IL METODO DEGLI ELEMENTI FINITI PER L'ANALISI DEI PRODOTTI INDUSTRIALI

#1 LE VERIFICHE DI RESISTENZA

La corretta applicazione del FEM richiede la conoscenza dei concetti di base della meccanica delle strutture, senza la quale è non è possibile scegliere il software, modellare correttamente, valutare l'accuratezza ed interpretare i risultati.

Assegnata una struttura, è necessario individuare un modello attraverso cui caratterizzare la severità dei carichi applicati e confrontarla con la resistenza dei materiali utilizzati.

MODELLI DI STRUTTURE

1. Strutture a travi: quando una dimensione risulta molto maggiore delle altre (schema monodimensionale). Reagiscono solo assialmente, a trazione e compressione; sono caricate solo sui nodi;
2. Strutture a guscio: quando una dimensione risulta molto minore delle altre (schema bidimensionale);
3. Strutture solide: quando non è possibile definire uno schema affidabile mono o bidimensionale o quando si vogliono indagare gli effetti locali (FEM).

Una volta definito lo schema a travi è possibile schematizzare i carichi applicati ed i vincoli cinematici ed eseguire l'analisi della struttura, il cui risultato è la valutazione delle sollecitazioni (verifica di resistenza) e il calcolo delle deformazioni (freccia). La teoria non ci dice cosa succede fra un nodo e l'altro, ma fornisce indicazioni generali relative ai nodi.

Applicando opportunamente una combinazione di vincoli semplici ad una struttura a travi si può ottenere una struttura isostatica (diversamente, la struttura risulta labile e non analizzabile).

In una struttura a travi i carichi applicati danno luogo ad azioni interne che possiamo suddividere in:
- Azione assiale ← →
- Taglio
- Flessione
- Torsione

Occorre conoscere la lunghezza, la sezione e i vincoli (limitazioni dei movimenti finalizzati all'aquilibrio).
Passi da seguire per l'analisi delle strutture a travi:
1) Calcolo delle reazioni vincolari
2) Calcolo delle azioni interne e tracciamento relativi diagrammi
3) Calzolo degli sforzi
4) Calcolo degli spostamenti e delle rotazioni

1) In funzione delle condizioni di vincolo, si verifica che la struttura non sia labile e si impongono le condizioni di equilibrio esplicitando le componenti di reazioni incognite, in funzione del vincoli imposti;
2) Note le reazioni vincolari è possibile calcolare, sezione per sezione, le "azioni interne", che portano in equilibrio, sezione per sezione, la struttura, *immaginata separata in due parti.*
3) E' possibile rappresentare l'andamento delle azioni interne in una struttura tracciando i relativi diagrammi.
4) Gli sforzi in un corpo possono essere definiti come le azioni interne per unità di superficie che si scambiano reciprocamente due sezioni adiacenti lungo un immaginario piano di separazione.
   Se gli sforzi sono tangenti a questo piano si dicono di sforzi taglio, τ, se sono normali a questo piano si dicono sforzi normali, σ , di trazione o di compressione.

Note le azioni interne è possibile calcolare agevolmente gli sforzi da esse generati, supponendo verificate le seguenti ipotesi:
1. travi ad asse rettilineo;
2. piccoli spostamenti e deformazioni;
3. materiale elastico lineare, omogeneo e isotropo;
4. sezione uniforme lungo la linea d'asse o variabile con continuità;
5. carichi applicati solo sulle basi e assenza di forze di volume;
6. distanza sufficiente dai punti di applicazione dei carichi e dai vincoli.

AZIONE ASSIALE

La distribuzione degli sforzi deve rispettare l'equilibrio della sezione: di conseguenza la risultante degli sforzi deve essere pari all'azione assiale e il momento risultante deve essere nullo.

In un corpo soggetto a trazione e composto da materiale elastico lineare, sforzi e deformazioni sono legati dalla Legge di Hooke: $\sigma = E\ \varepsilon$

che esprime una proporzionalità diretta tra sforzi e deformazioni per mezzo della costante E, caratteristica del materiale, denominata modulo elastico (N/mm2).

L'allungamento elastico della molla può essere espresso come: $\delta = \frac{P\ l}{E\ A}$

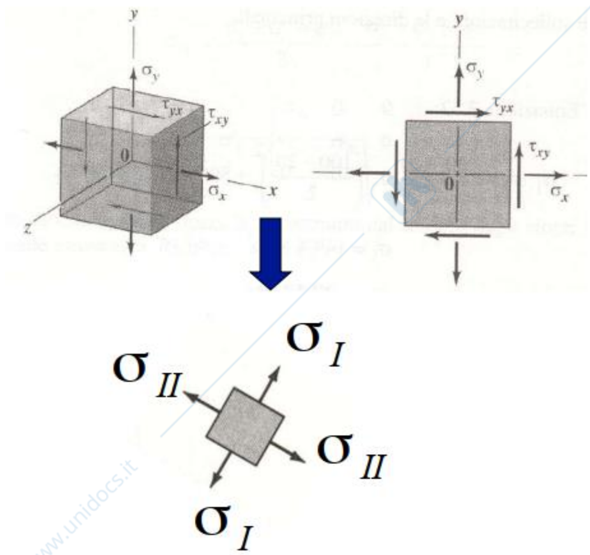
MOMENTO FLETTENTE

L'andamento degli sforzi nella sezione deve soddisfare l'equilibrio (risultante nulla, momento risultante pari al momento applicato) : $\sigma = \frac{M\ y}{J}$

TORSIONE

Anche in questo caso, la distribuzione degli sforzi deve rispettare l'equilibrio (risultante nulla, momento pari al momento torcente applicato : $\tau = \frac{T\ r}{J}$

Il significato degli sforzi limite (Sigma limite, Tau limite) varia a seconda del materiale. Per i materiali duttili (leghe metalliche) si considera come condizione lo sfrozo di snervamento. per i materiali fragili la rottura. Il coefficiente di sicurezza n è, in mancanza di altre indicazioni, posto pari a 1.5 per i materiali duttili e 3 per i materiali fragili.



STATI DI SFORZO COMPOSTI

Molte volte gli elementi strutturali sono sollecitati da una combinazione di azioni interne, che danno luogo a componenti di sforzo che agiscono su piani differenti e con direzioni differenti.

Poiché i dati di resistenza del materiale sono relativi, nella quasi totalità dei casi, a prove di trazione semplice, non è possibile impostare la verifica di resistenza confrontando le componenti dello stato di sforzo generico con dati di resistenza relativi alla trazione monoassiale.

Il primo passo è trovare gli sforzi principali: sono gli sforzi che agiscono in un punto lungo quelle direzioni per le quali sono nulli gli sforzi di taglio.

Per stati di sforzo piani si ha: $\sigma_{I,II} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau^2}$

E' necessario definire grandezze che rendano confrontabili stati di sforzo differenti in relazione al pericolo del cedimento: una grandezza indice del pericolo, che renda equivalenti rispetto al pericolo di cedimento tutti gli stati di sforzo che ne presentano uguale valore.

La definizione di queste grandezze deve essere invariante rispetto al sistema di riferimento deve essere esprimibile attraverso gli sforzi principali.

Deve avere, inoltre, una rispondenza sperimentale. Deve, cioè, permettere di prevedere il cedimento in modo accurato al variare delle condizioni di esercizio dipende dai meccanismi di cedimento del materiale.

$$\sigma_{prin\,max} \le \frac{R_m}{\eta}$$

$$|\sigma_{prin\,min}| \le \frac{|R_c|}{\eta}\ (se\ \sigma_{prin\,min}\ di\ compressione)$$

I materiali fragili si rompono per distacco, perpendicolarmente alla massima sollecitazione.

La grandezza indice del pericolo è la massima sollecitazione principale (sono equivalenti rispetto al pericolo del cedimento tutti

gli stati di sforzo che presentano ugual massimo sforzo principale).
Un'analoga limitazione può essere formulata per la compressione È questo il criterio di Galileo-Rankine.
I materiali duttili si rompono per scorrimento, per effetto delle Tau.
La grandezza indice del pericolo è il massimo sforzo di taglio, che si raggiunge sui piani inclinati a 45° rispetto alle direzioni principali (sono equivalenti rispetto al pericolo del cedimento tutti gli stati di sforzo che presentano la stessa T_max).
È questo il criterio di Guest-Tresca (a destra);

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{prin\,max} - \sigma_{prin\,min}}{2} \le \frac{R_s}{2\eta}$$

$$\sigma^*_{GT} = \sigma_{prin\,max} - \sigma_{prin\,min} \le \frac{R_s}{\eta}$$

$$\sigma^*_{GT} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\ \textit{(flesso - torsione)}$$

Un'altra grandezza indice del pericolo che può essere assunta è l'energia di variazione di forma (sono equivalenti rispetto al pericolo del cedimento tutti gli stati di sforzo che presentano ugual massima energia di variazione di forma).
È questo il criterio di Von Mises (sotto) :

$$E_{VF\,max} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 - (\sigma_I\sigma_{II} + \sigma_{II}\sigma_{III} + \sigma_{III}\sigma_I)} \le \frac{\sqrt{2}}{3}\frac{R_s}{\eta}$$

$$\sigma^*_{VM} = \sqrt{\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 - (\sigma_I\sigma_{II} + \sigma_{II}\sigma_{III} + \sigma_{III}\sigma_I)} \le \frac{R_s}{\eta}$$

$$\sigma^*_{VM} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}\ \textit{(flesso - torsione)}$$

#2 LE FUNZIONI DI FORMA

Nel metodo degli elementi finiti il comportamento di un qualunque punto interno all'elemento finito viene descritto attraverso gli spostamenti nodali, che sono il primo risultato di un calcolo FEM.

In particolare, date delle forze e dei vincoli assegnati e calcolati gli spostamenti nodali, gli spostamenti in un punto qualunque all'interno dell'elemento sono espressi come combinazione degli spostamenti nodali attraverso le funzioni di forma.

Le **funzioni di forma** descrivono il campo di spostamenti all'interno di un elemento e dalla loro formulazione dipende l'accuratezza della soluzione: più si avvicinano al campo analitico di spostamenti e maggiore sarà l'accuratezza dei risultati.
Poiché le deformazioni sono legate alla derivata degli spostamenti e gli sforzi sono legati alle deformazioni attraverso il materiale, anche l'accuratezza di queste grandezze è legato alle funzioni di forma.

Tali concetti sono introdotti e spiegati utilizzando gli elementi più semplici, gli elementi bar (truss/asta) ma sono del tutto generali. Prima ancora di introdurre l'elemento finito bar, consideriamo una barra sollecitata assialmente agli estremi (è caricata solo agli estremi), in modo da allungarla (o accorciarla) di una quantità nota, che sarà pari alla differenza tra lo spostamento dei due estremi, u2-u1. All'interno della barra lo spostamento di un punto generico a distanza x dall'estremo 1 varia linearmente tra u1 e u2. **Soluzione analitica del problema:**

$$u(x) = u_1 + \frac{(u_2 - u_1)}{l}x = \left(1 - \frac{x}{l}\right)u_1 + \frac{x}{l}u_2$$

Noti gli spostamenti, è possibile calcolare deformazioni e sforzi: σ e ε sono costanti all'interno della barra…

$$\varepsilon = \frac{du(x)}{dx} = \frac{u_2 - u_1}{l} = \frac{\Delta l}{l}$$

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{u_2 - u_1}{l} = E \frac{\Delta l}{l}$$

In un elemento finito tipo bar, facendo finta di non conoscere la soluzione analitica, bisogna esprimere il campo di spostamenti all'interno dell'elemento finito in funzione degli spostamenti nodali.
Si assuma una funzione lineare $u(x) = a_1 + a_2x$
Determiniamo a_1 e a_2 in funzione degli spostamenti nodali imponendo che:

$$\begin{cases} x = 0 & u = u_1 \\ x = L & u = u_2 \end{cases} \qquad u(x) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{L}x$$

Ri-arrangiando l'espressione per raccogliere gli spostamenti nodali ritroviamo la soluzione analitica, l'assunzione di spostamenti lineari era, quindi, esatta.

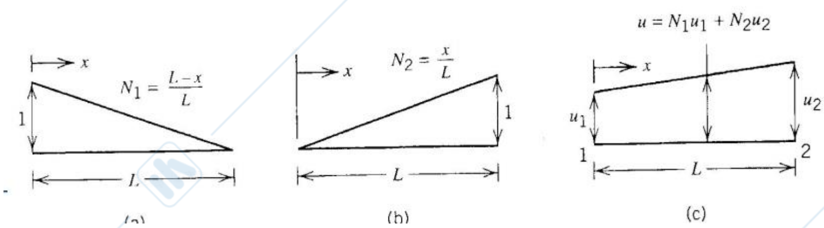
$$u(x) = \left(\frac{L - x}{L}\right)u_1 + \frac{x}{L}u_2$$

Riassumendo, per descrivere il comportamento in un punto qualunque appartenente all'elemento finito (compreso tra i due nodi) bisogna introdurre le funzioni di forma, che descrivono l'andamento del campo di spostamenti in funzione degli spostamenti nodali.

Tali funzioni saranno la soluzione esatta se questa è nota, altrimenti si assume una funzione approssimata (in genere polinomiale) degli spostamenti nodali. Nel caso degli elementi barra la soluzione analitica del campo di spostamenti e nota (vedi slides precedenti) e viene utilizzata per definire le funzioni di forma.

Quindi, la singola funzione di forma descrive la variazione di u(x) quando un nodo viene bloccato e lo spostamento dell'altro nodo è pari a 1 u_i.

N1 è una funzione di forma e descrive gli spostamenti all'interno dell'elemento finito quando u1=1 e u2=0 (a). N2 è una funzione di forma e descrive gli spostamenti all'interno dell'elemento finito quando u1=0 e u2=1(b)



Lo spostamento complessivo sarà la combinazione lineare degli spostamenti attraverso le funzioni di forma (c). In forma matriciale:

$$u(x) = \left[\frac{L - x}{L} \quad \frac{x}{L}\right]\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [N]\{u\}$$

Matrice delle funzioni di forma   Vettore degli spostamenti nodali

La soluzione che si ottiene è quella analitica, in quanto le funzioni di forma sono quelle analitiche (che sono note in questo caso). Noto u(x) è possibile esprimere le deformazioni attraverso le funzioni di forma:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}([N]\{u\}) = \frac{d[N]}{dx}\{u\} = [B]\{u\}$$

$$[B] = \frac{d}{dx}\left[\frac{L - x}{L} \quad \frac{x}{L}\right] = \left[-\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L}\right]$$

Risolvendo, si trova:

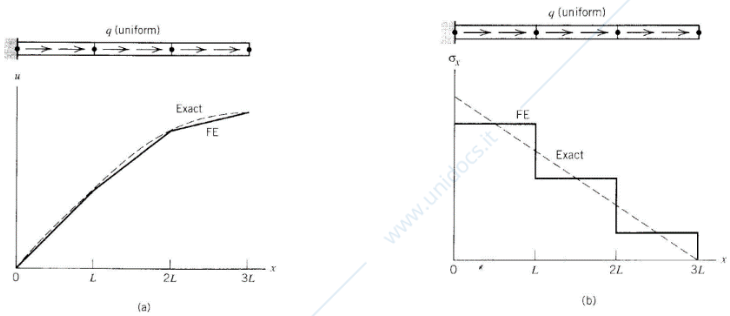
$$\{\varepsilon\} = [B]\{u\} = -\frac{1}{L}u_1 + \frac{1}{L}u_2 = \frac{u_2 - u_1}{L}$$

$$\{\sigma\} = [E][B]\{u\} = E\left(-\frac{1}{L}u_1 + \frac{1}{L}u_2\right) = E \cdot \frac{u_2 - u_1}{L}$$

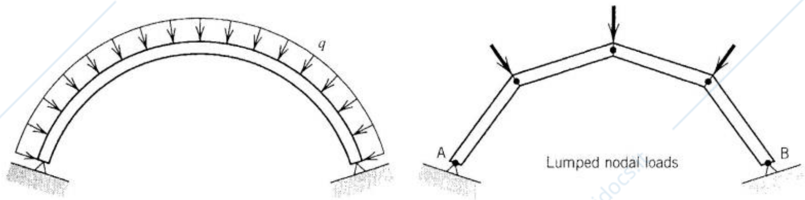
che sono le espressioni analitiche esatte di deformazioni e sforzi di una barra sollecitata assialmente.

LIMITAZIONI: Le funzioni di forma lineari descrivono in maniera esatta *solo nei casi in cui le barre sono caricate ai nodi e la sezione è costante*. Se tali condizioni non sono rispettate, il campo di spostamenti non è più lineare e le funzioni di forma diventano approssimate.
Di conseguenza:
• se le forze assiali esterne sono applicate ai nodi e l'elemento bar ha A ed E costanti, allora la soluzione corrisponde a quella esatta.
• se le forze assiali sono applicate tra i nodi o distribuite sull'elemento o l'elemento stesso è "rastremato", o, ancora, la barra è costruita con materiali con diversi moduli elastici, allora la soluzione ottenuta è approssimata.
In caso di approssimazione, si tende alla soluzione esatta infittendo il numero di nodi e, quindi, la mesh.

- Quando si hanno carichi distribuiti questi vengono suddivisi in carichi concentrati applicati ai nodi.
- Se la sezione è rastremata, la schematizzazione sarà composta da elementi a sezione costante.
- All'aumentare del numero di elementi la soluzione si avvicina a quella esatta. Es: carico distribuito

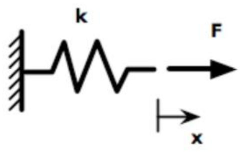


I concetti prima esposti sono generalizzabili agli altri elementi finiti.
In particolare, anche per gli elementi trave le funzioni di forma descrivono in maniera esatta il campo di spostamenti se valgono le stesse condizioni descritte per gli elementi bar(carichi applicati ai nodi, sezione uniforme, modulo elastico non varia).
Per gli altri elementi le funzioni di forma sono, in genere, lineari o quadratiche e sono un'approssimazione del campo di spostamenti effettivo.

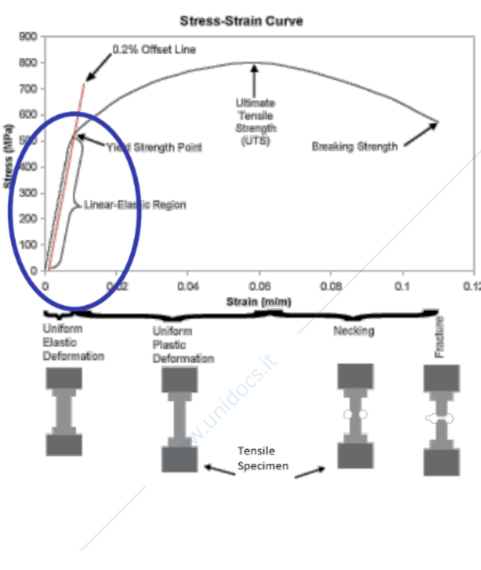


#3 LA MATRICE DI RIGIDEZZA

A ogni sistema elastico (tale cioè, da deformarsi quando caricato e non presentare deformazioni residue allo scarico) è possibile associare un valore di rigidezza K, definita come il rapporto tra la forza applicata F e l'allungamento subito Δx.



Il sistema può essere schematizzato come una molla di rigidezza K.

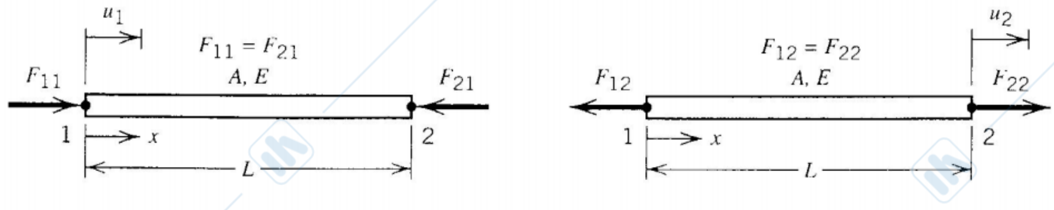


Se K è costante al variare del carico applicato il sistema elastico si dice lineare. Il sistema è assimilabile a una molla di rigidezza K: **F= K*Δx**

Anche per una barra soggetta a trazione, sollecitata in campo elastico lineare, è possibile definire la rigidezza K.
L'elemento finito barra ha associata una rigidezza che, data la natura del metodo, sarà associata agli spostamenti nodali e sarà espressa in forma di matrice.

La matrice di rigidezza dell'elemento bar viene costruita a partire dagli spostamenti, associando ad ogni spostamento nodale la corrispondente reazione del nodo.

Si impone, dapprima, uno spostamento u1 al nodo 1 mentre si blocca il nodo 2 (u2=0) e si valutano le reazioni vincolari F11 e F21. Si blocca poi lo spostamento al nodo 1 (u1=0) e si impone uno spostamento u2, valutando le reazioni F12 e F22.



(a) (b)

Considerando un elemento bar, si costruisce la matrice di rigidezza a partire da:
u1 = 1, u2 = 0 => F11=F21 = ku₁

u1 = 0, u2 = 1 => F22=F12 = ku₂ $\quad$ F_{ij}: forza al nodo i associata allo spostamento del nodo j.

Tenendo conto della convenzione sul segno positivo delle forze nodali, scriviamo l'equilibrio nodale.
F1 = F11 – F12 = ku1 – ku2
F2 = F21 – F22 = ku2 – ku1 $\quad$ F*i* : forza risultante al nodo i

Si arriva allora a :

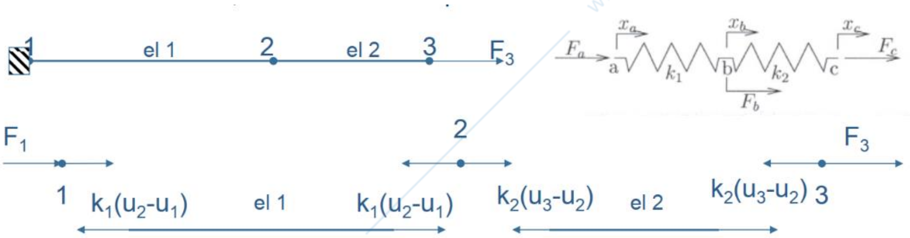
$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}; \quad \text{dove} \quad k = \frac{EA}{L}$$

$$[K]\{u\} = \{F\}$$

Osservazioni:
• la soluzione ai nodi è esatta e corrisponde a quella analitica (questa conclusione non è generalizzabile ad altri elementi o tipi di carico);
• una colonna di [K] (matrice di rigidezza) rappresenta quel vettore delle forze nodali che deve essere applicato all'elemento per sostenere uno stato di deformazione dove il corrispondente spostamento unitario è attivato e gli altri sono nulli;

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k \\ -k \end{Bmatrix} u_1 = \begin{Bmatrix} F_{11} \\ -F_{21} \end{Bmatrix}$$

Nel caso di strutture con più elementi si assemblano le matrici di rigidezza dei diversi elementi, considerando l'equilibrio dei diversi elementi.



Consideriamo l'equilibrio di ogni nodo:

$$\begin{cases} F_1 = -k_1(u_2 - u_1) \\ k_1(u_2 - u_1) = k_2(u_3 - u_2) \\ F_3 = k_2(u_3 - u_2) \end{cases} \quad \text{che in forma matriciale diviene} \quad \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

Come si può assemblare la matrice di rigidezza del sistema? Una struttura è un insieme di elementi finiti.

$$[K]_1 = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \qquad [K]_2 = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

si riferisce a $\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$ $\qquad$ si riferisce a $\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$

La $[K]_{TOT}$ si ottiene dall'assemblaggio delle singole $[K]_{EL}$ (schema a destra)

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

Il vettore degli spostamenti di tutti i nodi della struttura è u1 u2 u3. Le matrici di rigidezza dei singoli elementi vanno trasformate in modo da essere compatibili con il prodotto per il vettore di tutti gli spostamenti nodali →

$$[K]_1 = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [K]_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

La matrice di rigidezza di tutta la struttura è data dalla somma delle matrici di rigidezza espanse degli elementi: i termini relativi ai nodi appartenenti a più elementi saranno la somma dei termini relativi ai diversi elementi.

$$[K]_{TOT} = [K]_1 + [K]_2 = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

Il sistema da risolvere è quindi:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

Il vincolo è espresso dall'equazione u1 = 0

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

$$k_1 u_1 - k_2 u_2 = F_1$$

- Il primo sistema fornisce gli spostamenti incogniti u2 e u3
- una volta calcolati i quali, si otterrà la reazione vincolare dalla seconda equazione

In generale si hanno:

- $\{u\}_{inc}$: spostamenti incogniti
- $\{u\}_{noti}$: spostamenti noti (vincoli o spostamenti imposti)
- $\{F\}_{note}$: carichi noti (forze applicate)
- $\{F\}_{inc}$: carichi incogniti (reazioni vincolari)

Il sistema [K]{u} = {F} va riscritto, riordinando le righe del sistema:

$$\begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\}_{inc} \\ \{u\}_{noti} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\}_{note} \\ \{F\}_{inc} \end{Bmatrix}$$

vincoli reazioni vincolari

$$\begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\}_{inc} \\ \{u\}_{noti} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\}_{note} \\ \{F\}_{inc} \end{Bmatrix}$$

Prima si calcolano gli spostamenti nodali : → →

$$[K_{11}]\{u\}_{inc} + [K_{12}]\{u\}_{noti} = \{F\}_{note}$$

$$\{u\}_{inc} = [K_{11}]^{-1}\left(\{F\}_{note} - [K_{12}]\{u\}_{noti}\right)$$

Una volta trovati gli spostamenti nodali incogniti, si risolvono le reazioni vincolari:

$$\{F\}_{inc} = [K_{21}]\{u\}_{inc} + [K_{22}]\{u\}_{noti}$$

DA RICORDARE:

Il concetto di matrice di rigidezza è generalizzabile a tutti i tipi di elementi finiti: cambiano, ovviamente, le espressioni dei termini della matrice e le dimensioni della matrice, in funzione die gradi di libertà associati a ogni nodo (es: elemento trave nel piano, ogni nodo ha 3 gdl, due spostamenti x e y e la rotazione nel piano: la matrice sarà 6x6).

La matrice di rigidezza può essere ricavata con il procedimento utilizzato solo nei casi in cui le funzioni di forma utilizzate sono esatte. Altrimenti si utilizzano altri metodi che fanno riferimento all'eguaglianza del lavoro esterno e di quello di deformazione.

Gli elementi con funzioni di forma esatta avranno una matrice di rigidezza esatta, senza approssimazioni dovute alla modellazione degli spostamenti). La matrice di rigidezza è simmetrica.

La matrice di rigidezza lega le forze agli spostamenti nodali. Dipende dal modulo elastico, dalle sezioni (attraverso l'area, il momento di inerzia, etc) e dalla lunghezza. È la matrice dei coefficienti del sistema lineare che definisce il problema in esame.

In un sistema statico le incognite sono gli spostamenti nodali ed i termini noti le forze nodali, a parte i nodi in cui sono imposti i vincoli cinematici: in tal caso le incognite sono le forze nodali (reazioni vincolari) e i termini noti gli spostamenti nodali (vincoli).

Esistono procedimenti matematici per risolvere tale sistema, in cui non tutti i termini del vettore delle incognite (spostamenti nodali) sono incognite e non tutti i termini noti (forze nodali) sono note.

#4 LO SVILUPPO DI ANALISI FEM A PARTIRE DA MODELLI CAD

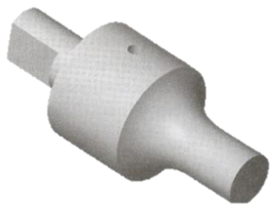
• La fase di pre-processing può essere preceduta da una modellazione CAD.
• ANZI, In uno scenario ideale i modelli CAD dovrebbero essere direttamente utilizzati per la costruzione di mesh a elementi finiti.
• In realtà ancora oggi il passaggio CAD-FEM non è immediato e diretto e il corretto utilizzo di modelli CAD per analisi FE deve essere opportunamente vagliato caso per caso.
• È compito sia del progettista che del disegnatore e dell'analista FEM coordinare le proprie attività in modo da trarre il massimo beneficio dai modelli CAD.

È possibile identificare 4 possibili situazioni in cui la geometria definita al CAD è manipolata ed utilizzata ai fini di un'analisi FEM:
1. I modelli CAD sono sviluppati per eventuali analisi FEM;
2. I modelli CAD sono sviluppati senza tener conto delle esigenze delle analisi FEM.
3. I modelli CAD non possono essere trasferiti ad analisi FEM a causa del grande lavoro di revisione necessario.
4. Si sviluppano modelli geometrici dedicati alle analisi FEM.

Si possono elencare 3 condizioni necessarie per l'utilizzo di geometrie CAD in analisi a elementi finiti:
1. I modelli CAD sono costruiti come modelli 3D solidi o superfici che comprendono integralmente dei volumi;
2. Il componente può o deve essere "meshato" a tetraedri o è abbastanza semplice da poter essere schematizzato con mesh manuale con elementi brick, o, ancora, è possibile estrarre una superficie media per modelli a shell;
3. Il modello CAD esiste nel momento in cui l'analisi FEM è eseguita.
Se la correzione del modello CAD è onerosa non conviene usarlo.

Solo poche tipologie di componenti ben si prestano per un utilizzo diretto del CAD per analisi FEM.

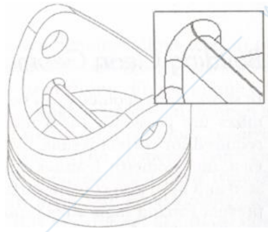
SI
Parti massicce, con rapporti dimensionali non elevati (potato-shaped), che ben si prestano a discretizzazioni con tetraedri.



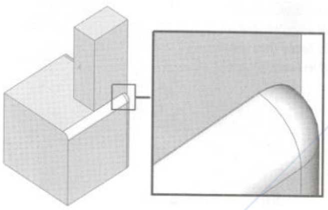
NO Parti sottili e assemblaggi. Geometrie complesse.

È importante la collaborazione tra analista e disegnatore ed un opportuno training che permetta di conoscere le reciproche esigenze. Anche se l'analisi è rivolta a geometrie potato-shaped, che ben si prestano a mesh a tetraedri è opportuno verificare, nei modelli solidi, la presenza di "difettosità", quali:
1. Geometria "sporca" (raccordi e bordi mal definiti, superfici con elevati rapporti dimensionali);
2. Relazioni mal definite tra le quote (per i modelli parametrici).

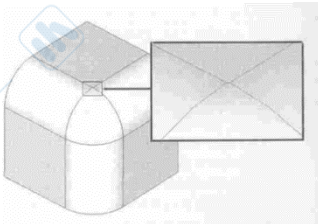
GEOMETRIE SPORCHE
Si definisce "sporca" una geometria costruita con caratteristiche che non la rendono idonea ad eventuali analisi FEM in quanto induce modelli a elementi finiti con elevati rapporti dimensionali tra i lati degli elementi.
Una geometria corretta e pulita non deve, tuttavia, includere semplificazioni tali da compromettere l'accuratezza dei risultati dell'analisi. Il modo migliore di procedere è di creare una geometria pulita, almeno nelle aree di maggior interesse strutturale.



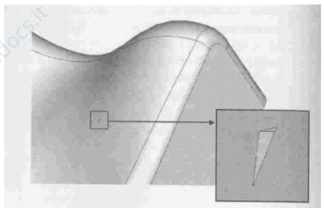
Esempio : irrigidimento di un pistone
La definizione del raggio di raccordo comporta la definizione di una superficie sottile e piatta che sarà "meshata" con molti elementi di piccole dimensioni (modello di dimensioni elevate). La sua eliminazione avrebbe ridotto la complessità del modello senza inficiare il valore dei risultati.

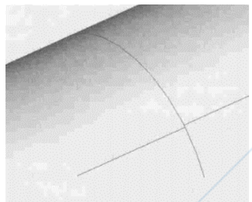


BORDI STRETTI



(disallineamenti tra entità geometriche, vicinanza di spigoli raccordati...).
La presenza di bordi stretti su grandi superfici può comportare mesh con elementi molto distorti o modelli invalidi.
I meshatori automatici partono dalle superfici libere e le schematizzano a triangoli, utilizzando tutti i punti che definiscono le superfici.
Da qui procedono nella schematizzazione di tutto il volume.





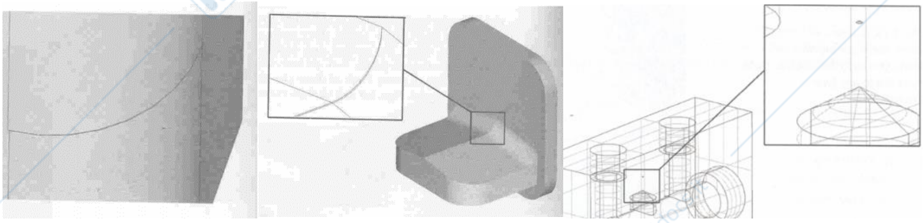
Esempio:
La definizione delle superficie ha indotto un vuoto
Le superfici non sono allineate

SUPERFICI SOTTILI (SLIVER SURFACES)

Sono superfici con elevato rapporto tra i lati. Il risultato sulla mesh è lo stesso degli bordi corti.
L'allineamento delle due superfici avrebbe eliminato la superficie allungata.

Superficie sottile dovuta a un raccordo leggermente sottodimensionato.
La presenza del raccordo ha causato una situazione che è utilizzabile solo con difficoltà per costruire la mesh.

(sliver) →



← (vuoti)

VUOTI

Modelli CAD per eventuali analisi FEM. Eventuali disallineamenti possono generare dei vuoti all'interno del modello. Se lontani dalla zona di interesse possono essere innocui. Attenzione alle analisi dinamiche (proprietà di massa)!

SUPERFICI DI ORDINE SUPERIORE

L'impiego di queste superfici (amate dai designers) può avere controindicazioni in sede di modellazione FEM.

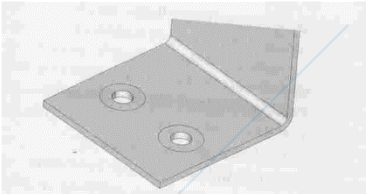
INTERFACCE

Il passaggio di un modello da un formato ad un altro attraverso programmi di interfaccia può generare incongruenze. Parasolids, ACIS sono migliori; IGES, DXF, VDA possibili problemi.
È bene confrontare sempre il modello traslato con quello di partenza.

MODELLI FEM SHELL (ELEMENTI SOTTILI)

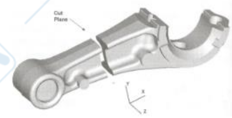
- In questo caso è necessario che il modello CAD permetta di estrarre le superfici medie del modello solido.
- Il processo può essere oneroso e può essere più conveniente costruire modelli appositamente per le analisi FEM.

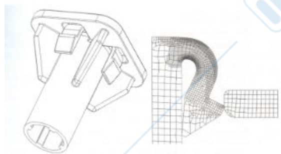
MODIFICARE UNA GEOMETRIA ESISTENTE



- È bene sfruttare, dove possibile, eventuali simmetrie.
- L'accurata definizione delle condizioni al contorno (di vincolo) può richiedere la definizione di opportune geometrie (es.: dado fissato a una piastra).
- Definire correttamente i contorni delle superfici, anche in funzione dei carichi applicati (es.: pistone).

L'eliminazione di particolari geometrici va valutata caso per caso, in funzione del componente e dei carichi applicati (es.: snap-fit, biella). Si può pensare di operare con differenti livelli di approssimazione se si usa il submodeling.

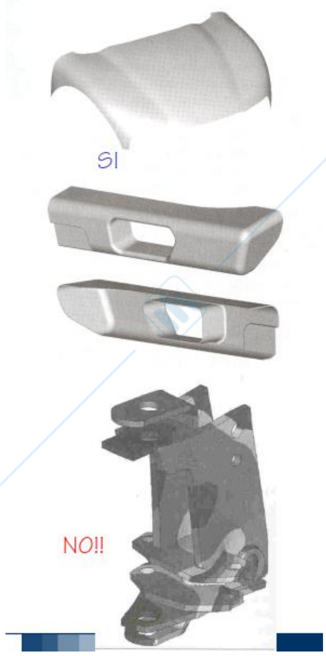




• In genere le analisi dinamiche richiedono un dettaglio geometrico meno accurato che una stress-analysis (è un'analisi locale).

• Il livello di precisione della descrizione geometrica richiesta dipende dall'analisi e dallo stadio di sviluppo del progetto. Es.: nervatura.

• Le geometrie con piccolo spessore (modellate a shell) richiedono l'estrazione del piano medio dal modello CAD. Ciò, il più delle volte, deve essere fatto manualmente e può essere time-consuming.



Alternativamente si può costruire il modello FEM sul piano esterno o interno del modello CAD, senza che se ne avverta la differenza. Ciò è possibile se le dimensioni dei componenti sono molto maggiori dello spessore (es.: componenti automobilistici). Questo tipo di modellazione si può eseguire direttamente con i pre-processori.

• Le finalità dell'analisi dettano le modalità di realizzazione della geometria.

• Il modo migliore di procedere è, nel caso di nuovi progetti, quello di partire da una geometria di massima e rifinire quest'ultima per gradi, man mano che si comprende come la struttura lavora, eventualmente utilizzando dei software di ottimizzazione topologica.

Per definire correttamente la geometria è necessario, preliminarmente:

• Scegliere il tipo di elementi (la geometria iniziale rifletterà la scelta). Elementi meno accurati possono dare indicazioni di massima, in base alle quali rifinire le geometrie (e le analisi) seguenti. In ogni caso, utilizzare schematizzazioni rade.

• Definire preliminarmente le condizioni al contorno, in modo da poter costruire una geometria che le renda applicabili.

• Definire preliminarmente l'assemblaggio di parti diverse del modello (per avere nodi in comune senza creare elementi distorti).

• Pensare ad un'eventuale analisi di ottimizzazione, in quanto questa, modificando le quote inizialmente definite, dipenderà dalla configurazione geometrica iniziale.

• Pensare a eventuali alternative geometriche rispetto alla proposta iniziale.

• Nel caso di modelli parametrici è bene non definire troppe relazioni di vincolo tra entità differenti (es: parallelismo tra linee), almeno se si vuole utilizzare una routine di ottimizzazione. Infatti, ciò potrebbe precludere soluzioni interessanti.

• Eseguire sempre dei test per verificare la congruenza geometrica del modello parametrico in presenza di valori estremi delle variabili definite (se possibile automaticamente, con routine "built-in"). Ciò potrebbe evitare dei lanci a vuoto delle routine di ottimizzazione.

#5 I PASSI DI UN'ANALISI FEM: TIPOLOGIE DI ELEMENTI E CRITERI DI SCELTA
Recap:
Strutture a travi: quando una dimensione risulta molto maggiore delle altre (schema monodimensionale).
Strutture a guscio: quando una dimensione risulta molto minore delle altre (schema bidimensionale).
Strutture solide (tozze, potato shaped): quando non è possibile definire uno schema affidabile mono o bidimensionale o quando si vogliono indagare gli effetti locali (FEM).

Una volta definito la tipologia di struttura e dei tipi di risultati di interesse, bisogna decidere con quale tipo di elementi finiti eseguire la modellazione e come impostare l'analisi.

SVILUPPO DI UN'ANALISI FEM: DALLA STRUTTURA AL MODELLO FEM.

1. *MODELING (Idealizzazione) (ipotesi su vincoli/carichi)*
2. ANALISI (statica/dinamica, lineare/nonlineare) (Hardware/Software)
3. POSTPROCESSING (deformata, tensore sforzi/von Mises) (Verifiche dei risultati)

CONCETTUALMENTE
- analisi del componente meccanico reale
- individuazione degli obiettivi dell'analisi e dei risultati di interesse.
- schematizzazione del componente e semplificazioni geometriche
- schematizzazione delle condizioni al contorno

OPERATIVAMENTE
- tipo di elemento, dimensione degli elementi (analisi di convergenza)
- condizioni al contorno (carichi meccanici, termici, ecc. e e vincoli)
- modellazione del materiale
- tipo di analisi
- analisi e interpretazione dei risultati

ELEMENTI 1D ASTA/rod/truss a 2 nodi INPUT UTENTE: AREA SEZIONE E MATERIALE
- Riducono un elemento 3D a uno 1D.
- 2 o 3 DOF traslazionali (spostamenti) per ogni nodo.
- modellare strutture reticolari con elementi snelli incernierati agli estremi
- supportano solo carichi assiali
- funzioni di forma esatte nei se carichi applicati ai nodi, sezione e
- materiale costanti.
- (utilizzati per modellare bulloni o collegamenti in modelli assialsimmetrici)

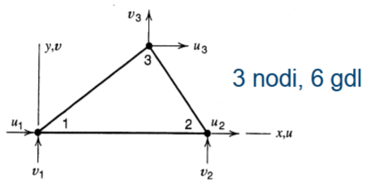
ELEMENTI BEAM TRAVE a 2 (3) nodi INPUT UTENTE: SEZIONE (geom; inerzia) E MATERIALE
- 3 DOF traslazionali (spostamenti) e 3 DOF rotazionali (rotazione) per ogni nodo.
- modellare strutture con elementi snelli (modello di calcolo travi)
- funzioni di forma esatte se i carichi sono applicati ai nodi, con sezione e materiale costanti.
- facili errori di posizionamento e di rappresentazione nei collegamenti tra elementi
- hanno sistemi di riferimento locali con un'asse lungo lo sviluppo dell'elemento trave

ELEMENTI 2D PIANI | SFORZO PIANO/PLANE STRESS | DEFORMAZIONE PIANA/PLANE STRAIN ASSIALSIMMETRICI/AXYSIMMETRIC INPUT UTENTE: SPESSORE E MATERIALE
- Modellano problemi 2D con elementi 2D.
- 2 g.d.l. traslazionali a ogni nodo (spostamenti nel piano).
- el. sforzo piano assumono sforzo fuori piano nullo, adatti per modellare strutture sottili
- el. deform. piana assumono deform. fuori piano nulla, adatti per modellare strutture spesse
- el. assials. assumono adatti per modellare strutture con simmetria assials. e carichi assials.
- sezione trasversale costante
- (numerazione dei nodi dell'elemento in senso orario)
- Sono isoparametrici: funzioni di forma modellano geometria e spostamenti.

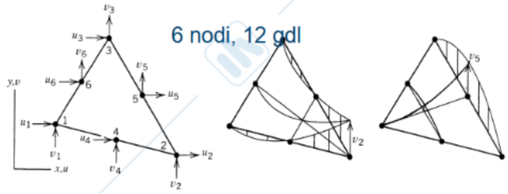
Elementi triangolari lineari (T3)
Spostamenti *lineari*

Deformazioni (e sforzi) *costanti*

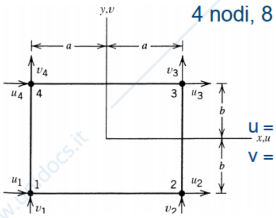
I contorni rimangono lineari mentre l'elemento si deforma
$u = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y$
$v = \beta_4 + \beta_5 x + \beta_6 y$
$\varepsilon x = \beta_2$
$\varepsilon y = \beta_6$
$\gamma_{xy} = \beta_3 + \beta_5$



Elementi triangolari parabolici (T6)
Ci sono nodi in centro-lato, funzioni di forma quadratiche
I contorni sono parabolici mentre l'elemento si deforma
Spostamenti *quadratici* - Deformazioni lineari
(flessione descrivibile esattamente in termini di deflessioni e sforzi)



Elementi rettangolari bi-lineari a 4 nodi (Q4)
E' compreso il caso di deformazione costante (l'equilibrio non è soddisfatto in tutti i punti dell'elemento a meno che ($\beta_4=\beta_8=0$). Infittendo si arriva a convergenza.
Sui lati (x=±a e y=±b) i campi u(x,y) e v(x,y) diventano lineari e dipendono soltanto dai valori assunti agli estremi.

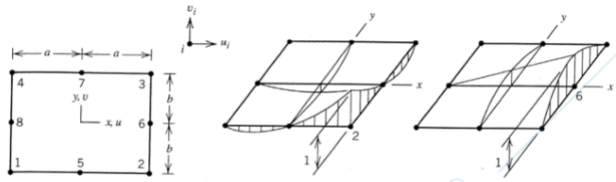


Spostamenti bi-lineari

$u = (c_1 + c_2 x)(c_3 + c_4 y) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 xy$
$v = (c_5 + c_6 x)(c_7 + c_8 y) = \beta_5 + \beta_6 x + \beta_7 y + \beta_8 xy$

Spostamenti *bi-lineari*

Elementi rettangolari a 8 nodi (Q8) →



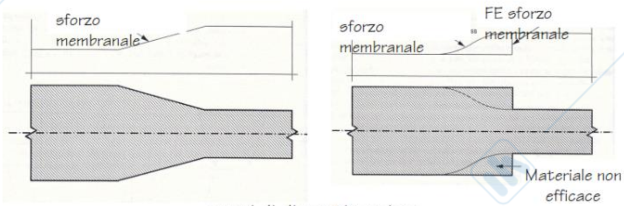
ELEMENTI SHELL (plate)/GUSCIO (lastra) a 3, 4, 6, 8 nodi

- Modellano un problema 3D in 2D (superficie media).
- 3 DOF traslazionali e 3 DOF rotazionali
- utili per modellare strutture in parete sottile con larga estensione in confronto ad un ridotto spessore (modello di calcolo guscio).
- sforzi nella direzione dello spessore trascurabili
- mesh relativamente semplici riferite alla superficie media (sovrastima sforzi)
- variazione degli sforzi attraverso lo spessore è lineare
- formulazione thin e thick, effetto del taglio trasversale trascurato o incluso
- possibili errori di modellazione legati alla dimensione degli elementi (el. A 4 nodi)
- possibili errori di modellazione nell'unione di elementi con spessore differenti

INPUT UTENTE: SPESSORE MATERIALE – OFFSET RISPETTO A SUPERFICIE RIFERIMENTO;

PUNTI DI INTEGRAZIONE NELLO SPESSORE

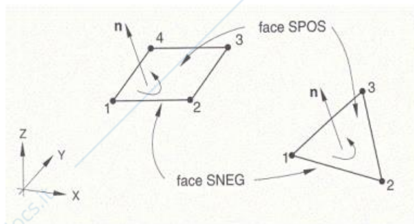
MATERIALE

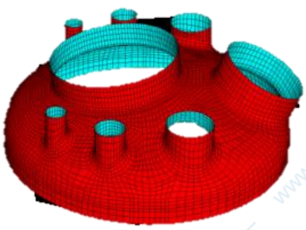


errori di discretizzazione

Risultati: TOP BOTTOM
SUPERFICIE MEDIA

Flessionale + membranale
Membranale

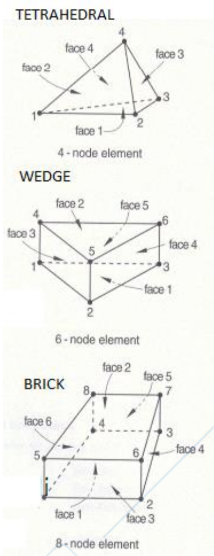




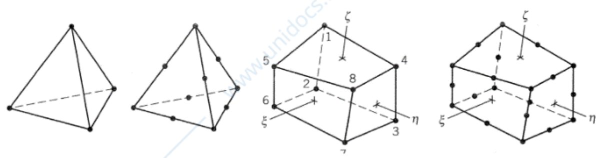
CONFRONTO ELEMENTI SHELL – ELEMENTI 2D / 3D
Strutture piane caricate nel piano: Analoghi risultati sia in shell che in 2D
Strutture con concentrazione di sforzo di tipo strutturale (es. giunzioni fondo/mantello): Elementi Shell
Strutture con elevati gradienti di sforzo dovuti a variazioni geometriche es. aperture in recipienti in pressione: 3D

ELEMENTI 3D SOLIDI 4, 6, 8, 10, 15 20 nodi
BRICK /MATTONE (ESAEDRO/HEXAHEDRAL), WEDGE /CUNEO, TETRAHEDRAL/TETRAEDRO
Sono un'estensione degli elementi piani già descritti.

- Un problema 3D è modellato in 3D.
- Ad ogni nodo corrispondono 3 g.d.l. traslazionali
- formulazione non richiede semplificazioni della geometria
- adatte per geometrie complesse derivanti da modellatori solidi
- visualizzazione 2D (wire frame) poco utile
- risultati non accurati con tetraedri a 4 nodi in presenza di gradienti di sforzi (funzioni forma povere di termini).



- Tetraedri a 4 nodi (TET4)
- Tetraedri a 10 nodi (TET10)
- Esaedri a 8 nodi (HEX8)
- Esaedri a 20 nodi (HEX20)



Tetraedri a 4 e 10 nodi:
Gli elementi tetraedrici a quattro nodi hanno tre gdl per nodo e quindi un totale di 12 gdl:
$u = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 z$
$v = \beta_5 + \beta_6 x + \beta_7 y + \beta_8 z$
$w = \beta_9 + \beta_{10} x + \beta_{11} y + \beta_{12} z$
Sono elementi a spostamento lineare e, quindi, a deformazione costante
Gli elementi tetraedrici a dieci nodi hanno tre gdl per nodo e quindi un totale di 30 gdl.
Sono elementi a spostamento quadratico e, quindi, deformazione lineare.
Agli spostamenti precedenti aggiungono i termini in x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz.

Esaedri a 8 e 20 nodi:
Negli esaedri a 8 nodi, l'espressione dei singoli spostamenti nasce dal prodotto di tre polinomi lineari del tipo
$(c_1 + c_2 x)(c_3 + c_4 y)(c_5 + c_6 z)$
sono quindi presenti contributi costanti, lineari, quadratici e cubici.
Gli esaedri a 20 nodi sono analoghi agli elementi piani a 8 nodi, però in 3D: 20 nodi = 60 gdl
I termini in x^3, y^3 e z^3 non compaiono per lasciare la compatibilità degli spostamenti.

RIASSUNTISSIMO:
ELEMENTI BAR E BEAM: si modella la linea d'asse e si definisce la sezione. Si assegna il materiale (E, ν). Si utilizzano per modellare strutture snelle (monodimensionali).
Permettono il calcolo degli sforzi e delle deformazioni nominali, degli spostamenti nodali.
Si utilizzano se non interessano gli sforzi locali (legati alla geometria dei dettagli) o se si vuole una valutazione globale della deformabilità della struttura (spostamenti nodali).
ELEMENTI SHELL: si modella superficie media e si definisce la sezione. Si assegna il materiale (E, ν). Si utilizzano per modellare strutture sottili (bidimensionali).
Permettono il calcolo degli sforzi e delle deformazioni nominali e delle concentrazioni legate alle discontinuità strutturali (non dello stato di sforzo locale, legato alla geometria del dettaglio geometrico) e degli spostamenti nodali.
Si utilizzano per strutture sottili che si sviluppano nello spazio
La conoscenza degli sforzi locali, legati alla geometria del dettaglio, richiede ulteriori analisi con elementi solidi.
ELEMENTI PIANI: Modellano in 2D problemi che si sviluppano in 2D (come geometria, carichi e vincoli). Si assegna il materiale (E, ν). Si utilizzano per modellare strutture che possano essere schematizzate in 2D. Permettono il calcolo degli sforzi e delle deformazioni locali e degli spostamenti nodali.
Si utilizzano se interessano gli sforzi locali (legati alla geometria dei dettagli) e se si vuole una valutazione globale della deformabilità della struttura (spostamenti nodali).

ELEMENTI SOLIDI 3D: si modella la reale geometria del componente. Si assegna il materiale (E, ν).
Si utilizzano per modellare strutture tozze tridimensionali.
Permettono il calcolo degli sforzi e delle deformazioni locali e degli spostamenti nodali.
Si utilizzano se interessano gli sforzi locali (legati alla geometria dei dettagli) e se si vuole una valutazione globale della deformabilità della struttura (spostamenti nodali)

FUNZIONI DI FORMA
ELEMENTI BAR/BEAM
Le funzioni di forma sono quelle analitiche (per carichi concentrati e sezioni e materiali che non variano). Quindi, in tali casi la soluzione è esatta. Per carichi distribuiti e sezioni variabili la soluzione è approssimata.
ELEMENTI SHELL/2D/SOLIDI
Le funzioni di forma lineari per elementi con nodi ai soli vertici e quadratiche per elementi con nodi sui punti medi dei lati. La geometria viene descritta con le stesse funzioni di forma degli spostamenti.
Sono sempre approssimate. *Per gli elementi triangolari a 3 nodi (shell e elementi piani) o tetraedrici a 4 nodi (solidi 3D) le funzioni di forma sono poco accurate e portano a errori elevati e non conservativi (strutture troppo rigidi e sforzi più bassi ella realtà). Meglio utilizzare tali elementi con funzioni di forma quadratiche (6 nodi per elementi triangolari e 10 nodi per i tetraedri).*

#6 REALIZZAZIONE DELLA MESH
1. *MODELING (Idealizzazione) (ipotesi su vincoli/carichi)*
2. ANALISI (statica/dinamica, lineare/nonlineare) (Hardware/Software)
3. POSTPROCESSING (deformata, tensore sforzi/von Mises) (Verifiche dei risultati)

CONCETTUALMENTE
- analisi del componente meccanico reale
- individuazione degli obiettivi dell'analisi e dei risultati di interesse.
- schematizzazione del componente e semplificazioni geometriche
- schematizzazione delle condizioni al contorno

OPERATIVAMENTE
- tipo di elemento
- disposizione e dimensione degli elementi (analisi di convergenza)
- condizioni al contorno (carichi meccanici, termici, ecc. e vincoli)
- modellazione del materiale
- tipo di analisi
- analisi e interpretazione dei risultati

MODELLARE COMPORTAMENTO DELLA STRUTTURA (definizione corretta)
~~MODELLARE LA GEOMETRIA (~~concettualmente errato~~)~~

DEFINIZIONE DELLA MESH
- modello geometrico
- scelta tipo di elemento
- dimensione elementi
- condizioni al contorno

• Nel FEM, la geometria ha una funzione di supporto alla mesh ed è utile all'utente, perché il solutore non la prende in considerazione
• Può essere sviluppata direttamente nel pre-processore oppure tramite sistemi CAD o modellatori solidi e poi importata tramite formati neutri (step, iges) anche se questa operazione non è sempre semplice ed indolore
• Molte volte, la geometria va "elaborata" per dare il miglior supporto alla discretizzazione, specialmente per l'applicazione di carichi e vincoli (dove deve sempre cadere un nodo!), anche prevedendo partizioni
• Non è detto che la miglior geometria di un oggetto per il FEM sia quella reale: semplificazioni sono possibili secondo buon senso e finalità dell'analisi

NB: il solutore non è in grado di discernere tra le unità di misura. Ogni dato in entrata (dimensioni, caratteristiche del materiale, carichi, ecc.) è un numero puro. E' l'utente a doversi curare della coerenza dei dati introdotti.

➔ Attenzione alle unità di misura.

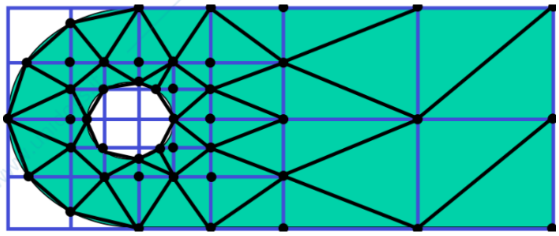
MODELLO GEOMETRICO CARTACEO
- SUDDIVISIONE IN PARTI O BLOCCHI
  - GENERAZIONE COORDINATE NODALI
    - GENERAZIONE ELEMENTI

SISTEMI CAD o MODELLATORI SOLIDI
- MODELLO GEOMETRICO
  - SUDDIVISIONE IN PARTI O BLOCCHI
  - (GENERAZIONE COORDINATE NODALI)
    - GENERAZIONE ELEMENTI
      - MESHATURA FREE
      - MESHATURA MAPPED (STRUTTURATA)
      - MESHATURA LOCAL FREE

<u>FREE MESH</u>

FREE MESH: è la meshatura automatica, in una sola operazione si può meshare una superficie anche complicata, però può essere causa di forti distorsioni degli elementi.
Nel caso 2D, adotta elementi rettangolari, triangolari o un mix. Analogamente nel 3D.
Adatta per geometrie complesse, con mesh a tetraedri (o triangoli in 2D).
è molto difficile da applicare automaticamente a geometrie complesse
L'alternativa è adottare elementi più semplici di forma tipicamente triangolare o tetraedrica perché così si guadagna grande flessibilità nel descrivere la geometria e nel controllare la disposizione dei vertici

Conseguentemente, la maggior parte degli algoritmi di meshatura automatica sono adatti a definire mesh non strutturate: la definizione di una mesh non strutturata consiste nella creazione di vertici e delle loro connessioni in termini di:
- definizione del contorno del dominio
- definizione della funzione di distribuzione della dimensione degli elementi
- generazione di una mesh che soddisfi il contorno geometrico
- ottimizzazione della forma degli elementi generati



Algoritmo "QuadTree/OcTree" →

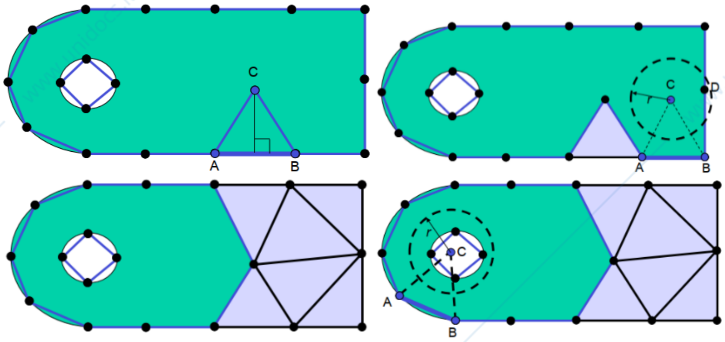
Adatto a realizzare mesh non strutturate mediante forme di elemento 2D triangolari (QuadTree) o 3D tetraedriche (OcTree). Nel caso 2D (Analogamente in 3D con una dimensione in più del 2D):
- definizione di una forma geometrica iniziale (bounding box, detta anche radice del QuadTree) circoscritta alla geometria da meshare
- suddivisione ricorsiva in quattro foglie di ogni radice in modo da risolvere la geometria (si procede quindi per bisezione)
- meshatura di ogni foglia utilizzando vertici propri, vertici adiacenti ed intersezioni delle foglie con i bordi della geometria; cancellazione di ciò che rimane all'esterno.

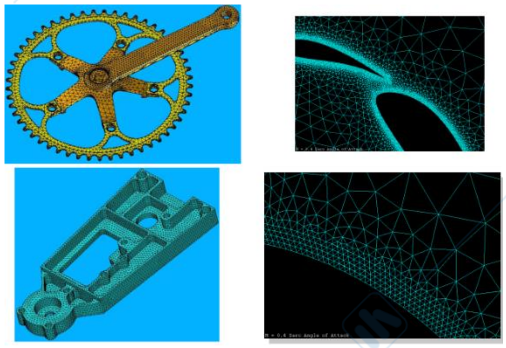
Algoritmo "Advancing Front"

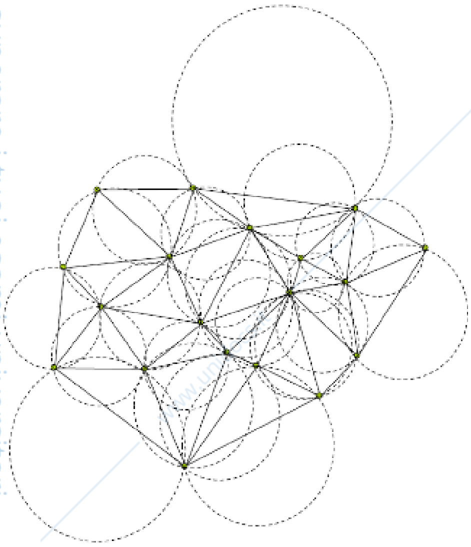
Adatto a realizzare mesh non strutturate 2D e 3D mediante forme di elemento triangolari/tetraedriche o quadrilatere/prismatiche; la mesh viene costruita progressivamente partendo dai bordi esterni della geometria;
Tale procedura iterativa si concretizza nella propagazione, internamente al dominio, di un fronte che è il bordo tra la regione meshata e quella ancora da meshare;
La difficoltà del metodo risiede nel garantire la consistenza del fronte che avanza e che va valutata secondo i seguenti criteri:
- qualità dell'elemento risultante
- densità richiesta di meshatura
- vincoli locali, ad esempio altre parti del bordo esterno o del fronte
- tutti i vertici devono essere interni al dominio geometrico

Procedura di applicazione algoritmo “Advancing Front”

1. Si comincia col definire la mesh sul bordo esterno da cui partirà il fronte;
2. Per ogni sezione AB del fronte esterno è necessario individuare un punto ideale C che soddisfi i criteri di consistenza (in questo caso, si definisce un triangolo equilatero)
3. Durante la procedura, è sempre necessario verificare che un nodo precedentemente creato non cada all’interno di una circonferenza di raggio r centrata nel punto ideale C al momento considerato
4. In caso di risposta positiva, C non viene creato e viene adottato D • Attenzione: l’entità di r dipende dai criteri di consistenza
5. Con la propagazione degli elementi triangolari, la morfologia del fronte varia in continuazione aggiungendo e togliendo bordi
6. Si continua fino a quando non ci sono più bordi liberi da cui costruire nuovi elementi. Se sono disponibili più possibilità, è necessario scegliere quella che meglio soddisfa i criteri di consistenza (ad esempio, la forma di elemento più vicina a quella equilatera) . Non accettare intersezioni con i bordi o i fronti già esistenti.
7. Alla fine della procedura, si procede con l’ottimizzazione della mesh ottenuta

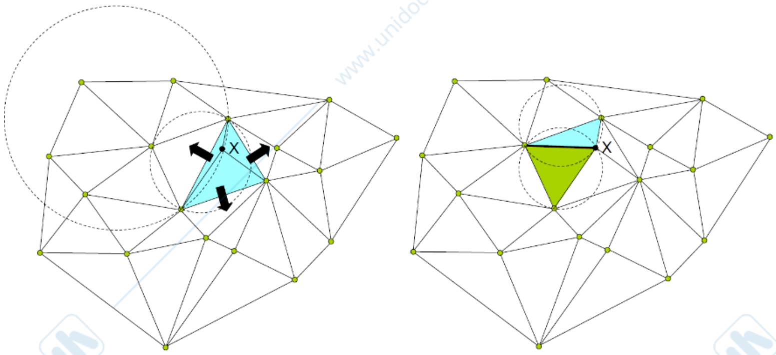






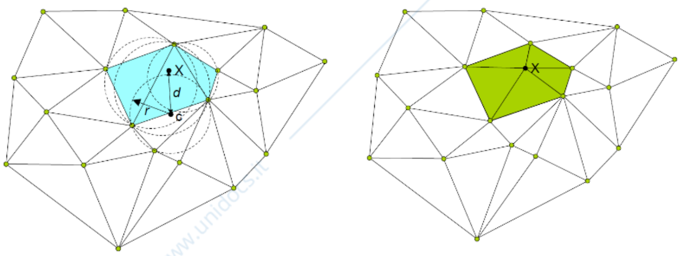
Algoritmo “Triangolazione di Delaunay”
Adatto a realizzare mesh non strutturate 2D e 3D mediante forme di elemento triangolari/tetraedriche
Si basa sul principio del cerchio (sfera) vuoto: nessun altro vertice deve essere contenuto nella circonferenza circoscritta ad ogni triangolo.

Come aggiungere un nodo a una triangolazione di Delaunay:



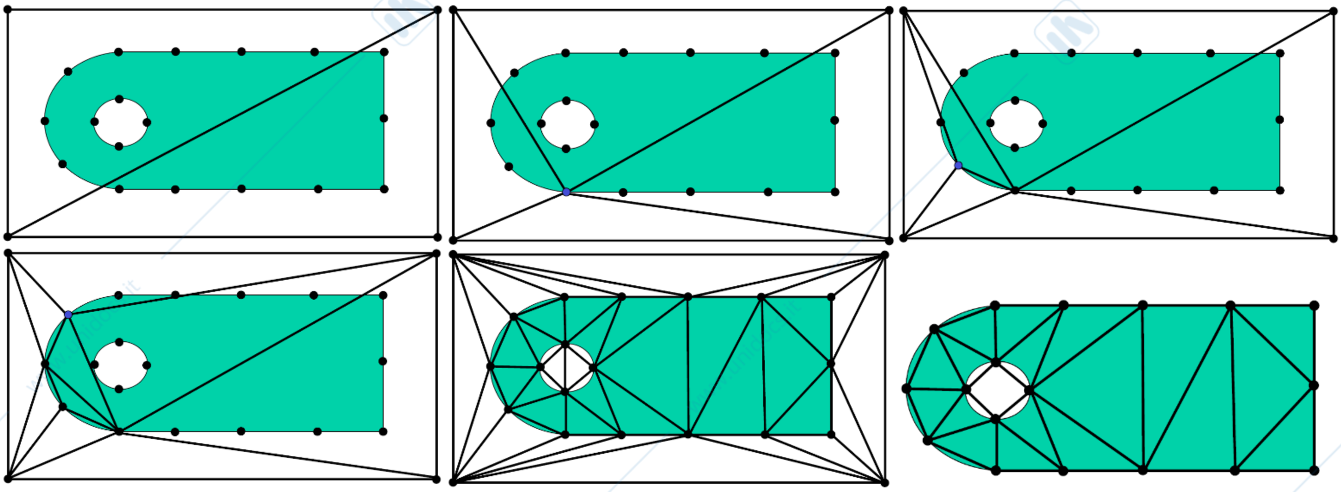
Algoritmo di Lawson
- Individuare il triangolo contenente X
- Suddividere il triangolo
- Verificare ricorsivamente i triangoli adiacenti per garantire il cerchio vuoto. Scambiare le diagonali se necessario.

Algoritmo di Bowyer - Watson
- Individuare il triangolo contenente X
- Cercare tutti i triangoli la cui circonferenza circoscritta include X (d<r)
- Cancellare tali triangoli (creare un vuoto nella mesh)
- Creare nuovi triangoli da Xai bordi del vuoto



Come si costruisce la mesh con l'algoritmo di Delaunay:

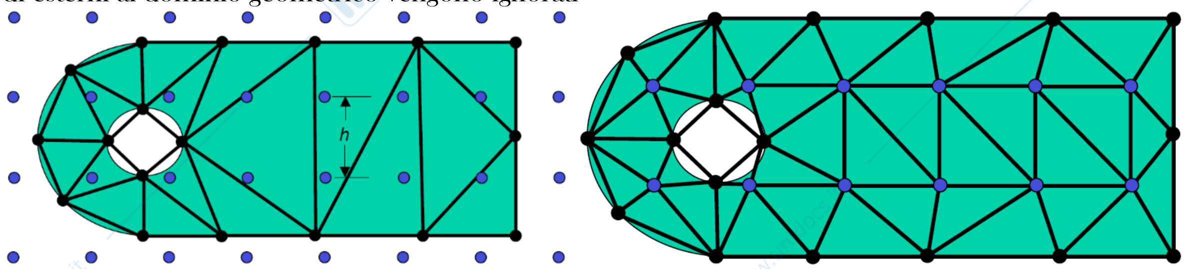
- Si parte da triangoli contenenti l'intera geometria da meshare;
- Si inseriscono e definiscono i nodi sul contorno utilizzando la triangolazione di Delaunay (metodo Lawson o Bowyer-Watson);
- Si evidenzia il contorno;
- Si eliminano i triangoli esterni al dominio geometrico.



La mesh così definita coinvolge solo nodi sul contorno, è quindi adesso necessario aggiungere quelli interni:

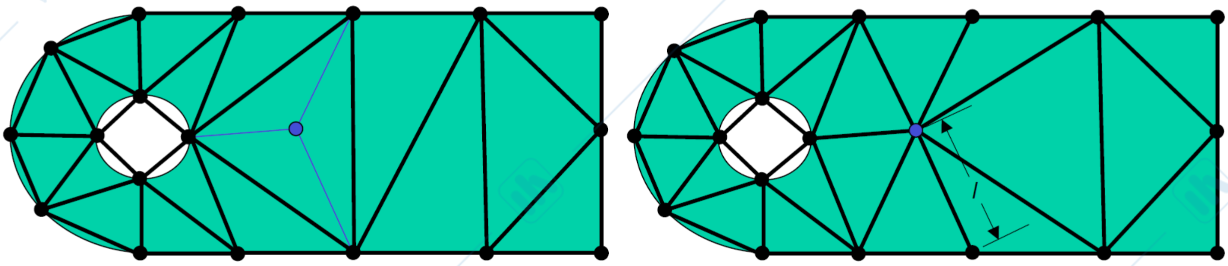
Metodo della griglia:

- Nodi introdotti secondo un pattern regolare
- Tale pattern può essere rettangolare, triangolare, quadtree, ecc.
- I nodi esterni al dominio geometrico vengono ignorati



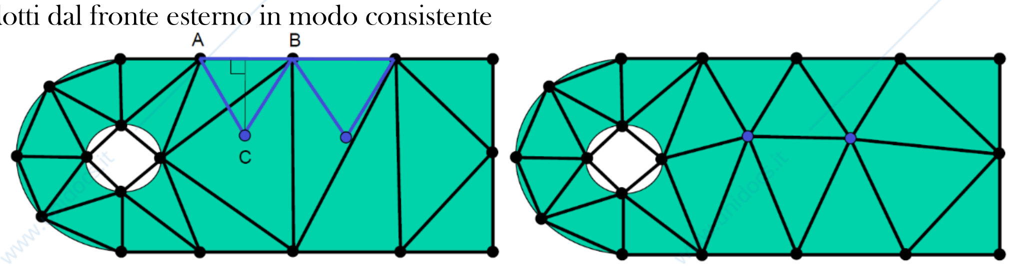
Metodo del centroide

- Nodi introdotti nel centroide dei triangoli
- Si continua ricorsivamente fino a quando i lati degli elementi sono lunghi quanto desiderato ($l \approx h$)

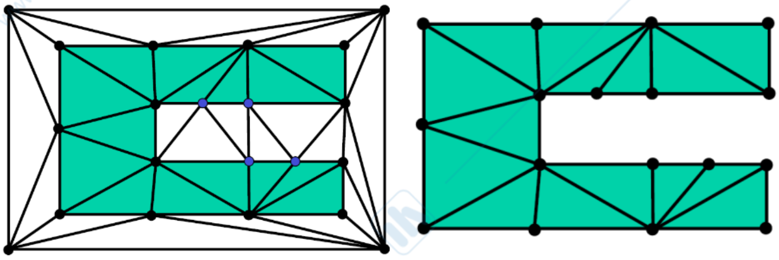


Metodo "advancing front":

- Nodi introdotti dal fronte esterno in modo consistente



In caso di bordi interni procedere come segue:



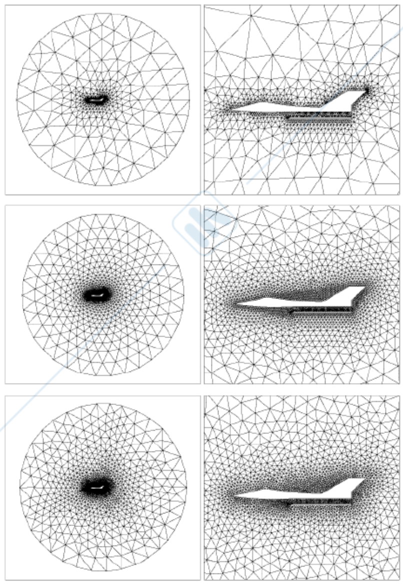
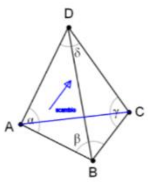
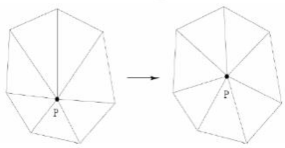


Figure 3.9: *Overview of the different mesh generation methods when applied in a domain (used, for instance, for a CFD problem). Quadtree type mesh (top), advancing-front type mesh (middle) and Delaunay type mesh (bottom) including a close-up view around the fuselage.*

Confronto fra le tecniche:
In termini di dimensione della mesh ci sono differenze importanti
In termini di qualità della mesh non ci sono differenze significative (leggermente a favore di Advancing Front)

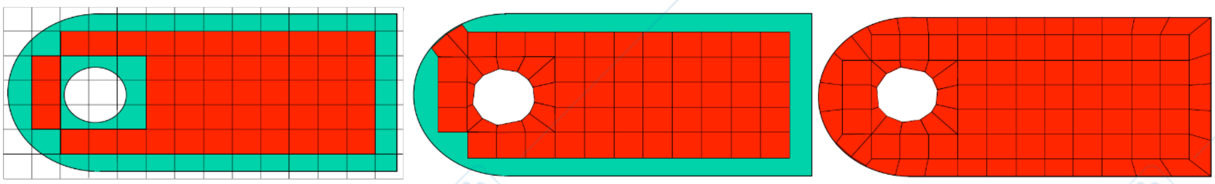
method	np	ne	Q_M	Q_{worst}
quadtree	1,246	2,171	1.25	1.88
advancing-front	2,557	4,795	1.1	1.61
Delaunay	2,782	5,528	1.16	1.82



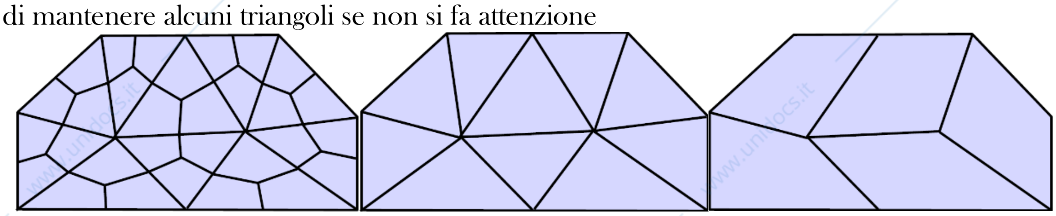


TECNICHE DI REGOLARIZZAZIONE
Dopo aver generato la mesh, si possono utilizzare tecniche di regolarizzazione / ottimizzazione per un suo miglioramento qualitativo.
Si tratta di tecniche iterative essenzialmente basate su due approcci:
- spostamento locale dei nodi (baricentrizzazione): selezionato un patch di elementi, si sposta il vertice centrale nel baricentro (eventualmente pesato) del patch;
- scambio delle diagonali nell'ottica di massimizzare il minimo angolo dei triangoli della griglia (proprietà di regolarità max-min).

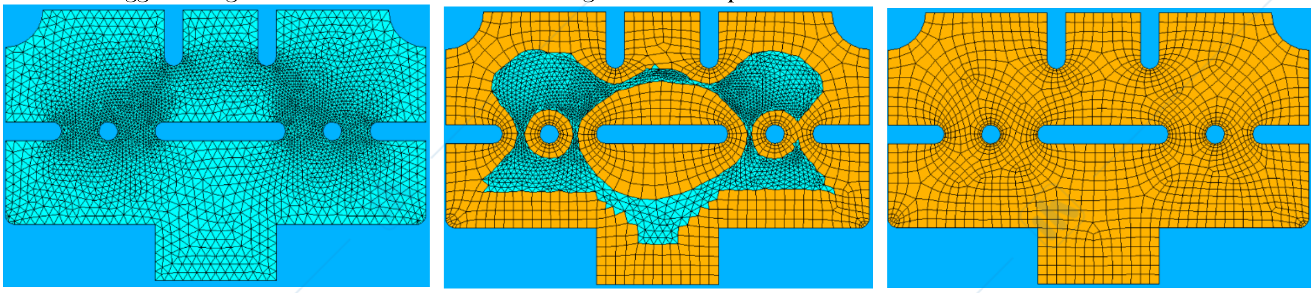
METODI DIRETTI E INDIRETTI
Sono metodi di meshatura non strutturata basata su elementi quadrilateri.
Metodo diretto: "Grid Based":
- Generazione di una griglia di quadrilateri (prismi) sul modello
- Mantenimento di quelli regolari interni al dominio geometrico
- Proiezione dei lati interni degli elementi sul contorno geometrico
- La qualità degli elementi sul contorno è bassa e può non essere conforme



Metodo indiretto: "Triangle or Tetrahedra splitting":
- Ogni triangolo viene scomposto in tre quadrilateri
- La qualità della mesh è spesso bassa
- Si combinano triangoli adiacenti in modo da generare un quadrilatero
- Si verificano le migliori combinazioni
- Si rischia di mantenere alcuni triangoli se non si fa attenzione

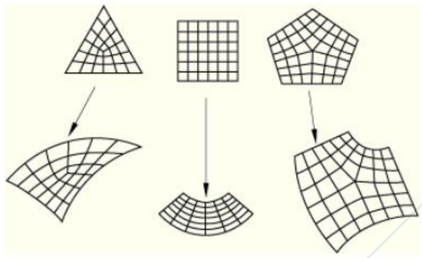


Una versione più complicata e potente del merging è il Q-Morph che prevede anche lo spostamento dei nodi per ottenere maggiore regolarità e che è mostrato nel seguente esempio:



STRUCTURED (MAPPED) MESH

Genera mesh strutturate (dove le distorsioni sono limitate) utilizzando topologie semplici predefinite che vengono "spalmate" sulla regione da meshare. Necessita lavoro dell'utente perché si può utilizzare solo su partizioni semplici della geometria. Permette un maggior controllo sul risultato.

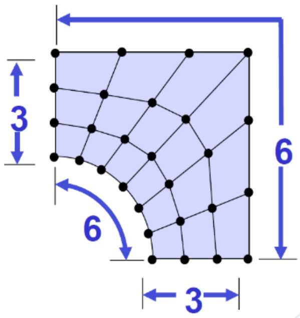


Procedura di meshatura strutturata:
meshare un dominio canonico (geometria semplice) e poi mappare tale mesh sul dominio fisico da meshare rispettando il suo contorno.
In sostanza, l'approccio assomiglia molto alla trasformazione isoparametrica, solo che si applica ad una intera regione geometrica da meshare con più elementi finiti e non a un singolo elemento finito.

Esistono fondamentalmente due classi di metodologie per eseguire tale compito:
• metodi di interpolazione algebrica: dopo che la mesh strutturata è stata definita nello spazio naturale, si utilizza una funzione di mappatura per applicarla in modo conforme alla vera geometria nello spazio fisico
• metodi basati su equazioni alle derivate parziali.

In questi metodi, i punti critici sono:
1) la definizione di una funzione di mappatura opportuna; 2) la tecnica di partizionamento se necessaria.

Algoritmo "Trans-Finite Interpolation"

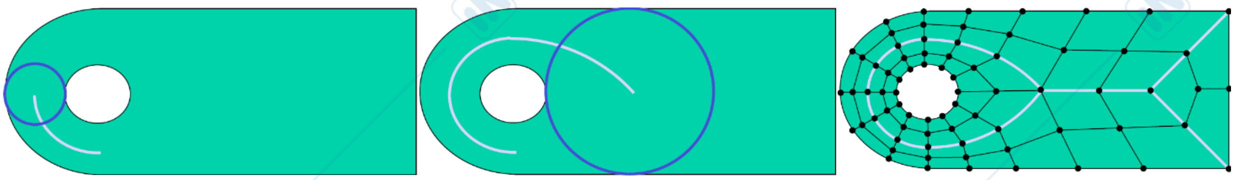


Si chiama così dal nome della funzione di mappatura che adotta. E' l'algoritmo più simile alla trasformazione isoparametrica, perché è basato sulla trasformazione uno-a-uno di un quadrato o un triangolo equilatero di lati unitari (spazio naturale) in un qualsiasi dominio 2D semplicemente connesso (spazio fisico)

la mappatura consiste nella distorsione topologica di un quadrato od un triangolo equilatero nel dominio geometrico voluto; funziona anche in 3D

Algoritmo "Medial axis"

E' basato sul concetto di oggetto medio: si fa "rotolare", attraverso il modello, un cerchio o una sfera sempre tangenti al contorno. La curva congiungente i centri definisce l'oggetto medio.



L'oggetto medio viene utilizzato come strumento per il partizionamento automatico dell'oggetto in geometrie più semplici mappabili in maniera strutturata.

REALIZZAZIONE MESH
Densità mesh dipende dalla complessità della distribuzione degli sforzi
In presenza di elevati gradienti di sforzo localizzati è consigliato l'uso di discretizzazioni con densità elementi differenti.
Mesh ottimizzata richiede un processo iterativo
N° iterazioni → Abilità dell'analista + Mesh iniziale accurata

Alcuni software commerciali prevedono l'utilizzo di schemi iterativi pressoché automatici:

I. h-type: si aumenta il numero di elementi, suddividendo gli elementi esistenti
II. r-type: i nodi sono ricollocati per ridurre la dimensione degli elementi
III. p-type: si aumenta l'ordine delle funzioni di forma degli elementi

Tali metodi generalmente richiedono che la mesh sia generata con un modellatore geometrico
Tali metodi possono essere utilizzati nei processi di meshatura manuale o "mappata" ad eccetto del p-type per il quale è necessario aggiungere nodi interni agli spigoli per aumentare la funzione di forma (elementi usuali hanno al massimo funzioni di forma del 2° ordine)
P-ELEMENTS Elementi speciali nei quali ordine del polinomio è aumentato senza nodi addizionali (ProMechanica)

TECNICHE DI INFITTIMENTO
Per via del tipico grado delle funzioni di forma (lineare o parabolico), il FEM non riesce a descrivere bene picchi di sforzo caratterizzati da alti gradienti
D'altronde, utilizzare infittimenti molto spinti può essere un approccio costoso, in termini di tempi di calcolo, soprattutto se interessano l'intero modello. Si adottano, quindi, tecniche di infittimento locale della mesh.

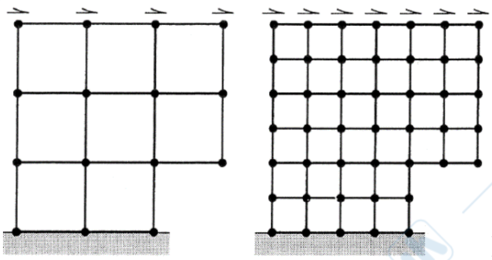
Metodo h → h dimensione caratteristica dell'elemento:

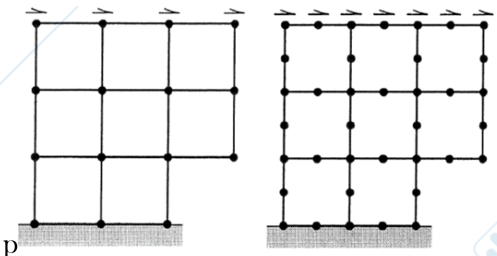
- L, per beam o bar - $A^{1/2}$, per elementi piani o shell - $V^{1/3}$, per elementi solidi

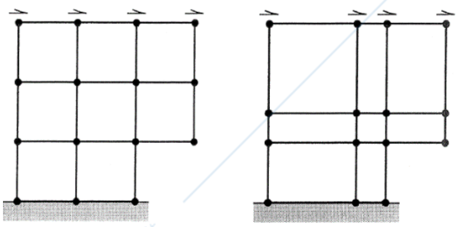
Viene aumentato il numero di elementi, non il loro ordine (polinomio interpolante)
Due possibilità di infittimento:
- uniforme (la posizione dei nodi pre-esistenti rimane invariata) - non uniforme

Metodo p → Il numero di elementi rimane invariato e si aumenta l'ordine aggiungendo nodi sui lati degli elementi.
p è l'ordine del polinomio completo riconoscibile nell'espressione del campo degli spostamenti (funzioni di forma): p = 1 per Q4 e T3 o p = 2 per Q8
Solitamente si applica in combinazione con le altre tecniche e riguarda tutto il modello, perché raramente si adottano contemporaneamente elementi lineari e quadratici a meno di utilizzare tecniche di interfacciamento speciali.

Metodo r = re-arrange → Il numero di elementi ed il loro ordine rimangono invariati, cambia la disposizione.
Fra i tre garantisce il minore aumento dell'accuratezza, ma molto utile e potente in abbinamento agli altri due.

Metodo h


Metodo p


Metodo r


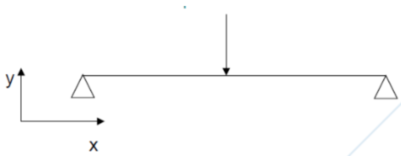
#7 VINCOLI E CARICHI

CONCETTUALMENTE
- analisi del componente meccanico reale
- individuazione degli obiettivi dell'analisi
- schematizzazione del componente e semplificazioni geometriche
- schematizzazione delle condizioni al contorno

OPERATIVAMENTE
- tipo di elemento
- disposizione e dimensione degli elementi (analisi di convergenza)
- condizioni al contorno (carichi meccanici, termici, ecc. e vincoli)
- modellazione del materiale
- tipo di analisi
- analisi e interpretazione dei risultati

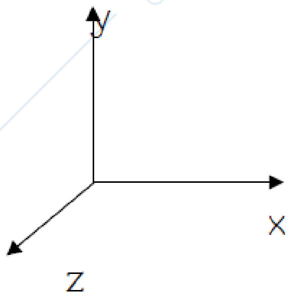
VINCOLI/CONSTRAINTS (BOUNDARY COND.) constraints impongono valori definiti alle variabili nodali
CARICHI/LOADS molteplicità di carichi e coppie concentrate e distribuite

VINCOLI – CONSTRAINTS
spostamenti e/o rotazioni impedite derivanti dal collegamento della struttura al contesto circostante



I vincoli devono essere sufficienti per eliminare i moti di corpi rigidi.

Schema di calcolo della trave → esistono solo reazioni vincolari in direzione Y
Elementi finiti → è necessario definire un supporto in direzione X

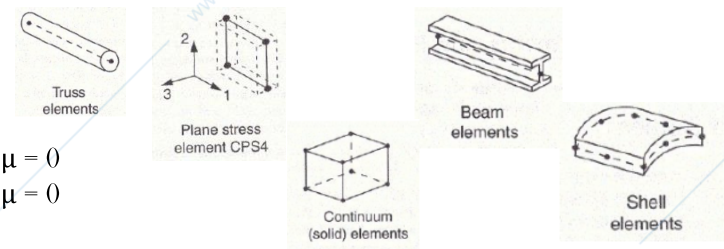


Possono essere:
- vincoli di simmetria
- multi-point constraints
- elementi spring/molla
- elementi gap
- elementi rigidi

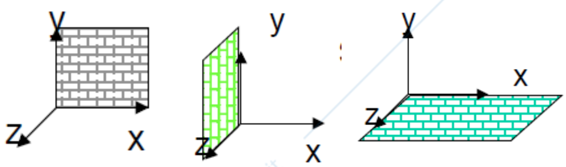
Spostamenti u, v, w e/o rotazioni impedite ω, φ, μ
(sistema di coordinate cartesiane globale x, y, z)

Il n° di g.d.l dipende dal tipo di elemento:

ASTA 2 g.d.l. o 3 g.d.l.	u,v,w = 0
2D SP/DP 2 g.d.l.	u,v = 0
2D Axy 2 g.d.l.	a, r = 0
BEAM 6 g.d.l.	u,v,w, ω, φ, μ = 0
SHELL 6 g.d.l.	u,v,w, ω, φ, μ = 0
SOLIDI 3 g.d.l.	u,v,w = 0



VINCOLI DI SIMMETRIA	
SIMMETRIA PIANO XY	w, ω, φ = 0
SIMMETRIA PIANO YZ	u, φ, μ = 0
SIMMETRIA PIANO XZ	v, ω, μ = 0
VINCOLI DI ANTISIMMETRIA	
ANTISIMMETRIA PIANO XY	u, v, μ = 0
ANTISIMMETRIA PIANO YZ	v, w, ω = 0
ANTISIMMETRIA PIANO XZ	u, w, φ = 0

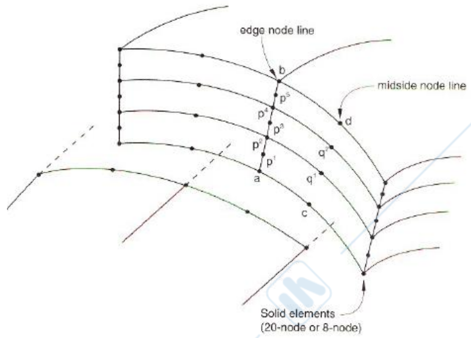


CONSTRAINT EQUATION or MULTI POINT CONSTRAINTS
Sono vincoli cinematici interni al modello, che legano parti diverse del modello.
NON sono vincoli a terra.

$u_i = C_1 + C_2 u_j + C_3 v_k + C_4 w_l$ [slave] = [master]

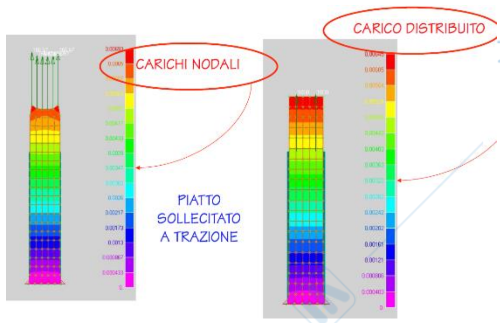
dove u_n, v_n e w_n sono gli spostamenti del nodo n nelle direzioni x, y, z e C_i è una costante.
Anche le rotazioni possono essere inserite, in questo caso i coefficienti avranno una dimensione.

- LINEARE è un metodo standard per introdurre transizioni di mesh per elementi con funzioni di forma del primo ordine;
  Ogni DOF al nodo p è interpolato linearmente a partire dai corrispondenti DOF dei nodi a e b
- QUADRATICO è un metodo standard per introdurre transizioni di mesh per elementi del secondo ordine;
  Ogni DOF al nodo p è interpolato quadraticamente a partire dai corrispondenti DOF dei nodi a e b
- CYCLIC SYMMETRY: introduce vincoli per imporre simmetrie cicliche uguagliando gli spostamenti radiali, circonferenziali e assiali ai nodi a e b



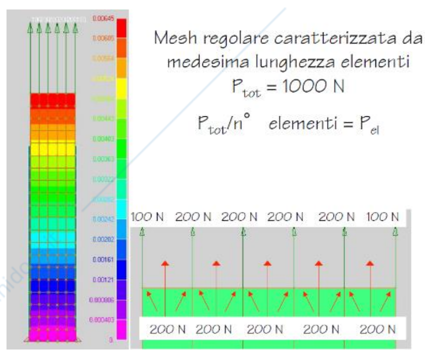
- TIE: tutti i gradi di libertà uguali tra i nodi
- SLIDER utilizzato per schematizzare il passaggio tra elementi differenti, è necessario in presenza di DOF attivi differenti introdurre dei vincoli cinematici es. beam-shell, beam-solid, shell-solid
- ELEMENTI SPRING/MOLLA elemento monodimensionale
  accoppia una forza con relativo spostamento
  accoppia un momento con relativa rotazione
  può essere lineare o non lineare
- ELEMENTI GAP utile per simulare appoggio monolatero
- ELEMENTI RIGIDI elemento monodimensionale
  nessuna richiesta relativa alla geometria
  elemento di collegamento rigido tra due nodi

DA RICORDARE:
Analisi lineare: applicare carichi unitari e determinare i risultati tramite semplici moltiplicazioni di fattori noti
Es. analisi di un recipienti in pressione da verificare sia in prova idraulica sia in condizioni di progetto;
sforzi e deformazioni sono direttamente proporzionali ai carichi applicati.
Carichi meccanici: devono esser convertiti in carichi nodali



CARICO NODALE elevata deformazione ed elevato sforzo nel nodo di applicazione rispetto ai nodi circostanti
Valore locale dello sforzo calcolato al nodo non ha significato reale

CARICHI DISTRIBUITI infinito numero di combinazioni di carichi discreti nodali staticamente equivalenti al carico distribuito (in accordo con St. Venant)
devono essere trasformati in carichi nodali F_i



stesso effetto remoto lontano dal punto di applicazione dei carichi

$$[K]\{u\} = \{F\}$$

Nelle analisi con differenti componenti di carico PUO' ESSERE UTILE

1) utilizzare carichi unitari

2) analizzare i risultati relativi alle differenti componenti di carico per interpretare come la struttura lavora soggetta ai vari carichi (in analisi lineari elastiche vale il principio di sovrapposizione degli effetti)
Es. analisi di strutture in ambito civile in presenza di differenti componenti: neve, sisma, vento, ecc..

#8 FEM_Procedimento risolutivo
2. ANALISI (statica/dinamica, lineare/nonlineare) (Hardware/Software)

- modello geometrico
- discretizzazione (tipo di elementi, dimensioni degli elementi)
- condizioni al contorno

INPUT UTENTE

TIPO DI ANALISI
- analisi statica
- analisi dinamica
- trasmissione del calore
- buckling
- ecc.

COMPUTER

$[K]\{u\} = \{F\}$

$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F(t)\}$ ANALISI

$[C]\{\dot{T}\} + [K]\{T\} = \{Q\}$

<u>PROCEDURE DI CONTROLLO</u>
PRIMA DELL'ANALISI
- controllo delle informazioni inserite dall'utente da parte del programma
- controllo da parte dell'utente della consistenza di informazioni introdotte nel caso di utilizzo di software differenti (modellatore e solutore)

DURANTE L'ANALISI
controlli eseguiti dal software possono riportare due tipi di errore, fatali o warning

DOPO L'ANALISI
interpretazione dei risultati da parte dell'utente

[K] {u} = {F}
[K] è la matrice di rigidezza della struttura
{u} è il vettore degli spostamenti nodali
{F} è il vettore delle forze nodali

ANALISI
risoluzione di un sistema di n equazioni lineari in n incognite (algebra matriciale) -> serie di passi definiti

$k_{11} u_1 + k_{12} u_2 + k_{13} u_3 = F_1$ $\quad$ $k_{21} u_1 + k_{22} u_2 + k_{23} u_3 = F_2$ $\quad$ $k_{31} u_1 + k_{32} u_2 + k_{33} u_3 = F_3$ $\quad$ [K] {u} = {F}

ALGORITMO DI ELIMINAZIONE GAUSSIANA
1ª FASE: trasformare il sistema di equazioni in un sistema con matrice dei coefficienti triangolare superiore
2ª FASE: determinazione delle incognite per sostituzione

Fase 1: Manipolazione delle equazioni per trasformare la matrice (vedi equazioni sopra)
Normalizzo la 1ª equazione (rendere il primo coefficiente unitario, cioè isolo u1); moltiplico la 1ª eq. Per k21;
Sottraggo alla seconda equazione la prima equazione
(k22 - k21 k12 / k11) u2 + (k23- k21 k13 / k11) u3 = F2 - (k21 / k11) F1

[...]