprio in corrispondenza della sezione dove avviene il cambiamento di pendenza si stabilisce l'*altezza critica*  $y_c$ .

#### 3.6.2 Passaggio da corrente veloce a corrente lenta

Consideriamo il caso di una corrente veloce che tenda a diventare lenta.

Essa deve essere *ritardata* in modo da raggiungere verso valle lo stato critico per altezze crescenti: il solo profilo di corrente veloce che soddisfa questo requisito è il D3, che si svolge in *alveo a debole pendenza*.

Superato lo stato critico, la corrente, ormai lenta, deve ancora essere ritardata in modo da allontanarsi dallo stato critico stesso: il solo profilo che soddisfa questo requisito è l'F1, che si svolge in *alveo a forte pendenza*.

#### Cambiamento di pendenza dell'alveo

*Condizione necessaria* per il ricercato passaggio graduale attraverso lo stato critico è un cambiamento di pendenza da debole a forte.

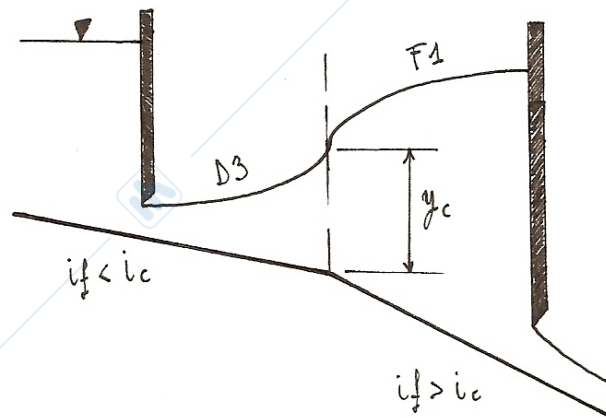


Figura 3.19: Passaggio attraverso lo stato critico: da corrente veloce a corrente lenta.

Questa volta però tale condizione *non è sufficiente*: il cambiamento di pendenza, a valle della corrente veloce e a monte della corrente lenta, non può esercitare alcuna influenza né sull'una né sull'altra.

La *corrente veloce* deve essere provocata (nell'alveo a debole pendenza) e condizionata nel suo svolgimento da una *causa situata a monte*, ad esempio una *paratoia* che obbliga la corrente a passare attraverso una luce battente ad essa sottostante.

Viceversa la *corrente lenta* deve essere provocata (nell'alveo a forte pendenza) e condizionata nel suo svolgimento da una causa situata a valle, ad esempio un'altra *paratoia*.

È evidente che le due paratoie devono proprio essere regolate in modo che i due profili di moto permanente da esse provocati raggiungano l'*altezza critica* nella sezione dove ha luogo il *cambiamento di pendenza*; se si varia di poco l'apertura anche solo di una delle due l'altezza critica viene raggiunta in una sezione diversa da quella del cambiamento di pendenza e quindi non si può realizzare il passaggio graduale attraverso lo stato critico.

Il *passaggio graduale* di una corrente da veloce a lenta è *possibile teoricamente ma con probabilità nulla*, perchè subordinato al verificarsi contemporaneo di due circostanze entrambe con probabilità nulla.

### Risalto idraulico

Il passaggio di una corrente dallo stato veloce a quello lento avviene quindi attraverso una *discontinuità*, un brusco sollevamento del pelo libero, detto *risalto idraulico* o *salto di Bidone*.

Questo brusco sollevamento nella sua manifestazione più tipica è accompagnato dalla formazione di un *imponente vortice superficiale* ad asse orizzontale, che assorbe aria presentandosi schiumeggiante, e *dissipa* rilevanti quantità di energia.

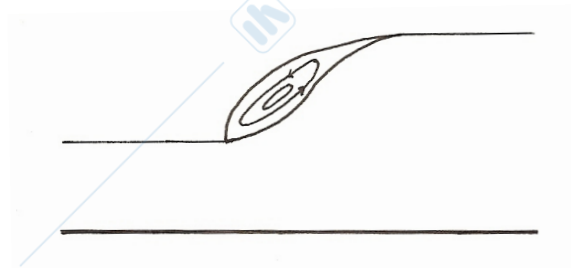


Figura 3.20: Risalto idraulico.

### Interpretazione teorica

L'interpretazione teorica del fenomeno è possibile da ottenere applicando l'*equazione globale dell'equilibrio dinamico* (conservazione della quantità di moto) al breve tronco di corrente che comprende il vortice.

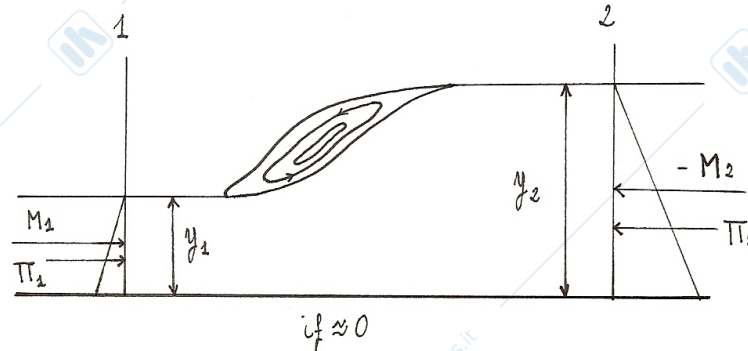


Figura 3.21: Applicazione dell'equazione globale dell'equilibrio dinamico.

Consideriamo un *tronco di corrente in alveo cilindrico*, compreso fra la sezione 1 che precede immediatamente il risalto e una sezione 2, che lo segue, alla minima distanza necessaria perché si possa considerare ristabilita la linearità della corrente e quindi la distribuzione idrostatica delle pressioni. Appliciamo a questo tronco l'equazione globale dell'equilibrio dinamico, *proiettandola nella direzione del moto e trascurando*:

- la componente del peso nella direzione stessa (equivale a supporre che il fondo sia orizzontale);
- la resistenza dell'alveo.

Le forze in gioco sono quindi:

- le *spinte idrostatiche* sulle sezioni estreme 1 e 2;
- le *quantità di moto* delle masse che attraversano le sezioni nell'unità di tempo.

Si può quindi scrivere:

$$\Pi_1 + M_1 = \Pi_2 + M_2 \quad (3.51)$$

La somma della spinta idrostatica  $\Pi$  e del flusso della quantità di moto  $M$  è detta *spinta totale*  $S$  della corrente.

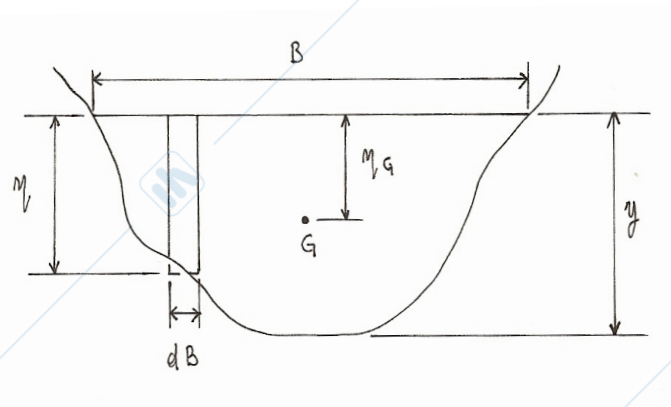


Figura 3.22: Generica sezione trasversale dell'alveo.

Consideriamo ora una generica sezione trasversale dell'alveo. Siano:

- $\Omega$ : area bagnata;
- $B$ : larghezza del pelo libero;
- $\eta_G$ : immersione del baricentro sotto il pelo dell'acqua.

La spinta totale può essere scritta come:

$$S = \gamma \int_{\Omega} \eta \, d\Omega + \rho QV = \gamma \Omega \eta_G + \rho \frac{Q^2}{\Omega} = S(y) \quad (3.52)$$

Essa risulta funzione univoca di  $y$  quando si consideri la *portata costante* ( $Q = \text{cost}$ ) e la *geometria della sezione nota*.

Dal momento che:

- se  $y \rightarrow 0$  allora  $S = [0 + \infty] \rightarrow +\infty$
- se  $y \rightarrow +\infty$  allora  $S = [+ \infty + 0] \rightarrow +\infty$

$S(y)$  deve presentare un *punto di minimo*. Il valore di  $y$  che dà luogo al minimo di  $S$  si ottiene imponendo la condizione:

$$\frac{dS}{dy} = 0$$

Conviene prima esprimere la profondità  $\eta_G$  del baricentro come rapporto tra il momento statico della sezione rispetto al pelo libero e l'area della sezione stessa:

$$\eta_G = \frac{\frac{1}{2} \int \eta^2 \, dB}{\Omega}$$

a meno di infinitesimi di ordine superiore si ha quindi:

$$\frac{dS}{dy} = \gamma \int y \, dB - \rho \frac{Q^2}{\Omega^2} \frac{d\Omega}{dy} = \gamma \Omega - \rho \frac{Q^2 B}{\Omega^2} = 0$$

di cui si ottiene proprio la condizione che definisce lo *stato critico*:

$$\frac{Q^2 B}{g \Omega^3} = 1 \implies \frac{\Omega^3}{B} = \frac{Q^2}{g} \quad (3.53)$$

Così come l'energia specifica  $E$  anche la spinta totale  $S$  ha il proprio minimo in coincidenza con lo stato critico.

### Alvei a sezione rettangolare

Nel caso di sezione rettangolare la spinta totale vale:

$$S = \frac{1}{2} \gamma B y^2 + \rho \frac{Q^2}{B y}$$

ed il suo minimo si ha quando:

$$\frac{dS}{dy} = \gamma B y - \rho \frac{Q^2}{B y^2} = 0$$

cioè per:

$$y = y_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g B^2}} = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} \quad (3.54)$$

Il *punto di minimo* suddivide dunque anche il grafico rappresentante la  $S(y)$  in due rami, di cui uno (per  $y < y_c$ ) rappresenta situazioni di corrente veloce e l'altro (per  $y > y_c$ ) situazioni di corrente lenta.

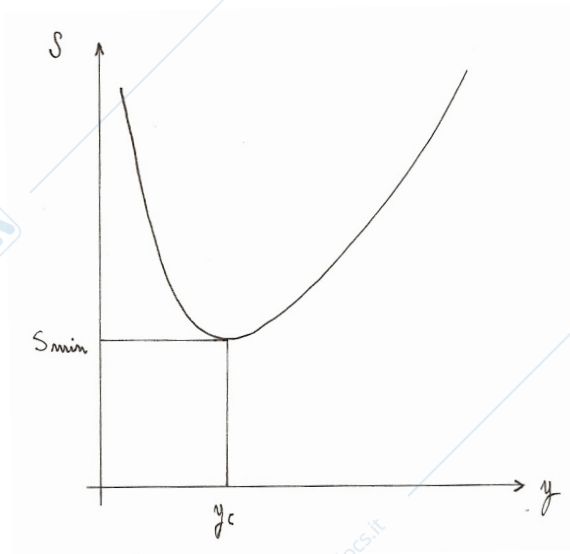


Figura 3.23: Andamento della spinta totale in funzione dell'altezza della corrente.

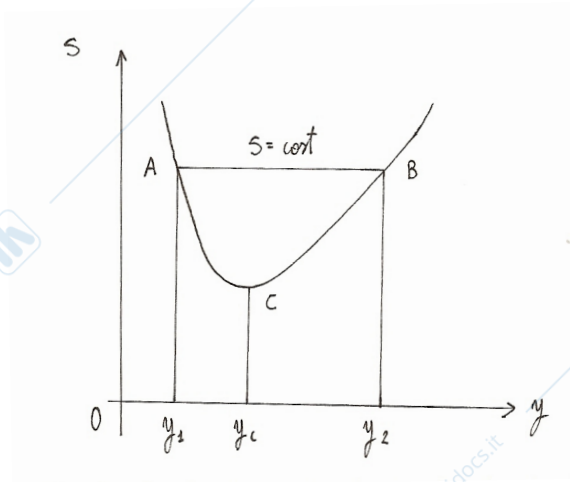


Figura 3.24: Altezze coniugate del risalto.

In base alla [3.51](#) le due altezze  $y_1$  e  $y_2$  delle sezioni che delimitano il risalto devono trovarsi allineate su una medesima parallela  $AB$  all'asse delle  $y$ : esse sono dette *altezze coniugate del risalto*.

Il grafico di figura [3.24](#) può essere tracciato in base alla [3.52](#) per una *qualsiasi sezione*; esso consente di risolvere il problema della determinazione dell'altezza a valle del risalto nota che sia quella a monte, o viceversa.

Nel caso di sezione rettangolare è pure agevole la *soluzione analitica*. Con riferimento ad una striscia di larghezza unitaria, percorsa dalla portata  $q = Q/B$ , la [3.51](#) si scrive:

$$\frac{1}{2}\gamma y_1^2 + \rho \frac{q^2}{y_1} = \frac{1}{2}\gamma y_2^2 + \rho \frac{q^2}{y_2}$$

da cui:

$$\frac{y_2^2 - y_1^2}{2} = \frac{q^2}{g} \frac{y_2 - y_1}{y_1 y_2} = y_c^3 \frac{y_2 - y_1}{y_1 y_2}$$

e quindi:

$$y_1 + y_2 = \frac{2y_c^3}{y_1 y_2} \quad (3.55)$$

Essa è una *relazione simmetrica* tra  $y_1$  e  $y_2$  in cui la portata entra come parametro attraverso l'altezza critica  $y_c$ . Essa consente di calcolare una qualsiasi delle altezze coinugate del risalto quando sia nota l'altra. Se ad esempio è nota l'altezza  $y_1$ , l'equazione di 2° grado in  $y_2$  fornisce come radice significativa:

$$y_2 = \frac{y_1}{2} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{8y_c^3}{y_1^3}} \right] = \frac{y_1}{2} \left[ -1 + \sqrt{1 + 8Fr_1^2} \right] \quad (3.56)$$

Nel caso di sezione rettangolare è pure abbastanza semplice il calcolo dell'*energia specifica dissipata nel risalto*:

$$E_1 - E_2 = y_1 - y_2 + \frac{q^2}{2g} \left( \frac{1}{y_1^2} - \frac{1}{y_2^2} \right) = y_1 - y_2 + \frac{y_c^3}{2} \frac{y_2^2 - y_1^2}{y_1^2 y_2^2}$$

da cui, eliminando  $y_c$  attraverso la [3.55](#), si ottiene:

$$E_1 - E_2 = \frac{(y_2 - y_1)^3}{4y_1 y_2} \quad (3.57)$$

### Forme di risalto idraulico

In funzione della velocità della corrente in entrata e quindi del suo numero di Froude cambia l'*aspetto esteriore* del risalto idraulico:

- $1 < Fr_1 \lesssim 1,7$ : il risalto assume un aspetto *ondulato*;
- $1,7 \lesssim Fr_1 \lesssim 2$ : il risalto assume l'aspetto di un *vortice* ad asse orizzontale;
- $Fr_1 > 3$ : il risalto assume l'aspetto di un *vortice* ad asse orizzontale con formazione di un'*onda frangente*.

### Lunghezza del risalto

La lunghezza  $L_R$  del tronco di corrente interessato dal risalto è un elemento che non si può valutare con precisione perché, mentre è abbastanza ben individuabile sperimentalmente la *sezione iniziale*, altrettanto non può dirsi per la *sezione terminale* del risalto stesso.

Esistono in letteratura alcuni *valori sperimentali* della lunghezza di risalto, espressi in funzione del numero di Froude  $Fr_1$  e parametrizzati o rispetto alla profondità di valle  $y_2$  o rispetto all'ampiezza del salto  $y_2 - y_1$ .

Tabella 3.1: Lunghezza del risalto.

$Fr_1$	$L_R/y_2$	$L_R/(y_2 - y_1)$
2	4,4	7,6
3	5,3	7,2
5	6,0	7,0
10	6,1	6,6
15	5,9	6,2
20	5,5	5,7

**Esempio**

Consideriamo un torrente di montagna (corrente veloce) che si getta in un lago (corrente lenta). Vogliamo individuare il punto in cui si forma il risalto applicando la condizione  $S_1 = S_2$ .

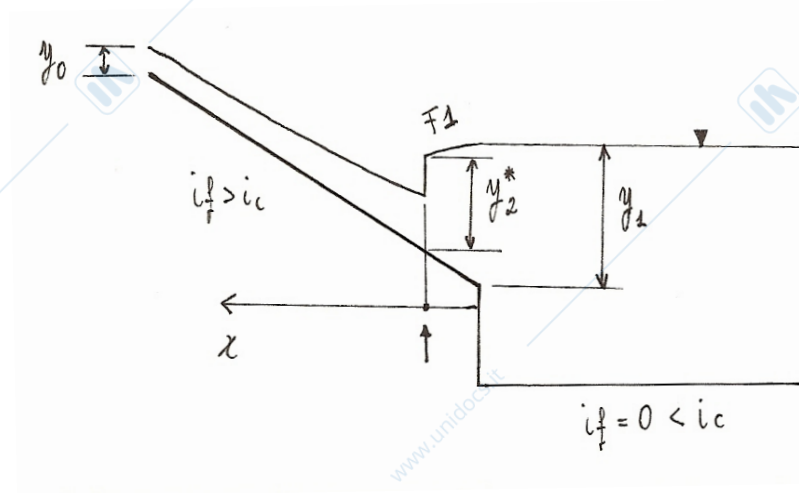


Figura 3.25: Determinazione della posizione del risalto.

Supponiamo che le cause perturbatrici a monte siano lontane, in modo da poter assumere a monte del risalto l'altezza di moto uniforme  $y_0$ , si trova quindi  $Fr_0$  e si calcola:

$$y_2^* = \frac{y_0}{2} \left[ -1 + \sqrt{1 + 8Fr_0^2} \right]$$

È possibile quindi seguire il profilo F1 verso monte finché si ottiene un valore di  $y$  pari a  $y_2^*$ , è questo il punto in cui si forma il risalto. Approssimando il profilo F1 come orizzontale si può scrivere:

$$y_1 - i_f x = y_2^* \implies x \approx \frac{y_1 - y_2^*}{i_f}$$

## 3.7 Esempi applicativi

### 3.7.1 Procedura per la determinazione dei profili

1. Trovare l'altezza critica  $y_c$ .

Nel caso di alvei a sezione rettangolare vale la relazione:

$$y_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}$$

2. Trovare l'altezza di moto uniforme  $y_0$ .

Nel caso di alvei rettangolari larghi ( $R \approx y$ ):

$$y_0 = \sqrt[3]{\frac{q^2}{C^2 g i_f}} \qquad y_0 = \left( \frac{q}{K_s i_f^{1/2}} \right)^{3/5}$$

Nel caso di alvei rettangolari si deve risolvere l'equazione non lineare in  $y_0$ :

$$q - K_s y_0 \left( \frac{B y_0}{B + 2 y_0} \right)^{2/3} i_f^{1/2} = 0$$

Determinare se l'alveo è a forte o debole pendenza.

3. Determinare le *condizioni al contorno* e/o i *vincoli interni*.
4. Verificare la presenza di un eventuale passaggio da una corrente veloce a monte ad una lenta a valle e quindi la formazione di un *risalto idraulico*.

In caso affermativo ricorrere all'equazione globale dell'equilibrio dinamico.

Nel caso di alvei a sezione rettangolare la relazione per le profondità coniugate del risalto idraulico vale:

$$y_2 = \frac{y_1}{2} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{8y_c^3}{y_1^3}} \right] = \frac{y_1}{2} \left[ -1 + \sqrt{1 + 8Fr_1^2} \right] \qquad Fr_1 = \frac{q}{y_1 \sqrt{g y_1}}$$

Trovare la *posizione* del risalto (nell'ipotesi che esso abbia un profilo verticale) in modo tale che  $y_1$  ed  $y_2$  siano una coppia di profondità coniugate.

### 3.7.2 Presenza di una paratoia piana in alvei a debole pendenza

Consideriamo l'effetto della presenza in una determinata sezione di un alveo cilindrico, di una paratoia piana, che obblighi la corrente a defluire attraverso una luce. La portata  $Q$  costante in moto uniforme assume l'altezza  $y_0$ . Essendo l'alveo a debole pendenza il moto uniforme vi si dovrebbe svolgere in regime di corrente lenta.

#### Condizioni al contorno

Poiché si è in un *alveo a debole pendenza* la condizione al contorno va ricercata a *valle*. Dal momento che non è presente nulla si suppone che le eventuali cause perturbatrici siano sufficientemente lontane in modo da poter supporre che il profilo sia asintotico con il profilo di moto uniforme (D1 o D2).

#### Vincoli interni

La luce della paratoia si comporta come un foro in un serbatoio, la portata uscente vale:

$$q = C_v C_c a \sqrt{2gy_m} \quad (3.58)$$

dove:

- $C_c$ : coefficiente di contrazione;
- $C_v$ : coefficiente correttivo per la velocità di approccio;
- $C_Q = C_c \cdot C_v$ : coefficiente di portata;
- $a$ : altezza della luce della paratoia;
- $y_m$ : altezza della corrente immediatamente a monte della paratoia.

L'altezza della corrente contratta è quindi da ritenere nota e pari a:

$$y_e = C_Q a \quad (3.59)$$

Nella *sezione contratta* la corrente deve necessariamente essere *veloce*: dal momento che l'area della sezione stessa e la velocità sono determinate dalla posizione della paratoia, la quale, rispetto alla sezione contratta, è situata a monte, la corrente non può essere lenta altrimenti la paratoia non potrebbe esercitarvi alcuna influenza.

Nella stessa *sezione contratta* l'energia specifica rispetto al fondo vale:

$$E_e = y_e + \frac{V_e^2}{2g} \quad (3.60)$$

Essa deve essere maggiore di quella competente al moto uniforme: prima che questo venga ricostituito verso valle la corrente veloce dovrà dissipare più energia che non la corrente uniforme (vedi relazione 3.47) e questa quantità in più dovrà essere stata accumulata in precedenza e trovarsi disponibile nella sezione contratta.

Supponendo *nulla la perdita di carico* nell'efflusso, l'altezza  $y_m$  che si stabilisce a monte della paratoia è subito determinata in base al grafico di figura 3.27 come quella della corrente lenta cui compete l'energia specifica rispetto al fondo  $E_e$ . Nel caso di alveo a sezione rettangolare si ha:

$$y_m = \frac{q^2}{C_Q^2 a^2 2g} \quad (3.61)$$

#### Tracciamento del profilo

Poiché la corrente a monte della paratoia è lenta deve essere  $y_m > y_0$ . Nel *tronco di canale a monte* si stabilisce un profilo di tipo D1 che è possibile tracciare per punti partendo dal suo estremo a valle dove è nota l'altezza  $y_m$ .

A *valle della paratoia* si stabilisce invece un profilo di tipo D3, ossia l'unico di corrente veloce realizzabile in alveo a debole pendenza. Esso può essere tracciato partendo dalla sezione contratta dove è nota l'altezza  $y_e$ .

A valle il profilo D3 tende all'altezza critica la quale però non viene raggiunta a causa dell'intervento di un *risalto idraulico* che riporta la corrente allo stato lento, ripristinando il moto uniforme di altezza  $y_0$ .

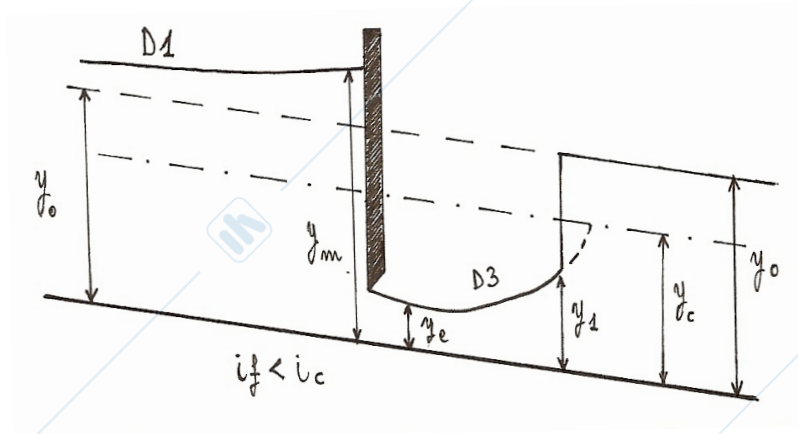


Figura 3.26: Paratoia in alveo a debole pendenza: profilo del moto.

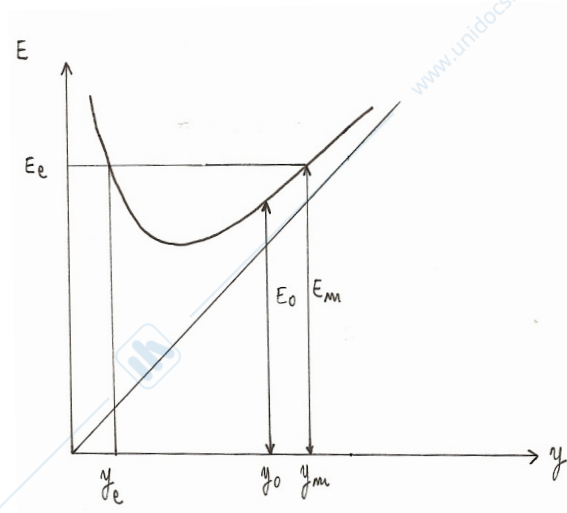


Figura 3.27: Paratoia in alveo a debole pendenza: energia specifica ed altezza della corrente.

### Posizione del risalto

Nota l'altezza di valle  $y_0$  è possibile calcolare, nell'ipotesi di sezione rettangolare, l'altezza coniugata  $y_1$  a monte:

$$y_1 = \frac{y_0}{2} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{8y_c^3}{y_0^3}} \right] = \frac{y_0}{2} \left[ -1 + \sqrt{1 + 8Fr_0^2} \right]$$

Il risalto ha luogo proprio in quella sezione in cui il profilo di corrente veloce raggiunge l'altezza  $y_1$ .

### Aumento dell'area sotto la paratoia

Aumentare l'altezza  $y_e$  significa traslare verso monte senza deformazione il profilo D3 della corrente veloce e quindi il risalto.

Quando l'altezza nella sezione contratta supera il valore  $y_1$  coniugato di  $y_0$  il profilo D3 scompare del tutto e il risalto risulta addossato del tutto alla paratoia (*risalto annegato*). L'efflusso non è più libero, bensì rigurgitato, e il livello a monte non dipende più soltanto dall'apertura della paratoia bensì anche dal livello che si viene a stabilire a valle, a ridosso di essa.

### 3.7.3 Presenza di una paratoia piana in alvei a forte pendenza

#### Condizioni al contorno

Poiché si è in un *alveo a forte pendenza* la condizione al contorno va ricercata a *monte*. Dal momento che non è presente nulla si suppone che le eventuali cause perturbatrici siano sufficientemente lontane in modo da poter supporre che il profilo sia asintotico con il profilo di moto uniforme (F2 o F3).

#### Vincoli interni

La paratoia origina ancora subito a valle una sezione contratta di altezza  $y_e$ ; e subito a monte si stabilisce un'altezza  $y_m$ , che è possibile determinare come in precedenza.

Anche in questo caso, subito *a monte della paratoia*, la *corrente risulta lenta*: è necessario che ciò avvenga affinché la paratoia possa agire su di essa in modo da procurare quell'incremento di energia specifica occorrente per vincere le maggiori resistenze della corrente a valle (vedi relazione [3.47](#)), che si svolge con altezze inferiori a quella del moto uniforme.

#### Tracciamento del profilo

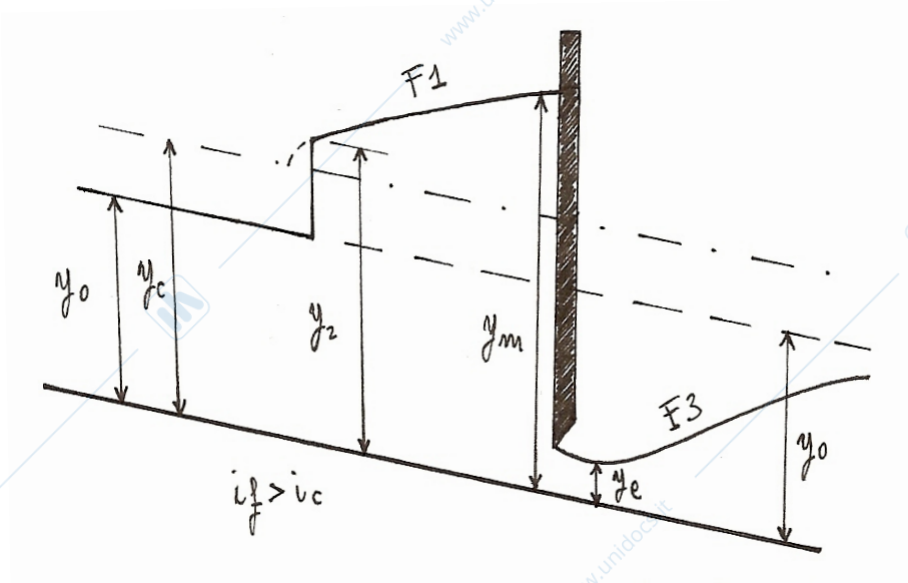


Figura 3.28: Paratoia in alveo a forte pendenza: profilo del moto.

Il profilo di moto permanente che si stabilisce *a valle* con  $y < y_0$  è del tipo F3, asintotico al moto uniforme. Lo si può tracciare per punti a partire dalla sezione contratta in cui è nota  $y_e$ .

A *monte della paratoia* si stabilisce invece un profilo di tipo F1, ossia l'unico di corrente lenta realizzabile in alveo a forte pendenza. Esso può essere tracciato partendo dall'estremo di valle dove è nota l'altezza  $y_m$ .

A monte il profilo F1 tende all'altezza critica la quale però non viene raggiunta a causa dell'intervento di un *risalto idraulico* che riporta la corrente allo stato veloce, ripristinando il moto uniforme di altezza  $y_0$ .

#### Posizione del risalto

Nota l'altezza di monte  $y_0$  è possibile calcolare, nell'ipotesi di sezione rettangolare, l'altezza coniugata  $y_2$  a valle:

$$y_2 = \frac{y_0}{2} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{8y_c^3}{y_0^3}} \right] = \frac{y_0}{2} \left[ -1 + \sqrt{1 + 8Fr_0^2} \right]$$

Il risalto si ha proprio in quella sezione in cui il profilo di corrente lenta F1 raggiunge l'altezza  $y_2$ .

### 3.7.4 Cambio di pendenza con paratoia piana

Consideriamo un alveo a debole pendenza a valle di una paratoia che vi determina una corrente veloce con profilo D3. Supponiamo che dopo un tratto più o meno lungo l'alveo diventi a forte pendenza.

Siano  $y'_0$  e  $y''_0$  le altezze di moto uniforme nei due tronchi d'alveo e  $y_c$  l'altezza critica.

Si possono presentare due diverse situazioni a seconda della lunghezza  $L$  del tratto d'alveo a debole pendenza:

1. lunghezza minore di quella necessaria ( $L_c$ ) affinché il profilo D3 pervenga allo stato critico;
2. lunghezza maggiore di quella necessaria ( $L_c$ ) affinché il profilo D3 pervenga allo stato critico.

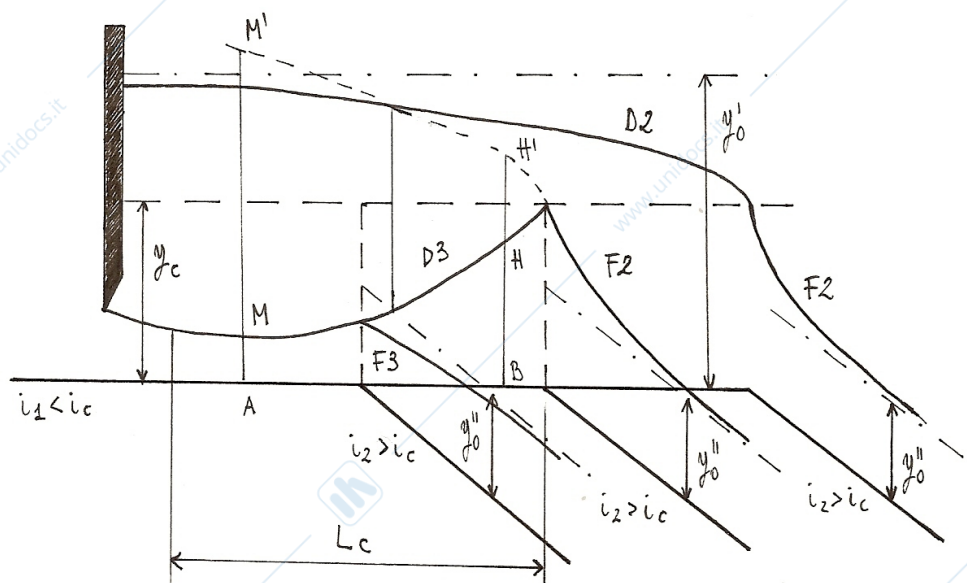


Figura 3.29: Cambio di pendenza con paratoia piana: profilo del moto.

$$L < L_c$$

In questo caso la corrente resta ovunque *veloce*. A valle della sezione dove ha luogo il cambiamento di pendenza si sviluppa un profilo di tipo F2 o F3 a seconda che  $y''_0$  sia minore o maggiore dell'altezza raggiunta dal profilo D3. Al limite si può avere in corrispondenza del cambiamento di pendenza proprio l'altezza critica  $y_c$ , nel cui caso si avrà verso valle un profilo F2, partente proprio da  $y_c$ .

$$L > L_c$$

In questo caso la corrente veloce non può svilupparsi fino a  $y_c$  ma interviene prima un *risalto* che la trasforma in corrente lenta. L'altezza critica viene quindi a cadere proprio in corrispondenza del cambiamento di pendenza e a monte si ha un profilo D2 fino alla sezione dove ha luogo il risalto.

#### Posizione del risalto

La localizzazione della sezione in cui avviene il risalto non è immediata in quanto non si conosce a priori nessuna delle due altezze coniugate.

Il procedimento da seguire è: per alcune sezioni (AM, BH, ...) del profilo di monte D3 (o di quello di valle) si determinano le altezze coniugate (AM', BH', ...) e si riportano a partire dal fondo. Gli estremi superiori (M', H', ...) si trovano su una curva, detta *luogo del risalto*, che si traccia unendoli "a sentimento": essa taglia il profilo di valle (o di monte) proprio nella sezione dove avviene il risalto.

### 3.7.5 Passaggio sopra una soglia di fondo

Supponiamo che una soglia di altezza  $a$  e di modesta lunghezza interrompa la continuità di un alveo.

#### Energia specifica elevata e/o altezza della soglia piccola

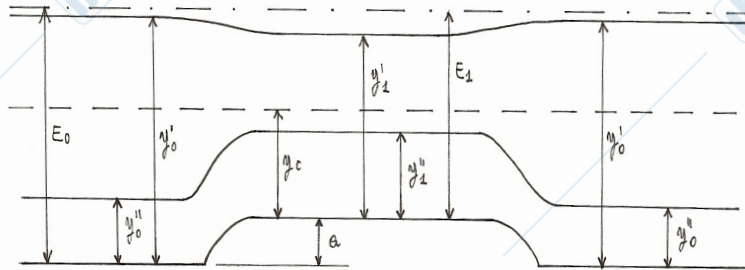


Figura 3.30: Passaggio sopra una soglia di fondo (energia specifica elevata): profilo del moto.

Sia  $E_0$  l'energia specifica della corrente in arrivo, supponiamo che nel breve percorso della corrente lungo il raccordo iniziale della soglia le dissipazioni siano trascurabili: sopra la soglia si ritrova la linea dell'energia alla medesima quota che a monte della soglia. Ciò significa che l'energia specifica risulta minore:

$$E_1 = E_0 - a \quad (3.62)$$

Analizzando il grafico dell'energia specifica in funzione dell'altezza.

- *Alveo a forte pendenza:* la corrente veloce passa dall'altezza  $y_0''$  del moto uniforme ad un'altezza  $y_1' > y_0''$ .  
Il pelo libero di solleva ed il sollevamento risulta maggiore dell'altezza stessa della soglia.
- *Alveo a debole pendenza:* la corrente lenta passa dall'altezza  $y_0'$  del moto uniforme ad un'altezza  $y_1' < y_0'$ . Poiché l'inclinazione della  $E(y)$  è minore di quella della bisettrice degli assi risulta  $y_0' - y_1' > a$ .  
Il pelo libero della corrente sulla soglia si abbassa.

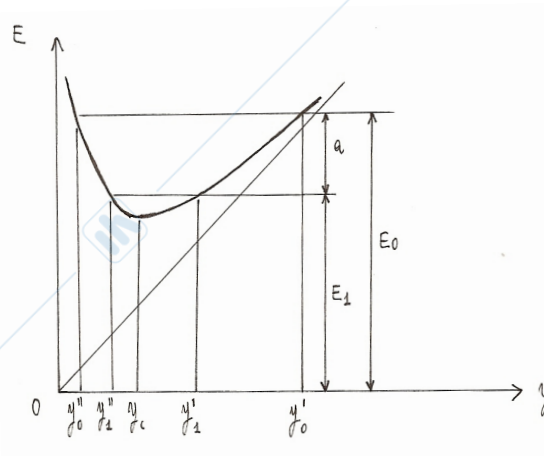


Figura 3.31: Passaggio sopra una soglia di fondo (energia specifica elevata): energia specifica ed altezza della corrente.

### Energia specifica piccola e/o altezza della soglia elevata

In questo caso può darsi che l'energia specifica  $E_0$  della corrente in arrivo non sia sufficiente per farle oltrepassare la soglia.

Ciò avviene quando la retta di equazione  $E = E' = E_0 - a$  non taglia il grafico della  $E(y)$ , essendo appunto  $E' < E_c$ .

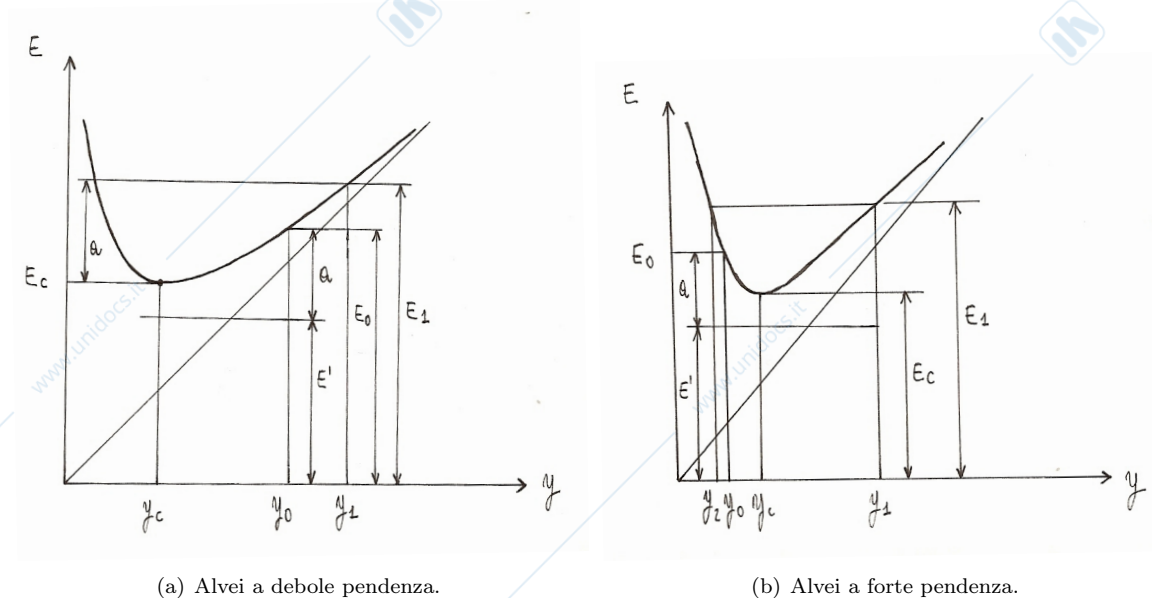


Figura 3.32: Passaggio sopra una soglia di fondo (energia specifica piccola): energia specifica ed altezza della corrente.

- *Alveo a debole pendenza*: la corrente è costretta a rigurgitare, il suo livello si solleva e con ciò, essendo la corrente lenta, aumenta l'energia specifica, fino al minimo valore indispensabile.

Questo viene raggiunto quando sulla soglia si stabilisce proprio lo *stato critico*, con altezza  $y_c$  e carico totale  $E_c$  rispetto al piano superiore della soglia stessa.

Subito a monte avremo un carico totale  $E_1 = E_c + a$  rispetto al fondo dell'alveo, e corrispondentemente un'altezza  $y_1 > y_0$ : un *profilo di rigurgito* del tipo D1 si estenderà fino all'infinito a monte.

Raggiunto lo stato critico sulla soglia, la corrente, sempre accelerando, diventa subito a valle *veloce*, in quanto le sue condizioni sono determinate proprio dalla soglia (causa posta a monte).

Nell'ipotesi che anche al termine della soglia non intervenga sensibile dissipazione di energia, l'altezza  $y_2$  subito al piede della soglia è fornita dal grafico della  $E(y)$ .

Deve seguire un profilo di tipo D3, di corrente veloce ritardata in alveo a debole pendenza, interrotto infine da un *risalto* che ristabilisce il moto uniforme.

- *Alveo a forte pendenza*: anche in questo caso si stabilisce sulla soglia lo stato critico. Ciò richiede tuttavia un sollevamento della linea dell'energia anche a monte e quindi un'influenza della soglia sulla corrente in arrivo, ne consegue che questa deve diventare *lenta*, assumendo subito a monte l'altezza  $y_1$  corrispondente al carico totale  $E_1 = E_c + a$ .

Si stabilisce un *profilo di rigurgito* di tipo F1, di corrente lenta in alveo a forte pendenza, che inizia a monte con un *risalto*.

Varcato lo stato critico sulla soglia, a valle la corrente ridiventa *veloce*; ma subito al piede, nell'ipotesi che anche allo sbocco non si dissipi energia e quindi il carico totale rispetto al fondo resti  $E_1$ , si ha un'altezza  $y_2 < y_0$ , in quanto in una corrente veloce un aumento di energia corrisponde ad una diminuzione di altezza.

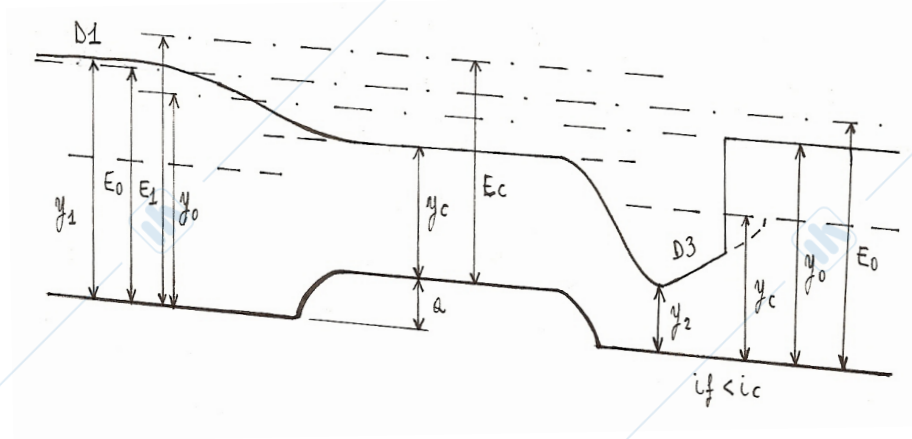


Figura 3.33: Passaggio sopra una soglia di fondo (energia specifica piccola): profilo del moto per alvei a debole pendenza.

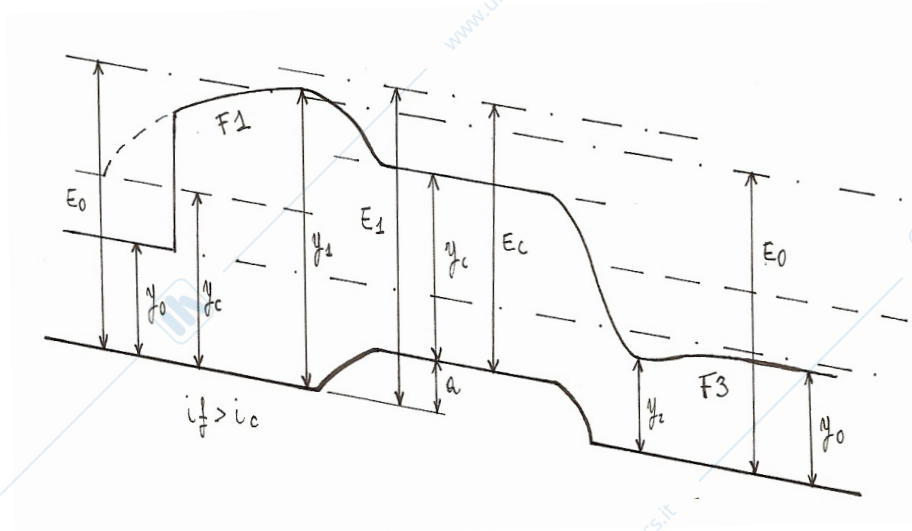


Figura 3.34: Passaggio sopra una soglia di fondo (energia specifica piccola): profilo del moto per alvei a forte pendenza.

Il moto uniforme viene ristabilito asintoticamente verso valle, a mezzo di un profilo del tipo F3.

### 3.7.6 Stabilizzazione di un risalto idraulico

La determinazione della posizione del risalto serve ad individuare le zone in cui il fondo del canale sarà sottoposto a *forti sollecitazioni*. Essendo infatti il risalto un fenomeno fortemente dissipativo esso provoca delle forti perturbazioni di pressione verso il fondo, le quali si trasferiscono attraverso i giunti della pavimentazione alla faccia sottostante le piastre.

Consideriamo lo *sfiatore* di una diga: esso è costituito da una sorta di scivolo che permette di scaricare a valle l'eccesso d'acqua dovuto ad un'onda di piena. Poiché la pendenza di tale scivolo può raggiungere anche il 100% tutta l'energia presente alla sommità si trasferisce a valle, dove viene dissipata mediante un risalto, di cui è necessario stabilizzare la posizione *al piede dello scivolo*. Il risalto tende infatti a spingersi molto a valle in quanto:

$$y'_3 = \frac{y_2}{2} \left[ -1 + \sqrt{1 + 8Fr_2^2} \right] \gg y_{0v}$$

Le possibilità che si presentano sono due.

1. Approfondire la vasca di una quantità  $a$  in modo tale che:

$$y_{0v} + a = y'_3$$

2. Creare uno sbarramento, detta *controbriglia*, di altezza  $b$  in modo che:

$$y_s + b = y'_3 \implies b = y'_3 - y_s$$

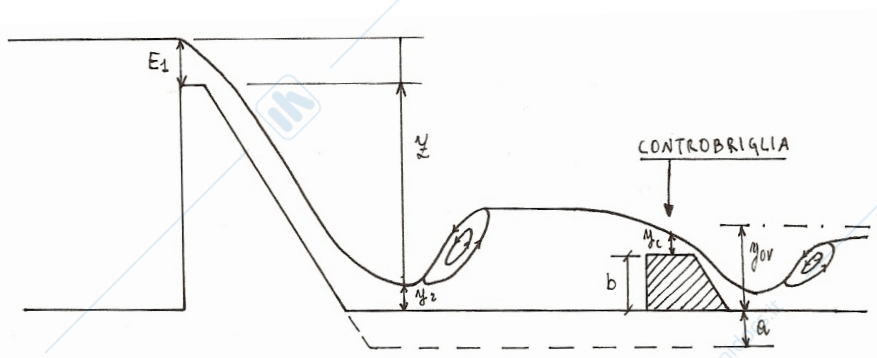


Figura 3.35: Stabilizzazione di un risalto idraulico: profilo del moto.

L'altezza  $y_s$  può essere ottenuta considerando le formule per gli *stramazzi*:

$$Q = C_Q B_s y_s \sqrt{2g y_s} \implies y_s \left( \approx \frac{3}{2} y_c \right)$$

A valle della controbriglia si formerà un *altro risalto*, il quale tuttavia sarà molto più piccolo, in quanto gran parte dell'energia sarà stata già dissipata nella prima vasca.

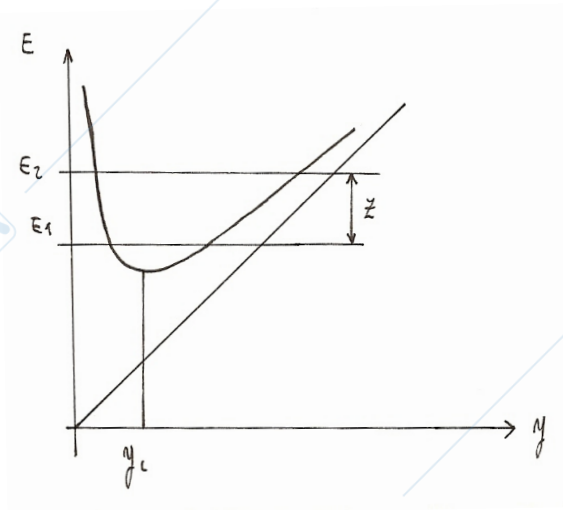


Figura 3.36: Stabilizzazione di un risalto idraulico: energia specifica ed altezza della corrente.

### 3.7.7 Passaggio fra le pile di un ponte

Il processo di movimento in questo caso è del tutto paragonabile a quello visto per il caso della passaggio sopra una soglia di fondo, tuttavia in questo caso:

- si *mantiene costante* l'energia specifica  $E$  rispetto al fondo;
- *varia* la portata  $q$  per unità di larghezza.

Consideriamo una corrente che supponiamo contenuta in un alveo a sezione rettangolare larga  $B_1$ , sia  $Q$  la sua portata e quindi  $q_1 = Q/B_1$  la portata per unità di larghezza del canale.

Facciamo l'ipotesi che il passaggio tra le pile del ponte avvenga senza sensibile dissipazione di energia ( $E = \text{cost}$ ). Fra le pile la larghezza complessiva della sezione liquida si riduce a  $B_2 < B_1$  e quindi la portata unitaria aumenta diventando  $q_2 = Q/B_2 > q_1$ .

#### Piccolo restringimento

Consideriamo separatamente i due casi di alvei a debole e a forte pendenza; siano  $y'_0$  e  $y''_0$  le rispettive altezze di moto uniforme.

- *Alvei a debole pendenza*: poichè a parità di  $y$  all'aumentare di  $q$  si ha un aumento di  $E$ , ne consegue che per effetto del restringimento:
  - $y_c$  aumenta;
  - $y'_1 < y'_0$ : la corrente si *abbassa*.
- *Alvei a forte pendenza*: in maniera analoga si ha:
  - $y_c$  aumenta;
  - $y''_1 > y''_0$ : la corrente si *alza*.

Si trova quindi lo stesso fenomeno che si era trovato studiando il passaggio sopra una soglia con l'osservazione che:

- ✓ *corrente lenta*: l'aumento della portata unitaria si attua mediante un aumento di velocità al quale corrisponde una diminuzione della quota piezometrica ( $y$ );
- ✓ *corrente veloce*: l'aumento della portata unitaria si attua mediante una diminuzione dell'energia cinetica, che porta ad un aumento dell'area liquida.

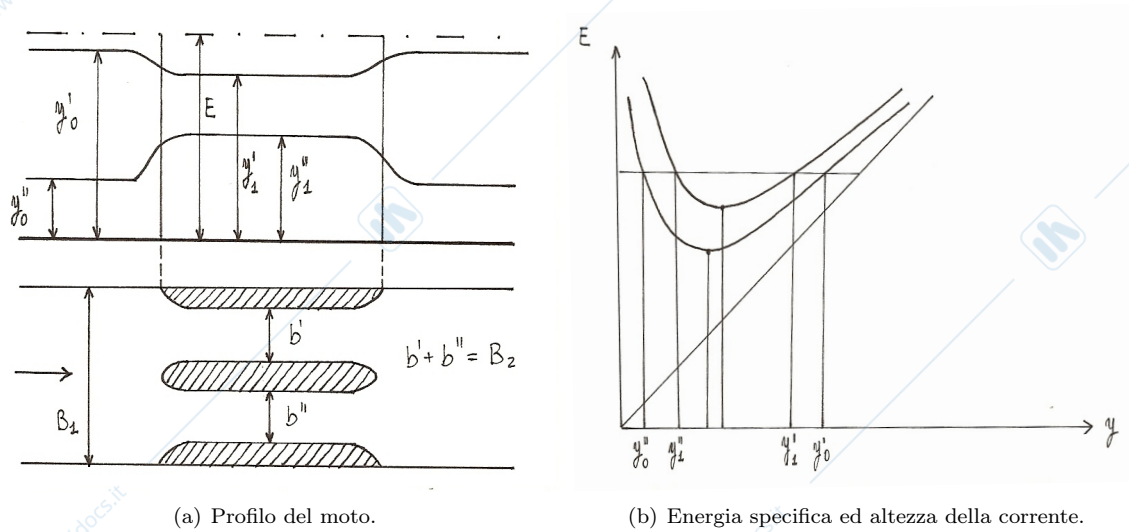


Figura 3.37: Passaggio tra le pile di un ponte (piccolo restringimento).

### Grande restringimento

Può anche in questo caso succedere che, se il restringimento della sezione è piuttosto rilevante, l'energia disponibile nella corrente in arrivo non sia sufficiente a superare l'ostacolo.

Interviene un *rigurgito* che realizza subito a monte del ponte una corrente lenta con carico totale  $E_1 > E_0$ .

In particolare la corrente si porta ad un livello energetico pari al minimo valore indispensabile per il passaggio fra le pile, ossia quel valore per cui il passaggio si realizza allo *stato critico* con altezza:

$$y_{c1} = \sqrt[3]{\frac{q_2^2}{g}}$$

Il valore dell'energia è quindi pari a:

$$E_1 = \frac{3}{2}y_{c1}$$

Il valore di  $y_1$  è ottenibile risolvendo l'equazione non lineare:

$$\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{q_2^2}{g}} = y_1 + \frac{q_1^2}{2gy_1^2}$$

- *Alvei a debole pendenza*: il rigurgito provocato dal ponte si estende fino all'infinito a monte, secondo un profilo di tipo D1.

La corrente, attraversato lo stato critico fra le pile, diventa veloce subito a valle, con altezza  $y_2$  deducibile dal grafico di figura 3.38, nell'ipotesi che anche allo sbocco la dissipazione di energia sia trascurabile. Segue un profilo D3, di corrente veloce, che termina con un *risalto*, a valle del quale si ristabilisce il *moto uniforme*.

- *Alvei a forte pendenza*: subito a monte del ponte si ha un profilo di tipo F1, di corrente lenta, che inizia con un *risalto*, a monte del quale si ha il *moto uniforme* della corrente veloce.

A valle del ponte, subito dopo lo sbocco, la corrente veloce ha altezza  $y_2 < y_0$ , ed il moto uniforme viene ristabilito asintoticamente, a mezzo di un profilo di tipo F3.

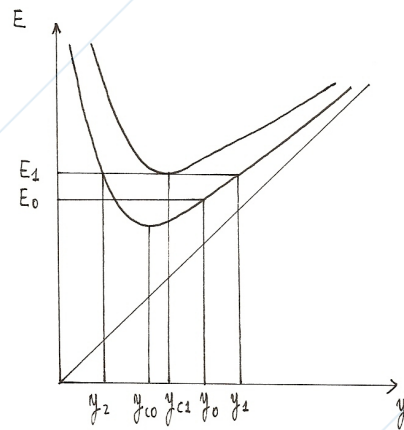


Figura 3.38: Passaggio attraverso le pile di un ponte (forte restringimento): energia specifica ed altezza della corrente per alvei a debole pendenza.

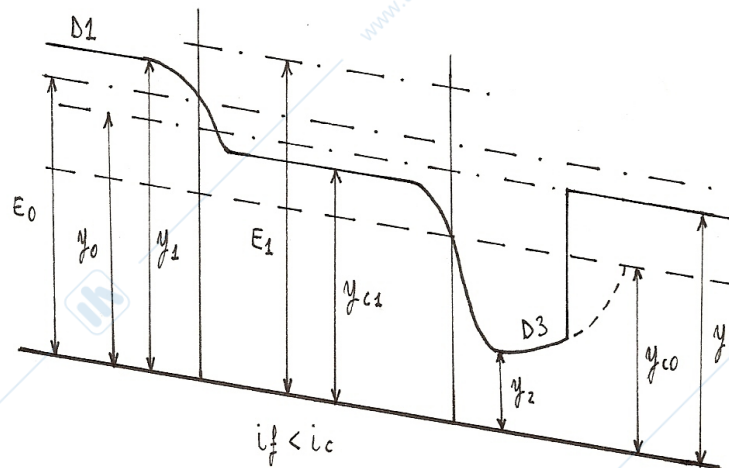


Figura 3.39: Passaggio attraverso le pile di un ponte (forte restringimento): profilo del moto per alvei a debole pendenza.

### Condizione di non attraversamento della profondità critica

La condizione affinché in assenza di perdite non si verifichi l'attraversamento della profondità critica è che l'energia specifica della corrente indisturbata sia maggiore od uguale all'energia specifica critica per la portata assegnata:

$$y_{01} + \frac{q_1^2}{2gy_{01}^2} \geq \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{q_2^2}{g}} \quad (3.63)$$

Il numero di Froude della corrente indisturbata vale:

$$Fr_0 = \frac{V_0}{\sqrt{gy_0}} = \frac{q_1}{y_{01}\sqrt{gy_0}}$$

e quindi la 3.63 diventa:

$$1 + \frac{Fr_0^2}{2} - \frac{3}{2} \left( \frac{Fr_0 B_1}{B_2} \right)^{2/3} \geq 0 \quad (3.64)$$

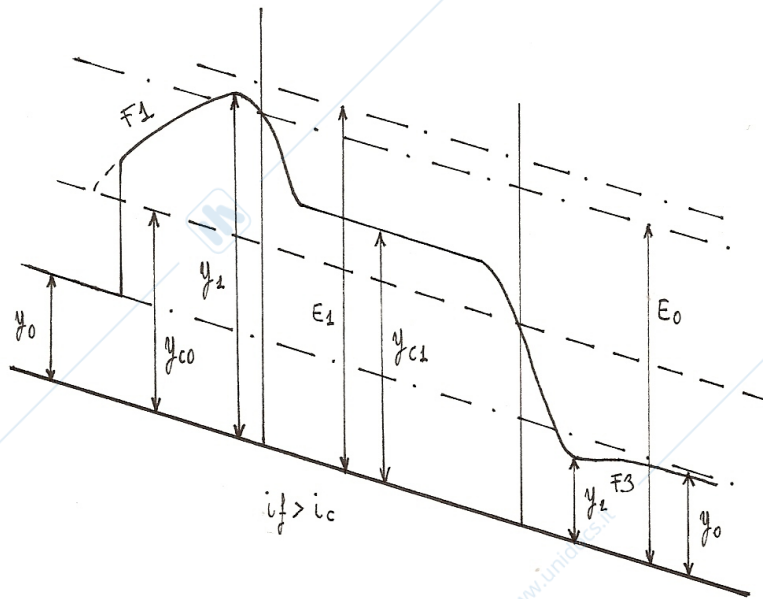


Figura 3.40: Passaggio attraverso le pile di un ponte (forte restringimento): profilo del moto per alvei a forte pendenza.

Nel caso di uguaglianza, ad ogni valore del *rapporto di restringimento*  $B_2/B_1$  corrispondono due soluzioni positive per i numeri di Froude  $Fr_0$ , che si indicano come numeri limite  $F_L$ :  $F_L' < 1$  e  $F_L'' > 1$ . La corrente si mantiene *ovunque lenta* nel passaggio attraverso il restringimento se risulta  $Fr_0 \leq F_L'$  ed analogamente *ovunque veloce* se  $Fr_0 > F_L''$ .

Il diagramma di figura 3.41 rappresenta l'andamento delle soluzioni  $F_L$  in funzione del rapporto di restringimento  $B_2/B_1$ . Si individuano 3 campi:

1. il moto avviene in condizione di corrente sempre lenta: *moto subcritico*;  
(equivale al caso dell'alveo a debole pendenza con piccolo restringimento);
2. il moto avviene in condizione di corrente sempre veloce: *moto supercritico*;  
(equivale al caso dell'alveo a forte pendenza con piccolo restringimento);
3. il moto avviene con *transizione* attraverso la profondità critica:
  - 3': alveo a debole pendenza con grande restringimento;
  - 3'': alveo a forte pendenza con grande restringimento.

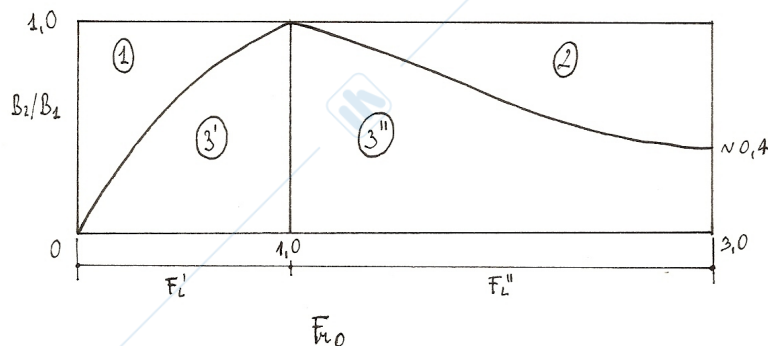


Figura 3.41: Andamento delle soluzioni  $F_L$  in funzione del rapporto di restringimento.

### Valutazione del rigurgito per il moto in condizioni subcritiche

Quando il punto di coordinate assegnate ( $Fr_0, B_2/B_1$ ) cade in campo 1 il rigurgito  $\Delta y$ , cioè la sopraelevazione del pelo libero a monte del restringimento rispetto alla profondità  $y_0$  della corrente indisturbata<sup>2</sup>, si può calcolare con la *formula empirica di Yarnell*:

$$\frac{\Delta y}{y_0} = k_2(k_2 - 0,6 + 5Fr_0^2) \left[ 1 - \frac{B_2}{B_1} + 15 \left( 1 - \frac{B_2}{B_1} \right)^4 \right] Fr_0^2 \quad (3.65)$$

dove  $k_2$  è un *fattore di forma delle pile*, i cui valori sono indicati nella figura 3.42

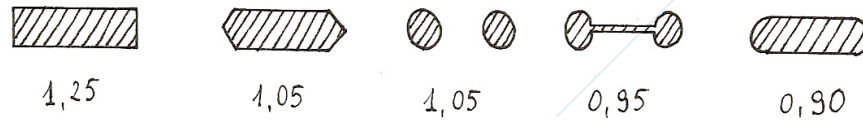


Figura 3.42: Fattore di forma  $k_2$  delle pile del ponte per la formula di Yarnell.

<sup>2</sup>Questo rigurgito non è riportato nel disegno di figura 3.37(a)

### 3.8 Tracce dell'onda di piena

Si è già detto nel capitolo 1 che in *condizioni di piena* risulta estremamente difficoltoso eseguire delle buone misurazioni dirette della *portata* in un corso d'acqua. Risulta a tal proposito interessante valutare le *tracce* lasciate sulle sponde dalle onde di piena: esse sono formate generalmente o da una striscia di limo depositato o dal segno dell'erba piegata. Tali tracce hanno il vantaggio di rimanere ben visibili anche *alcuni giorni* dopo l'evento permettendone così un rilievo mediante picchettaggi da parte di una squadra topografica.

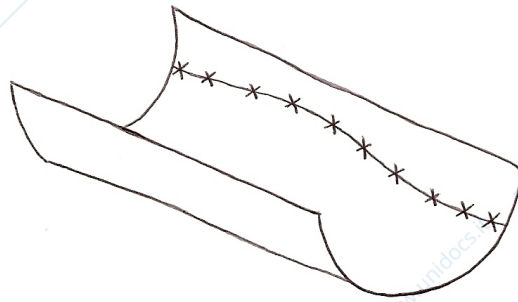


Figura 3.43: Picchettaggio della traccia dell'onda di piena.

#### 3.8.1 Valutazione della portata in condizioni di piena

Per la valutazione della portata in condizioni di piena è quindi possibile seguire un procedimento di questo tipo.

1. Si riporta in un grafico  $x - Z$  l'andamento della quota del fondo  $Z_f$  in un funzione della coordinata longitudinale  $x$  rispetto ad un sistema di riferimento per le quote, ciò avviene per punti attraverso il rilievo topografico di una serie di sezioni trasversali del canale.
2. Si riportano sullo stesso grafico le altezze dei punti picchettati  $Z_P(x)$ .
3. Noti il coefficiente di scabrezza del canale  $K_s$  e la condizione al contorno  $y_0$ , altezza di monte o di valle a seconda del tipo di corrente, si sfrutta l'equazione del profilo del pelo libero in moto permanente  $y = y(x; Q, K_s, y_0)$  (calcolabile alle differenze finite) per trovare la portata  $Q$  che minimizza una determinata funzione obiettivo relativa a:

$$\varepsilon = y + Z_f - Z_P \quad (3.66)$$

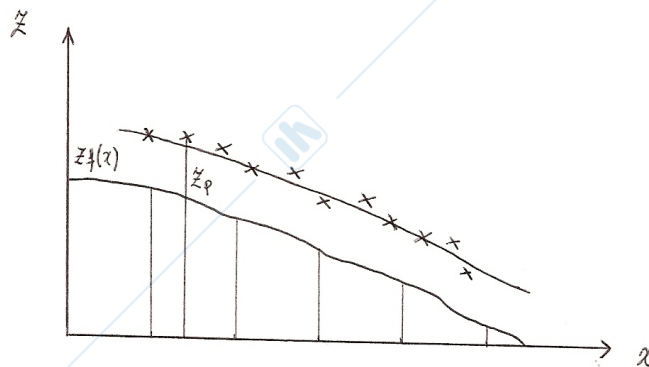


Figura 3.44: Valutazione della portata mediante la traccia dell'onda di piena.

4. Tipi possibili di *funzione obiettivo* sono:

(a) *minimi quadrati*:

$$\min_Q \left( \sum \varepsilon^2 \right) \quad (3.67)$$

(b) *minimax*:

$$\min_Q (\max |\varepsilon|) \quad (3.68)$$

### 3.8.2 Valutazione di variazioni del coefficiente di scabrezza

La differenza esistente tra i punti del profilo calcolati alle differenze finite e i punti calcolati può essere utile, entro certi limiti, per la valutazione di eventuali variazioni di scabrezza del canale nel tratto considerato.

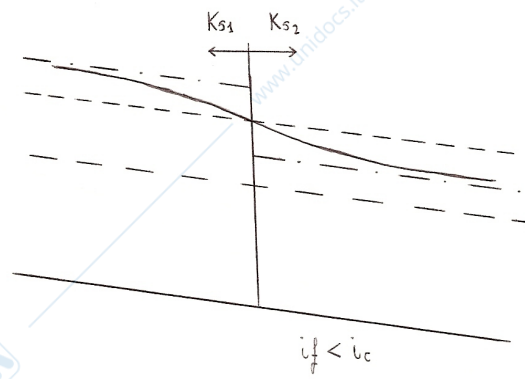


Figura 3.45: Variazione del coefficiente di scabrezza: profilo del pelo libero.

In base alla formula di Gauckler-Strickler si ha che:

$$Q = K_s R^{2/3} \Omega J^{1/2}$$

Grazie alla picchettatura del profilo e al rilievo topografico delle sezioni è possibile conoscere  $\Omega$ ,  $R$ ,  $y$  ed entro certi limiti  $J$ . Rimane incognita la coppia  $Q$ ,  $K_s$ . Supponiamo di aver scelto un unico valore di  $K_{s1}$  costante per tutto il tronco di canale considerato ma che in realtà questo passi dal valore  $K_{s1}$  nel primo tratto ad un valore  $K_{s2} > K_{s1}$  nel secondo (vedi anche relazione [3.26](#)). Ciò che si ottiene è un profilo che ben si adatta ai punti misurati nel primo tratto e male a quelli del secondo.

...

### 3.9 Estrapolazione della scala delle portate

In tratti di alveo in cui è noto il coefficiente di scabrezza  $K_s$ , i profili di moto permanente possono essere utilizzati per tarare la scala delle portate ed estrapolarla per alti valori della portata stessa.

Si è visto come in condizione di corrente lenta una perturbazione a valle produca un profilo di tipo D1 o D2 che converge verso monte a quello di moto uniforme. Il procedimento da seguire è il seguente: si fissa una portata  $Q$  e si calcola il profilo del moto permanente soggetto ad ipotesi arbitrarie circa la profondità  $y$  a valle ( $y_c, y_1, y_2, \dots$ ), in questo modo si riesce a determinare alle differenze finite il livello  $h$  corrispondente nella sezione di misura dove è installato l'idrometro ( $h_c, h_1, h_2, \dots$ ). Se la distanza tra sezione a valle e sezione di misura a monte è grande allora i valori di  $h$  convergono ad un unico valore (quello di moto uniforme). Per ottenere il livello corrispondente alla portata  $Q$  si effettua la media degli  $h$  calcolati.

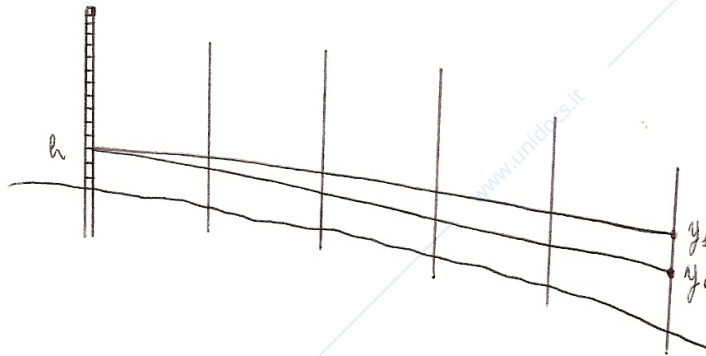


Figura 3.46: Calcolo dei profili del pelo libero.

Ciò può essere fatto per diversi valori della portata  $Q$  ottenendo in tal modo altre coppie  $(Q, h)$  da utilizzare per la determinazione della scala delle portate.

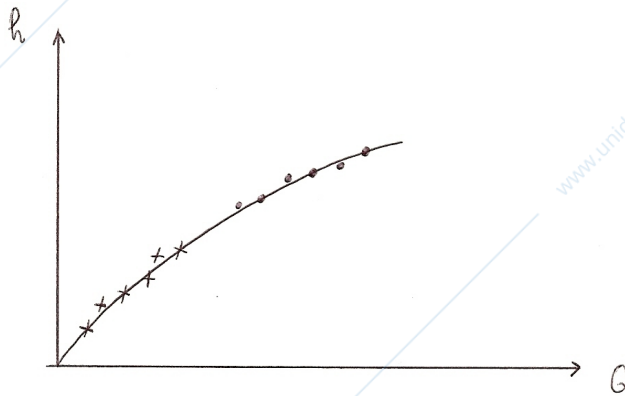


Figura 3.47: Estrapolazione della scala delle portate.

### 3.10 Alvei con sezioni composite o con scabrezza eterogenea

La sezione trasversale dei corsi d'acqua a pelo libero è spesso costituita da parti chiaramente diverse tra loro per la forma, la profondità e talvolta anche per la scabrezza.

Negli alvei naturali la parte centrale, più profonda, costituisce il *letto di magra* ( $K_s = 35 \div 45 \text{ m}^{1/3} \text{ s}^{-1}$ ), mentre le parti laterali si estendono sopra le *golene* ( $K_s = 15 \div 25 \text{ m}^{1/3} \text{ s}^{-1}$  in presenza di vegetazione rada) fino agli *argini maestri*, destinate al contenimento delle portate di piena.

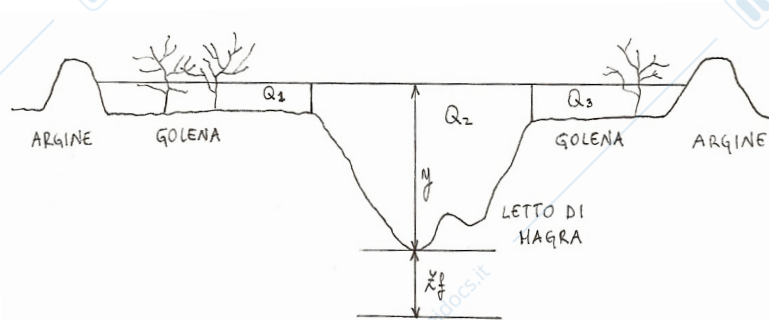


Figura 3.48: Esempio di alveo con sezione composta e scabrezza eterogenea.

#### 3.10.1 Calcolo della portata totale

Il deflusso in queste condizioni avviene con velocità differenti nelle varie parti sia per variazione del raggio idraulico sia del coefficiente di scabrezza. Per il calcolo della portata totale si può scrivere, in base alla legge di Gauckler-Strickler:

$$Q = K_s \Omega R^{2/3} J^{1/2} = K \cdot J^{1/2} \quad (3.69)$$

dove  $K$  è detta *capacità di convogliamento* (conveyance).

Dal punto di vista operativo si ipotizza che il livello d'acqua sia orizzontale lungo tutta la sezione e si valutano separatamente i contributi alla portata delle singole sottosezioni in cui si può suddividere l'intera sezione. La separazione si fa di solito mediante rette verticali. Si può quindi scrivere:

$$Q = \sum Q_i = \sqrt{J} \sum K_i \quad (3.70)$$

Le singole capacità di convogliamento riferite alle sottosezioni si possono calcolare una volta che siano noti il coefficiente di scabrezza, l'area della sottosezione ed il raggio idraulico:

$$K_i = K_{s_i} \Omega_i R_i^{2/3} \quad (3.71)$$

Per la valutazione del perimetro bagnato delle singole sottosezioni può venire il dubbio se considerare o meno l'interfaccia di separazione liquido-liquido. A tal proposito esistono due possibilità operative:

1. si suppone che le tensioni tangenziali all'interfaccia liquida, al pari di quelle all'interfaccia liquido-aria, siano trascurabili e quindi non si considerano tali tratti;
2. alcuni autori sostengono che:
  - per quanto riguarda le sottosezioni relative alle aree golenali si debba trascurare tale interfaccia in quanto la velocità in tali zone è più piccola di quella del canale principale;
  - per quanto riguarda la sottosezione relativa al canale principale si considera anche tale interfaccia in quanto, essendo le sezioni adiacenti a velocità più bassa, l'attrito non è trascurabile.

## 3.11 Curve nei canali

### 3.11.1 Correnti lente

L'effetto di una curva su una corrente lenta è messo in evidenza dalla *inclinazione* che assume la superficie libera, con una *sopraelevazione* sulla sponda esterna ed una *depressione* su quella interna.

Lo studio del fenomeno si può condurre in modo semplificato su una *curva circolare a fondo piano e pareti verticali* assumendo che le velocità dipendano dal raggio di curvatura  $r$  come nel *vortice irrotazionale*.

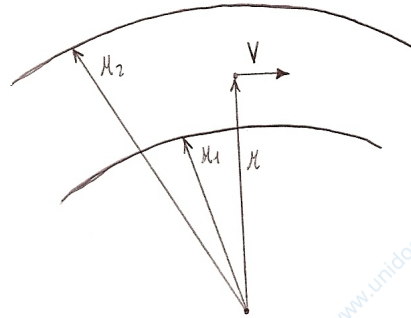


Figura 3.49: Curva circolare in un canale.

Ogni elemento fluido è soggetto alla forza specifica verticale  $g$  dovuta al potenziale gravitazionale e ad una *forza centrifuga* specifica orizzontale pari a  $V^2/r$ . Il pelo libero deve perciò assumere una pendenza trasversale per disporsi perpendicolarmente alla risultante di queste due forze. Ne consegue che la *pendenza del pelo libero* è data da:

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{V^2}{gr}$$

ed avendo assunto:

$$V = \frac{c_1}{r}$$

con  $c_1$  intensità del vortice, si ottiene:

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{c_1^2}{gr^3}$$

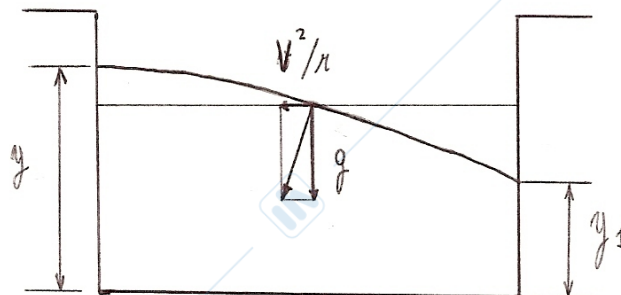


Figura 3.50: Andamento del pelo libero nella sezione trasversale di una curva circolare.

Integrando questa equazione fra i raggi  $r_1$  interno e  $r_2$  esterno della curva e le corrispondenti quote del pelo libero  $y_1$  e  $y_2$  si ha:

$$\Delta y = y_2 - y_1 = \frac{c_1^2}{2g} \left( \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) \quad (3.72)$$

Essendo  $V_m$  la velocità sulla curva di raggio medio  $r_m$  e  $B = r_2 - r_1$  la larghezza del canale si ha equivalentemente:

$$\Delta y = y_2 - y_1 = \frac{V_m^2 B}{g} \cdot \frac{r_m^3}{r_1^2 r_2^2} \quad (3.73)$$

### Formula di Grashof

Con buona approssimazione si può sostituire al raggio medio aritmetico quello medio geometrico, quindi  $r_m^3/r_1^2 r_2^2$  con  $1/r_m$ , e a  $V_m$  la velocità media  $\bar{V}$  nella sezione. Si ottiene in questo modo la *formula di Grashof*:

$$\Delta y \approx \frac{\bar{V}^2 B}{g r_m} \quad (3.74)$$

Essa fornisce una valutazione tecnicamente<sup>3</sup> soddisfacente del dislivello  $\Delta y$  per  $r_m/B \geq 1,5$ .

### 3.11.2 Correnti veloci

Il caso delle correnti veloci risulta notevolmente più complicato in quanto non essendo tali correnti influenzate da ciò che succede a valle la corrente “urta” violentemente contro le sponde esterne della curva, per cui si creano nel pelo libero dei sovralti che si propagano verso valle attaccati alla parete. La trattazione analitica del problema viene quindi tralasciata.

<sup>3</sup>Una tipica applicazione tecnica che necessita della conoscenza del dislivello del profilo trasversale è il *dimensionamento degli argini*. Questo dislivello non viene invece tenuto in considerazione nel tracciamento dei profili longitudinali del pelo libero.

## 3.12 Alvei in letti alluvionali: condizioni di stabilità

### 3.12.1 Introduzione

I corsi d'acqua naturali assumono una forma che è legata al *tipo di sedimento* presente sul fondo e sulle sponde e agli *aspetti idrologici* che si esplicano in quel corso d'acqua.

Normalmente i corsi d'acqua vengono considerati come qualcosa di fisso e stabile nel loro andamento plano-altimetrico; in realtà così non è: è evidente, ad esempio, che per riuscire a riempire di sedimenti le pianure alluvionali i corsi d'acqua devono nel tempo invadere tutta la pianura.

L'*arginazione di un corso d'acqua* equivale a fissarne l'andamento planimetrico e quindi ad impedire alluvionamenti della pianura circostante e ad imporre un *alluvionamento selettivo* della fascia interarginale. Ne consegue che col tempo il canale compreso tra gli argini maestri si alza e quindi il livello del piano campagna al suo interno diviene più alto di quello esterno. Tale innalzamento per sedimentazione riguarda soprattutto le golene.

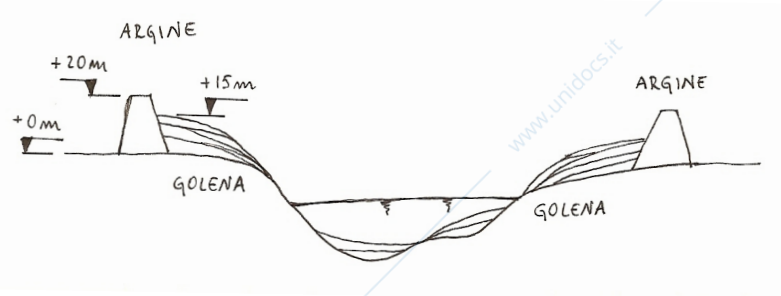


Figura 3.51: Arginazione di un corso d'acqua.

Si noti come questo tipo di dinamica fluviale non avvenga solamente alla scala dei tempi geologici (migliaia d'anni) bensì anche a quella che riguarda la vita tecnica delle opere di ingegneria fluviale (decine d'anni).

Ne consegue che l'analisi del *trasporto solido* (valutazione della portata solida e dell'inizio del trasporto al fondo) e dei *fenomeni di modellamento dell'alveo e di resistenza* siano di grande interesse ingegneristico.

### 3.12.2 Caratterizzazione del sedimento

#### Densità

Dal punto di vista idraulico la prima caratteristica distintiva dei materiali trasportati dalla corrente è la loro densità  $\rho_s$ .

#### Dimensioni

Ipotizzando di approssimare un granulo con un ellissoide, s'individuano i seguenti elementi:

- diametro *massimo*  $D_{\max}$ : corrisponde alla massima distanza tra due punti appartenenti al ciottolo;
- *sezione maestra*: corrisponde alla sezione di area massima tra tutte quelle ortogonali all'asse massimo;
- diametro *minimo*  $D_{\min}$ : è il diametro minimo tra tutti quelli appartenenti alla sezione maestra;
- diametro *medio*  $D_{\text{med}}$ : è il diametro appartenente alla sezione maestra ortogonale al diametro minimo.

La caratterizzazione di un miscuglio di granuli di varie dimensioni avviene mediante la *distribuzione granulometrica*, corrispondente alla distribuzione di probabilità dei diametri dei granuli all'interno del miscuglio.

Dal momento che la sedimentazione in un corso d'acqua non è omogenea, nel campionare i sedimenti per effettuarne l'analisi granulometrica bisogna stare molto attenti alla *rappresentatività del campione*. In funzione della dimensione dei granuli la tecnica di analisi granulometrica varia:

- ✓ limi e argille: *aerometria*;
- ✓ sabbie e ghiaie: *setacciatura* (il passaggio attraverso il setaccio è condizionato dal diametro medio della sezione maestra);
- ✓ ciottoli: *campionamento per numero alla superficie*.

La terza tecnica consiste nel misurare direttamente il diametro medio di singoli elementi lapidei campionati a caso. Il prelievo casuale di ciottoli dall'alveo avviene solitamente mediante grigliatura (gridding, quadrillage): si materializza, mediante fili e picchetti, una griglia a maglia quadrata sovrapposta al deposito alluvionale. L'apertura della maglia deve essere maggiore della dimensione massima del masso più grosso presente sul luogo del campionamento, in modo da evitare di prendere in considerazione due volte lo stesso elemento lapideo. Il numero  $N$  di nodi deve essere sufficientemente elevato: generalmente per questioni di comodità se ne considerano 100. Mediante un filo a piombo ci si pone nel nodo e si misura il masso stante sulla verticale. In generale il numero  $N'$  di diametri misurati è inferiore a quello degli  $N$  nodi in quanto capita spesso che il filo a piombo vada a cadere su sedimenti fini affioranti.

La percentuale di passante alla più piccola misura ( $D'$ ) è data da:

$$p = \frac{N - N'}{N} \cdot 100$$

La distribuzione granulometrica degli elementi misurati si ottiene con una tabella del tipo 3.2

Tabella 3.2: Distribuzione granulometrica ottenuta mediante campionamento per numero.

$k$	$D$	% passante
1	$D_1$	$(N - 1)/N \cdot 100$
2	$D_2$	$(N - 2)/N \cdot 100$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$N'$	$D'$	$(N - N')/N \cdot 100$

Per ottenere la *distribuzione granulometrica complessiva* è necessario riscalare a  $p$  la curva granulometrica ottenuta per i fini.

### Velocità di caduta in acqua ferma

Strettamente connessa con la dimensione e con la densità della particella è la sua *velocità limite*  $w_s$  di caduta libera in acqua ferma. La sua espressione per sfere di diametro  $d_s$  e densità  $\rho_s$  è:

$$w_s = \frac{1}{\sqrt{C_R}} \sqrt{\frac{4}{3} \left( \frac{\rho_s - \rho}{\rho} \right) g d_s} \quad (3.75)$$

dove:

- $C_R$ : *coefficiente di resistenza*.

### 3.12.3 Condizioni critiche: inizio del trasporto solido

I primi tentativi empirici di esprimere quantitativamente la condizione di equilibrio del materiale incoerente posto sul fondo di canali percorsi da acque torbide risalgono alla fine dell'Ottocento.

La ricerca della larghezza, della profondità e della pendenza necessaria per raggiungere una condizione in cui il deflusso di una data portata mantiene in movimento tutto il carico di materiale solido, senza deposito e senza erosione dell'alveo, richiede di associare all'*equazione del moto della corrente* altre condizioni che riguardano appunto il *fenomeno del trasporto solido* e lo *stato di equilibrio del fondo*.

La prima interpretazione teorica del fenomeno di inizio del trasporto solido si deve a Shields (1936).

#### Condizione critica per il fondo

L'indagine effettuata da Shields fu rivolta ad individuare la relazione che il valore  $\tau_{cr}$  della tensione al contorno  $\tau_0$ , ossia quella che provoca il primo movimento del materiale sul fondo, ha con le proprietà  $\mu$  e  $\rho$  del fluido e con le caratteristiche  $\rho_s$  e  $d_s$  dei granuli.

Si definisce *condizione critica per il fondo* l'inizio di instabilità dell'equilibrio dei sedimenti.

#### Tensione tangenziale sul fondo

Considerando un canale con pendenza  $i_f$ , con una corrente in moto uniforme ed isolando un tronco di lunghezza unitaria, si ha che:

- la resistenza agente sul fondo vale ( $p$ : perimetro bagnato):

$$\tau_0 \cdot 1 \cdot p$$

- la forza agente (peso dell'acqua proiettato lungo la direzione del moto) vale:

$$\gamma \cdot \Omega \cdot 1 \cdot \sin i_f \approx \gamma \cdot \Omega \cdot i_f$$

uguagliando i due termini si ottiene il valore della *tensione tangenziale agente sul fondo in moto uniforme*:

$$\tau_0 = \gamma \cdot R \cdot i_f \quad (3.76)$$

Nel caso di alvei a sezione rettangolare molto larga ( $R \approx y$ ):

$$\tau_0 = \gamma \cdot y \cdot i_f \quad (3.77)$$

#### Velocità di attrito

Invertendo e applicando la legge di Chézy ( $V = C\sqrt{gRi_f}$ ) si ottiene:

$$\tau_0 = \gamma y i_f = \rho g y i_f = \frac{\rho V^2}{C^2}$$

da cui si definisce la *velocità d'attrito*:

$$V^* = \frac{V}{C} = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \quad (3.78)$$

#### Formulazione di Shields: curva di instabilità

Si suppone che in *condizioni critiche* la *resistenza al moto* dei granuli di diametro  $d_s$  e peso specifico  $\gamma_s$ , che dipende linearmente dal *peso del granulo immerso* (ossia il peso proprio depurato della spinta archimedeica) ed è quindi *proporzionale* a:

$$(\gamma_s - \gamma)d_s^3$$

uguagli la *forza di trascinamento al fondo* all'inizio del trasporto:

$$C_R \tau_{cr} d_s^2$$

Sulla base delle informazioni sperimentali si può ritenere che il coefficiente  $C_R$  sia funzione, a parità di forma dei sedimenti, di un *numero tipo Reynolds* costruito con grandezze caratteristiche del moto attorno al granulo:

- velocità d'attrito  $V^*$ ;
- diametro del granulo  $d_s$ ;
- viscosità cinematica del fluido  $\nu = \mu/\rho$ .

Esso viene detto *numero di Reynolds d'attrito*:

$$Re^* = \frac{V^* d_s}{\nu} \quad (3.79)$$

Ne deriva che:

$$\frac{\tau_{cr}}{(\gamma_s - \gamma) d_s} = f\left(\frac{V^* d_s}{\nu}\right) \quad (3.80)$$

Il legame tra  $Re^*$  ed il *parametro di stabilità*:

$$\tau^* = \frac{\tau_0}{(\gamma_s - \gamma) d_s} \quad (3.81)$$

è rappresentato, in condizioni critiche, dalla *curva di instabilità di Shields*, riportata nel grafico di figura 3.52

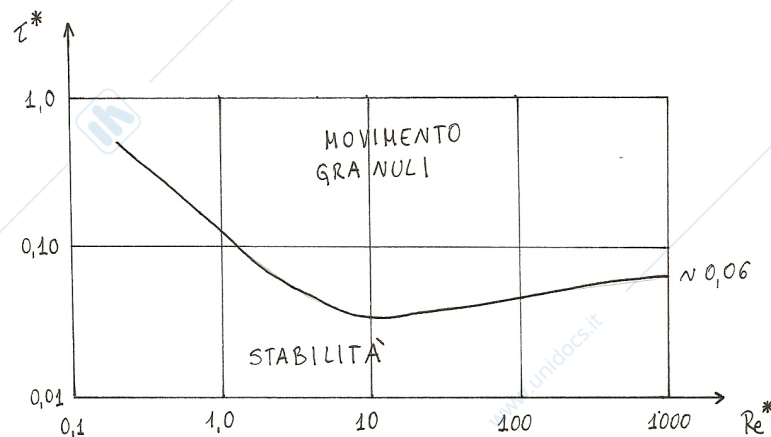


Figura 3.52: Curva di instabilità di Shields.

Tale curva è stata ricavata sulla base di numerose esperienze su materiali incoerenti di differente densità, ma sempre con *forme pseudosferiche* e con *granulometria uniforme*. Per l'applicazione ai *letti alluvionali*, dal momento che interessa principalmente che non vengano trasportati i ciottoli più grossi, si verifica la condizione di stabilità con il  $D_{80}$  della distribuzione granulometrica.

È evidente l'analogia con l'andamento delle curve che rappresentano la dipendenza funzionale del coefficiente di resistenza dal numero di Reynolds nei moti nelle condotte in pressione (diagramma di Moody). Anche in questo caso sono ben visibili *due regimi limite*:

- per bassi  $Re^*$  (fino a circa 2) le particelle restano immerse nello strato dominato dalla viscosità:

$$\tau_{cr}^* = \frac{\tau_{cr}}{(\gamma_s - \gamma) d_s} \quad (3.82)$$

è inversamente proporzionale a  $Re^*$ ;

- per alti valori di  $Re^*$  (maggiori di 300-400) la turbolenza è completamente sviluppata e  $\tau_{cr}^*$  diventa indipendente da  $Re^*$ , assestandosi su un valore pari a circa 0,06.

### 3.13 Principi di modellistica idraulica da laboratorio

Mediante i modelli da laboratorio è possibile studiare fenomeni idraulici particolarmente complessi che non sono possibili da analizzare mediante *modelli fisico-matematici*. L'applicazione principale di tali modelli è relativa alle *costruzioni idrauliche*. Il vantaggio fornito dalla riproduzione mediante *modello* di un *prototipo* deriva dalla possibilità di tenere sotto controllo tutte le *condizioni* dell'esperimento e di misurarne con una certa facilità i principali *parametri* fisici.

È evidente che nella maggior parte dei casi la riproduzione del prototipo in scala reale non è, per questioni di spazio, fattibile. Risulta inevitabile quindi la realizzazione di *modelli in scala ridotta* imponendo una determinata *scala di rapporto* tra una misura effettuata sul prototipo e la misura analoga effettuata sul modello.

#### Scala geometrica

Si definisce *scala geometrica* del modello:

$$n_L = \frac{x_P}{x_M} \quad (3.83)$$

dove:

- $x_P$ : misura di lunghezza relativa al prototipo [L];
- $x_M$ : misura di lunghezza relativa al modello [L].

Risulta sempre  $n_L \geq 1$ , nel caso di uguaglianza si parla di *modelli in scala reale*.

#### Leggi e condizioni di scala

Una volta definita la scala geometrica bisogna definire le scale per le altre grandezze del modello idraulico: tempo, velocità, portata, viscosità, . . . Per poter fare ciò bisogna tenere conto di:

- *leggi di scala*: sono leggi fisiche valide sempre sia nel modello che nel prototipo; ad esempio: legge di gravitazione, legge di resistenza del moto, . . .
- *condizioni di scala*: sono condizioni che il realizzatore del modello impone; sono legate ad un giudizio di rilevanza che viene attribuito a particolari gruppi adimensionali che discendono direttamente dal teorema di Buckingham<sup>4</sup>; nel caso dei problemi idraulici si considerano:
  - numero di Froude: rapporto tra le forze inerziali ( $V$ ) e quelle gravitazionali ( $\sqrt{gy_m}$ );
  - numero di Reynolds: rapporto tra le forze inerziali ( $V$ ) e quelle viscosi ( $\nu/4R$ ).

A seconda del fatto che il fenomeno sia dominato da inerzia e gravità o da inerzia e viscosità si pone l'uguaglianza tra modello e prototipo di uno dei due numeri. Dalle considerazioni che seguono sulla derivazione di una scala risulterà evidente come la condizione di uguaglianza di entrambi i numeri sia possibile solo nel caso, molto particolare, di modelli in scala reale.

#### 3.13.1 Derivazione di una scala

Il processo di derivazione di una scala si basa su alcune leggi.

- Se una quantità è data dalla somma di due o più quantità allora la scala è data dalla somma delle scale:

$$Z = X + Y \longrightarrow n_Z = n_X + n_Y \quad (3.84)$$

<sup>4</sup>Il teorema di Buckingham o teorema  $\pi$  afferma che dato un problema descritto da un certo numero di equazioni in cui siano presenti  $n$  variabili fisiche, se le dimensioni fondamentali di queste  $n$  variabili sono  $x$ , allora il problema può essere completamente descritto da  $n - x$  variabili adimensionali. È possibile quindi studiare il medesimo problema usando un numero inferiore di variabili purché queste siano adimensionali. Adimensionalizzare un'equazione significa moltiplicare o dividere i suoi membri per variabili fisiche finché tutti i membri non diventano privi di dimensioni.

- Se una quantità è data dal prodotto di due o più quantità allora la scala è data dal prodotto delle scale:

$$Z = X \cdot Y \longrightarrow n_Z = n_X \cdot n_Y \quad (3.85)$$

Si parla di *modello distorto* quando la scala delle lunghezze in una direzione è diversa dalla scala delle lunghezze in un'altra. In questo caso non vale la regola della somma.

Deriviamo ora le scale per le due condizioni di scala viste in precedenza.

### Condizione di scala alla Froude

Supponiamo che la condizione di scala sia:

$$n_{Fr} = \frac{Fr_P}{Fr_M} = 1 \quad (3.86)$$

Ne consegue che:

$$\frac{n_V}{\sqrt{n_g \cdot n_H}} = 1$$

dove:

- $n_V$ : scala delle velocità;
- $n_g$ : scala dell'accelerazione di gravità;
- $n_H$ : scala altimetrica.

Supponendo, come è lecito fare per le applicazioni tecniche di questo tipo, che  $n_g = 1$  si ottiene:

$$n_V = \sqrt{n_H} \quad (3.87)$$

Poiché  $V = x/t$  si ha che:

$$n_V = \sqrt{n_H} = \frac{n_L}{n_t} \quad (3.88)$$

Supponendo che il modello non sia distorto ( $n_H = n_L$ ) si ottiene:

$$n_t = \sqrt{n_L} = \sqrt{n_H} = n_V \quad (3.89)$$

Per quanto riguarda la scala delle portate si ha che:

$$n_Q = \frac{n_L^3}{n_t} = n_L^{5/2} \quad (3.90)$$

### Condizione di scala alla Reynolds

Supponiamo che la condizione di scala sia:

$$n_{Re} = \frac{Re_P}{Re_M} = 1 \quad (3.91)$$

Ne consegue che:

$$\frac{n_V \cdot n_H}{n_\nu} = 1$$

Dal momento che per le applicazioni idrauliche principali si utilizza acqua<sup>5</sup>  $n_\nu = 1$  e quindi:

$$n_V = \frac{1}{n_H} \quad (3.92)$$

È evidente quindi che la condizione affinché possa valere sia la condizione alla Froude che quella alla Reynolds è che:

$$n_V = \sqrt{n_H} = \frac{1}{n_H} \longrightarrow n_H = 1 \quad (3.93)$$

e quindi che il modello sia in scala reale.

<sup>5</sup>Un esempio di modello in cui si utilizza un fluido diverso dall'acqua è il *modello di Hele-Shaw*: il moto di un sottile strato d'olio tra due lastre di vetro parallele equivale al flusso d'acqua in un mezzo poroso omogeneo ed isotropo.

### Applicazione ai modelli idraulici

Nel caso dei modelli idraulici applicati alle costruzioni idrauliche si impone la *condizione di scala alla Froude*, in quanto lo scopo principale non è quello di simulare gli effetti viscosi e di attrito (risultato ottenibile con una condizione di scala alla Reynolds). Valgono inoltre le seguenti considerazioni:

- ✓ dal momento che il modello considera effetti localizzati se la regione non è troppo estesa le perdite di energia sono piccole;
- ✓ anche tenendo in conto le perdite di energia, dal momento che  $Re_M$  e  $Re_P$  sono noti è possibile mediante le leggi di scala correggere, ad esempio, la scabrezza di parete del modello in modo da ottenere lo stesso effetto del prototipo.

Bisogna fare attenzione quando  $Re_M < Re_P$  in quanto in tal caso lo spazio percentuale occupato dallo *strato limite* nel modello diventa maggiore di quello occupato nel prototipo.

## 3.14 Esercizi

### 3.14.1 Tracciamento di un profilo di moto permanente

Si vuole tracciare il profilo di moto permanente gradualmente variato di una corrente con portata per unità di larghezza pari a  $q = 8 \text{ m}^2/\text{s}$  che transita in un alveo a sezione rettangolare molto larga che passa da una pendenza del 4% ad una pendenza di 0,8 m/Km. Si supponga che il coefficiente di scabrezza dell'alveo secondo Gauckler-Strickler sia pari a  $K_s = 45 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$ .

#### Svolgimento

1. Determinazione della profondità critica.

$$y_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = \sqrt[3]{\frac{8^2}{9,81}} = 1,87 \text{ m}$$

2. Determinazione delle due profondità di moto uniforme.

Alveo con pendenza del 4% (tronco di monte):

$$y_{0m} = \left( \frac{q}{K_s \sqrt{i_{fm}}} \right)^{3/5} = \left( \frac{8}{45 \sqrt{0,04}} \right)^{3/5} = 0,93 \text{ m} < 1,87 \text{ m} \implies \text{alveo a forte pendenza}$$

Alveo con pendenza di 0,8 m/Km (tronco di valle):

$$y_{0v} = \left( \frac{q}{K_s \sqrt{i_{fv}}} \right)^{3/5} = \left( \frac{8}{45 \sqrt{0,0008}} \right)^{3/5} = 3,01 \text{ m} > 1,87 \text{ m} \implies \text{alveo a debole pendenza}$$

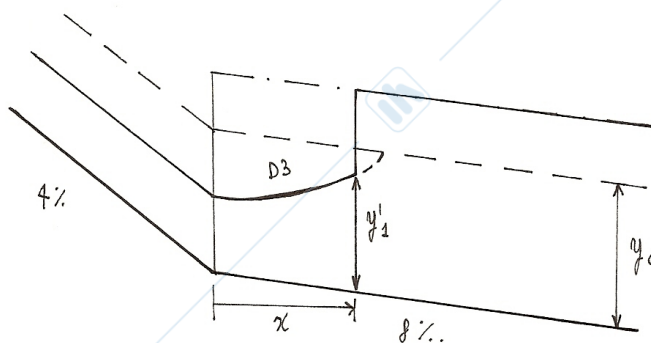
3. Valutazione delle condizioni al contorno.

Il *tronco di monte* in condizioni di moto uniforme è in corrente veloce, quindi, in assenza di condizioni specifiche, si può supporre che all'*estremo di monte* il profilo converga alla profondità di moto uniforme:  $y \equiv y_{0m}$ .

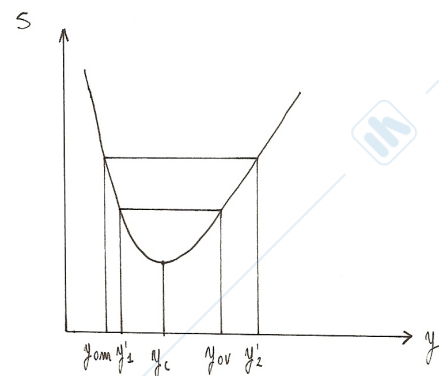
Il *tronco di valle* in condizioni di moto uniforme è in corrente lenta, quindi, in assenza di condizioni specifiche, si può supporre che all'*estremo di valle* il profilo converga alla profondità di moto uniforme:  $y \equiv y_{0v}$ .

4. Valutazione dei vincoli interni.

L'unico vincolo interno è la *variazione di pendenza* che, trasformando la corrente veloce in corrente lenta, genera un *risalto idraulico*.



(a) Profilo del moto.



(b) Spinta totale in funzione dell'altezza della corrente.

5. Determinazione della posizione del risalto.

Numero di Froude della corrente veloce di monte:

$$Fr_{0m} = \frac{q}{y_{0m}\sqrt{gy_{0m}}} = \frac{8}{0,93\sqrt{9,81 \times 0,93}} = 2,85$$

Numero di Froude della corrente lenta di valle:

$$Fr_{0v} = \frac{q}{y_{0v}\sqrt{gy_{0v}}} = \frac{8}{3,01\sqrt{9,81 \times 3,01}} = 0,49$$

Altezza coniugata dell'altezza di moto uniforme di monte:

$$y'_2 = \frac{y_{0m}}{2} \left[ -1 + \sqrt{1 + 8Fr_{0m}^2} \right] = \frac{0,93}{2} \left[ -1 + \sqrt{1 + 8 \times 2,84^2} \right] = 3,31 \text{ m} > y_{0v} = 3,01 \text{ m}$$

Altezza coniugata dell'altezza di moto uniforme di valle:

$$y'_1 = \frac{y_{0v}}{2} \left[ -1 + \sqrt{1 + 8Fr_{0v}^2} \right] = \frac{3,01}{2} \left[ -1 + \sqrt{1 + 8 \times 0,49^2} \right] = 1,06 \text{ m} > y_{0m} = 0,93 \text{ m}$$

Ne risulta che  $S_2 < S_1$  e quindi che la corrente sul cambio di pendenza tende a spingere il moto uniforme lento verso valle. Poiché la corrente veloce si propaga nell'alveo a debole pendenza l'unico profilo possibile è il D3. Il risalto si forma quando l'altezza vale  $y'_1 = 1,06$  m. Per individuare la posizione del risalto idraulico basta calcolare alle differenze finite l'andamento del profilo D3 tra le altezze 0,93 m e 1,06 m, utilizzando le relazioni:

$$E = y + \frac{q^2}{2gy^2} \qquad J = \frac{q^2}{y^{10/3}K_s^2} \qquad \Delta x = \frac{\Delta E}{i_f - \bar{J}}$$

$y$ (m)	$E$ (m)	$J$ (m/Km)	$\Delta E$ (m)	$\bar{J}$ (m/Km)	$\Delta x$ (m)	$x$ (m)
0,93	4,70	40,3				0
0,95	4,56	37,5	-0,14	38,9	3,67	3,67
1,00	4,26	31,6	-0,30	34,6	8,88	12,55
1,05	4,01	26,9	-0,25	29,3	8,77	21,32
1,06	3,96	26,0	-0,05	26,5	1,95	23,27

Si ottiene  $x = 23,27$  m.

### 3.14.2 Localizzazione di un risalto in corrispondenza di un salto di fondo

In un canale rettangolare si presenta un salto di fondo di altezza  $\delta = 1,00$  m. Con la portata per unità di larghezza  $q = 6,00$  m<sup>2</sup>/s la profondità, a valle del gradino, vale 3,50 m. Calcolare entro quali limiti può oscillare la profondità  $y_m$  della corrente a monte del gradino affinché il risalto resti localizzato in corrispondenza del gradino stesso.

Si considerano come posizioni estreme del risalto idraulico quella in cui la sua sezione iniziale coincide praticamente con la sezione del salto di fondo (caso A) e quella in cui, spostandosi il risalto verso monte, la sua sezione terminale viene a trovarsi molto vicino al gradino senza sorpassarlo (caso B). Al caso A corrisponde il limite inferiore della profondità di monte mentre al caso B il limite superiore: è evidente per quanto visto in precedenza che, nel caso di correnti veloci, un aumento della spinta verso valle si ha con una diminuzione dell'altezza della corrente a monte.

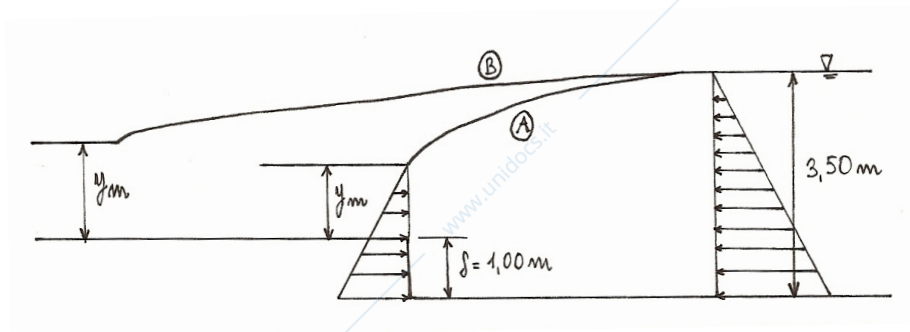


Figura 3.53: Localizzazione di un risalto in corrispondenza di un salto di fondo: caso A e caso B.

#### Caso A

Si applica al risalto l'equazione della quantità di moto, tenendo conto anche della spinta verso valle fornita dalla parete dello scalino:

$$\gamma \frac{(y_m + \delta)^2}{2} + \rho \frac{q^2}{y_m} = \gamma \frac{y_v^2}{2} + \rho \frac{q^2}{y_v} = \frac{S}{B}$$

Sostituendo i dati nell'equazione, il termine noto diventa:

$$\frac{y_v^2}{2} + \frac{q^2}{gy_v} = 7,17 \text{ m}^2$$

quindi, dall'equazione della quantità di moto divisa per  $\gamma$ :

$$\frac{(y_m + 1,00)^2}{2} + \frac{6,00^2}{9,81 \times y_m} = 7,17 \text{ m}^2$$

si ottiene:  $y_m = 0,63$  m.

#### Caso B

Dal momento che il risalto idraulico è spostato tutto a monte del gradino è come se quest'ultimo non ci fosse. Ne consegue che si può applicare direttamente l'equazione della quantità di moto come fatto per il risalto in alveo rettangolare, che equivale in ultima analisi ad applicare la relazione per la determinazione delle profondità coniugate del risalto idraulico.

Il numero di Froude nella sezione a valle vale:

$$Fr_v = \frac{q}{y_v \sqrt{gy_v}} = \frac{6,00}{2,50 \sqrt{9,81 \times 2,50}} = 0,485$$

L'altezza della corrente a monte coniugata di quella a valle vale:

$$y_m = \frac{y_v}{2} \left( -1 + \sqrt{1 + 8Fr_v^2} \right) = \frac{2,50}{2} \left( -1 + \sqrt{1 + 8 \times 0,485^2} \right) = 0,87 \text{ m}$$

Il risalto resta quindi localizzato sul gradino finché la profondità di monte è contenuta nel campo  $0,63 \text{ m} < y_m < 0,87 \text{ m}$ .

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

### 3.14.3 Calcolo della portata sfiorabile da uno stramazzo laterale

Uno sfioratore laterale sulla sponda di un canale rettangolare largo 5,0 m ha soglia lunga 8,0 m alla quota  $d = 1,30$  m sul fondo. Si vuole calcolare la portata sfiorabile in moto permanente partendo da un valore a monte  $Q_0 = 25 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$  ed essendo imposta a valle l'altezza d'acqua  $y_L = 2,10$  m sul fondo.

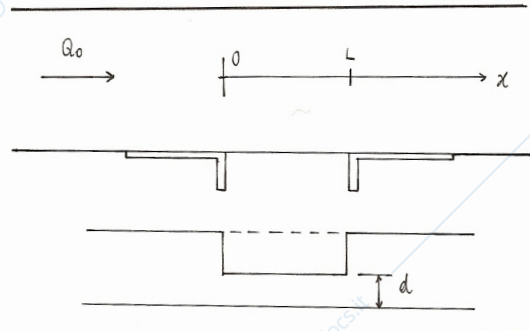


Figura 3.54: Canale con stramazzo laterale.

#### Svolgimento

In prima approssimazione, considerato che la profondità della corrente lungo lo sfioratore sarà mediamente attorno a 2 m, si valuta la portata media sfiorata per unità di lunghezza con la formula per gli stramazzi:

$$q_m = C_Q \sqrt{2g} (y_m - d)^{3/2} = 0,40 \sqrt{2 \times 9,81} \times 0,7^{3/2} = 1,0 \text{ m}^3\text{s}^{-1}/\text{m}$$

La portata finale deve risultare quindi intorno a  $Q_L = 25 - 1,0 \times 8,0 = 17 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$  e ad essa corrisponde l'energia specifica:

$$E_L = 2,10 + \frac{17^2}{2 \times 9,81 \times 5^2 \times 2,10^2} = 2,234 \text{ m}$$

Si esegue quindi il calcolo del profilo con passo  $\Delta x = 1$  m utilizzando le equazioni:

$$\begin{cases} dQ(x) = -q(x) dx \\ q_u(x) = C_Q \sqrt{2g} (y - d)^{3/2} \\ E = y + Q^2(x)/2g\Omega^2 = y + Q^2(x)/2gB^2y^2 = E_L = \text{cost} \end{cases} \quad (3.94)$$

ottenute ipotizzando l'energia specifica costante lungo il tronco di canale interessato dallo stramazzo (che equivale a trascurare le perdite di carico in quel tratto), scritte nella forma:

$$\begin{cases} E = y_i + Q_i^2/2g5^2y_i^2 = 2,234 \text{ m} & (i = 0, 1, \dots, 7) \\ \Delta Q_i = q_i = C_Q \sqrt{2g} (y_i - d)^{3/2} \\ Q_{i+1} = Q_i - \Delta Q_i \end{cases}$$

e conoscendo le condizioni del moto nella sezione iniziale ( $Q_0 = 25 \text{ m}^3/\text{s}$ ). I risultati sono riportati nel quadro che segue:

$x$ (m)	$Q$ ( $\text{m}^3\text{s}^{-1}$ )	$y$ (m)	$q$ ( $\text{m}^3\text{s}^{-1}/\text{m}$ )
0	25,000	1,869	0,760
1	24,240	1,903	0,829
2	23,411	1,936	0,897
3	22,514	1,967	0,965
4	21,549	1,996	1,028
5	20,521	2,024	1,091
6	19,430	2,051	1,152
7	18,277	2,076	1,210
8	17,067	2,099	-

Si constata un'ottima concordanza del valore finale dell'altezza d'acqua con il dato 2,10 m. La portata complessivamente sfiorabile risulta pari a  $25,00 - 17,07 = 7,93 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ .

### Profili del moto lungo la soglia

Come al solito si effettua la distinzione:

- *corrente lenta*: il profilo lungo la soglia dello sfioratore è *crescente* verso valle; l'energia specifica  $E$  è data dalla corrente indisturbata di valle;
- *corrente veloce*: il profilo lungo la soglia dello sfioratore è *decrescente* verso valle; l'energia specifica  $E$  è data dalla corrente indisturbata di monte.

Generalmente si evita di costruire sfioratori laterali in correnti veloci senza averle prima rallentate in quanto la diminuzione dell'altezza della corrente può essere tale da far sì che lo stramazzo non venga più alimentato e che, in presenza di una corrente lenta a valle, si formi un risalto idraulico.

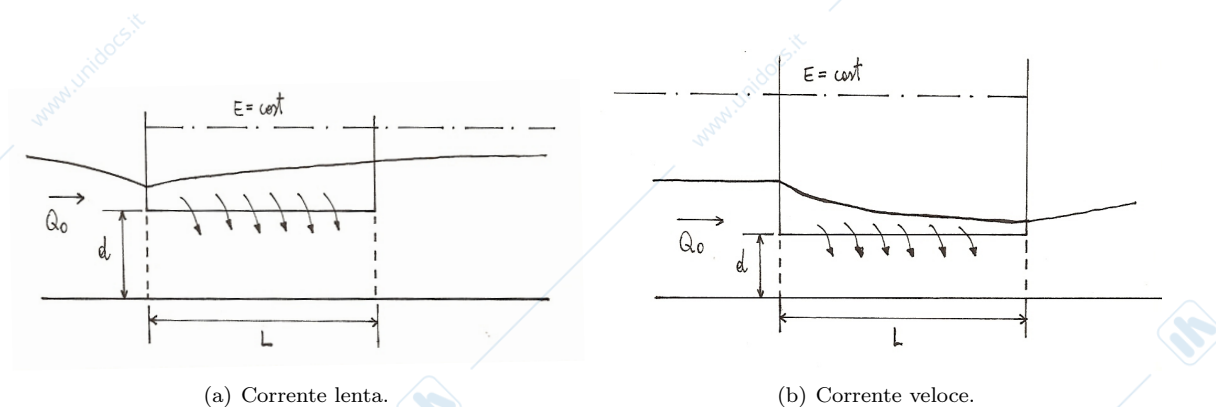


Figura 3.55: Profili di moto su uno stramazzo laterale.

### Osservazione: afflusso laterale perpendicolare alla direzione del canale

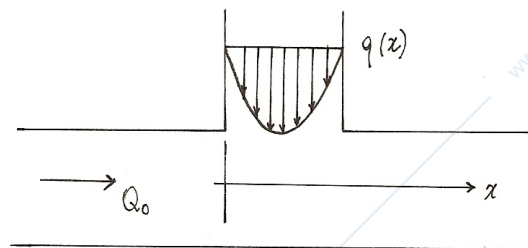


Figura 3.56: Canale con afflusso laterale.

Nel caso in cui i filetti fluidi affluenti siano perpendicolari alla direzione della corrente nel canale, la variazione di quantità di moto è notevole (grande dissipazione di energia) per cui non si può applicare la conservazione dell'energia ma bisogna ricorrere alla costanza della spinta totale:

$$S(x) = \gamma \eta_g(x) \Omega + \rho \frac{Q^2}{\Omega} = \text{cost} \quad (3.95)$$

dove la portata è nota e varia secondo:

$$Q(x) = Q_0 + \int_0^x q(x) dx \quad (3.96)$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

# Bibliografia

- [1] Moisélo U., *Idrologia tecnica*, Pavia, Edizioni La Goliardica Pavese, 1999
- [2] Soong T.T., *Fundamentals of probability and statistics for engineers*, John Wiley & Sons Ltd, 2004
- [3] Montgomery D.C., Runger G.C., *Applied statistics and probability for engineers*, III ed., John Wiley & Sons Ltd, 2003
- [4] Citrini D., Nosedà G., *Idraulica*, II ed., Milano, Casa Editrice Ambrosiana, 1987
- [5] Marchi E., Rubatta A., *Meccanica dei fluidi*, I ed., Torino, UTET, 1981

