

INFERENZA STATISTICA
a.a. 2015-2016 – 13 gennaio 2017
IV prova scritta

**ATTENZIONE: I FOGLI A QUADRETTI CONSEGNATI
NON VERRANNO CONSIDERATI**

• • •

Cognome e Nome: _____ **Canale** SEFA (F. DE SANTIS)
SES - SG (L. TARDELLA)

Esercizio 1. Sia X_1, \dots, X_n un campione casuale proveniente da una popolazione con funzione di densità

$$f_X(x; \theta) = (\theta + 1)x^\theta, \quad x \in (0, 1) \quad \theta > -1.$$

1. Determinare il modello statistico e stabilire se $\{f_X(\cdot; \theta), \theta \in \Theta\}$ è una famiglia esponenziale.
2. Determinare la funzione di verosimiglianza di θ e una statistica sufficiente per il modello.
3. Calcolare la stima di massima verosimiglianza di θ e l'informazione osservata di Fisher per il campione osservato $\mathbf{x}_3 = (0.7, 0.6, 0.8)$.
4. Determinare, per un generico valore elevato di n , l'approssimazione normale della funzione di verosimiglianza. Sulla base di tale approssimazione, calcolare gli estremi dell'insieme di verosimiglianza di livello $q = 0.147$.

www.unidocs.it

www.unidocs.it

www.unidocs.it



www.unidocs.it

www.unidocs.it



www.unidocs.it

www.unidocs.it



www.unidocs.it

www.unidocs.it

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Esercizio 2. Sia X_1, \dots, X_n un campione casuale proveniente da una popolazione con funzione di densità

$$f_X(x; \theta) = \frac{1}{2\theta + 1} I_{[\theta-1, 3\theta]}(x), \quad \theta > 0.$$

1. Disegnare la funzione di densità della v.a. X . Calcolare valore atteso e varianza della statistica media campionaria, \bar{X}_n .

[Sugg. Ricordare che per una v.a. uniforme definita nell'intervallo $[a, b]$ si ha che $\mathbb{E}[X] = (a + b)/2$ e $\mathbb{V}[X] = (b - a)^2/12$].

2. Si consideri la statistica

$$T(\mathbf{X}_n) = a\bar{X}_n + b, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Determinare i valori di a e b per i quali la statistica T è uno stimatore non distorto di

$$\psi = \frac{1}{3}\theta - 1.$$

3. Determinare lo stimatore dei momenti, $\hat{\theta}_M$, per il parametro θ e calcolarne distorsione, varianza ed errore quadratico medio. Determinare il limite per n che tende a infinito dell'errore quadratico medio.
4. Determinare l'approssimazione asintotica per la distribuzione campionaria dello stimatore dei momenti, $\hat{\theta}_M$. Utilizzando tale distribuzione, calcolare la probabilità dell'evento $\{\hat{\theta}_M > 5/4\}$, assumendo $\theta = 1$ e $n = 16$.

www.unidocs.it

www.unidocs.it

www.unidocs.it



www.unidocs.it

www.unidocs.it



www.unidocs.it

www.unidocs.it



www.unidocs.it

www.unidocs.it

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Esercizio 3. Sia X_1, \dots, X_n un campione casuale proveniente dalla popolazione con funzione di densità di probabilità

$$f_X(x; \theta) = \theta e^{-\theta x}, \quad x > 0, \quad \theta > 0,$$

con

$$E[X] = \frac{1}{\theta} \quad V[X] = \frac{1}{\theta^2}.$$

Si consideri il sistema di ipotesi

$$H_0 : \theta = \theta_0, \quad H_1 : \theta = \theta_1, \quad (\theta_0 > \theta_1).$$

1. Verificare che la regione di accettazione del test di Neyman-Pearson risulta essere l'insieme

$$A = \{\mathbf{x}_n : \bar{x}_n < k\}, \quad k > 0.$$

2. Utilizzando la distribuzione asintotica di \bar{X}_n , verificare che il valore di k per il quale la probabilità di errore di I specie del test di cui al punto 1) è pari a α risulta essere

$$k_\alpha = \frac{1}{\theta_0} + z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{1}{n\theta_0^2}}.$$

3. Stabilire se, per un campione in cui la media campionaria è pari a 1.5, l'ipotesi nulla viene accettata o rifiutata, per $\alpha = 0.05$.
4. Determinare la potenza del test considerato, assumendo $\alpha = 0.05$, $\theta_0 = 2$ e $\theta_1 = 1$ $n = 25$.

www.unidocs.it

www.unidocs.it

www.unidocs.it



www.unidocs.it

www.unidocs.it



www.unidocs.it

www.unidocs.it



www.unidocs.it

www.unidocs.it